Л. Фукс

БЕСКОНЕЧНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

т. 2

Перевод с английского
А. А. МАНОВЦЕВА и А. П. МИШИНОЙ

Под редакцией
Л. Я. КУЛИКОВА

Издательство «Мир»
Москва 1977

INFINITE ABELIAN GROUPS

László Fuchs

Tulane University
New Orleans, Louisiana

VOLUME II

Academic Press
New York and London
1973

Л. Фукс

БЕСКОНЕЧНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

т. 2

Перевод с английского
А. А. МАНОВЦЕВА и А. П. МИШИНОЙ

Под редакцией
Л. Я. КУЛИКОВА

Издательство «Мир»
Москва 1977

УДК 519.443

Второй том известной монографии Л. Фукса (т. 1 вышел в издательстве «Мир» в 1974 г.) содержит многочисленные результаты структурной теории абелевых групп, полученные в самые последние годы. В книге охвачен широкий круг вопросов, причем, как и в первом томе, изложение сопровождается значительным количеством упражнений.

Оба тома в совокупности представляют собой своего рода энциклопедию по абелевым группам — в основном тексте и в упражнениях можно найти почти все важные результаты этой теории. Интересен и приведенный автором список нерешенных проблем.

Книга полезна каждому математику, работающему в области теории групп, теории модулей и колец, топологии.

Редакция литературы по математическим наукам

ИБ № 964

Л. Фукс

БЕСКОНЕЧНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Том 2

Редактор Г. М. Цукерман, Художник В. С. Акопов
Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Т. А. Максимова
Корректор Л. Д. Панова

Сдано в набор 22/XII 1976 г Подписано к печати 13/V 1977 г.
Бумага кн-журн. $60\times90^{1}/_{16}$=13 бум. л. 26 печ. л.
Уч.-изд. л. 28,73. Изд. № 1/8197. Цена 2 р. 70 к. Зак. № 017

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.

Ф $\frac{20203\text{-}010}{041(01)\text{-}77}$ 10—77

Предисловие [1])

Теория абелевых групп — это ветвь алгебры, в которой рассматриваются коммутативные группы. Любопытно, что она до некоторой степени не зависит от общей теории групп: ее основные идеи и методы имеют лишь незначительное сходство с некоммутативным случаем, и есть основания полагать, что не существует другого условия, которое имело бы большее значение для групповой структуры, чем коммутативность.

Настоящая книга посвящена теории абелевых групп. Изучение теории абелевых групп целесообразно по двум основным причинам: во-первых, из-за красоты результатов — среди них находятся некоторые из лучших примеров того, что называется алгебраической структурной теорией; во-вторых, потому, что это один из основных побудителей новых исследований по теории модулей (например, для всякой теоремы об абелевых группах можно поставить вопрос: для модулей над какими кольцами верен этот результат?); имеются и другие области математики, в которых широкое применение теории абелевых групп может быть очень плодотворным (строение групп гомологий и т. д.).

Первоначальным намерением автора было подготовить второе издание его книги «Абелевы группы» (Будапешт, 1958). Однако скоро стало очевидным, что в последнее десятилетие теория абелевых групп развивалась слишком быстро, чтобы можно было ограничиться простым пересмотром издания, и поэтому была написана совсем новая книга, отражающая новый аспект теории. Некоторые темы (структура подгрупп, разложение в прямую сумму подсистем и т. д.), которые рассматривались в книге «Абелевы группы», здесь не будут затрагиваться.

Две параллельные задачи этой книги — ознакомить подготовленных студентов с теорией абелевых групп и дать молодому алгебраисту обзор материала (в разумном объеме), который может послужить основой для исследований по абелевым группам. Изложение никоим образом не претендует на исчерпывающий характер или даже на то, чтобы дать полное представление о современном состоянии теории — это было бы сизифовым трудом, так как теория абелевых групп стала крайне обширной и продолжает расти практически изо дня в день. Но то, что автор рассматривает как основную часть сегодняшней теории абелевых групп, он пытался изложить по возможности полно, чтобы

[1]) Это предисловие, как и в английском оригинале, совпадает с предисловием к тому 1.— *Прим. перев.*

читатель мог получить достаточно сведений о центральных идеях, основных результатах и главнейших методах теории. Чтобы помочь в этом читателю, текст сопровождается многочисленными упражнениями; некоторые из них являются просто упражнениями, другие дают дополнительные сведения по теории, содержат различные добавления. Упражнения используются лишь в других упражнениях, но читателю рекомендуется попробовать выполнить некоторые из них, чтобы лучше осмыслить теорию. От читателя не требуется никаких предварительных знаний, кроме элементов абстрактной алгебры, теории множеств и топологии, но требуется определенная математическая зрелость.

Выбор материала неизбежно несколько субъективен. Главный упор делается на структурные проблемы; должное место отводится гомологическим вопросам и некоторым топологическим рассмотрениям. Была сделана серьезная попытка унифицировать методы, упростить изложение и сделать его по возможности независимым. Автор пытался избежать излишней абстрактности или технической сложности изложения. Из-за этого в книгу не вошли некоторые важные результаты, а изложение (в тех местах, где это неизбежно вызвало бы потерю ясности или множество технических осложнений) велось не в максимально возможной общности.

В томе 1 излагаются основы теории абелевых групп, а также ее гомологический аспект, в то время как том 2 посвящен структурной теории и приложениям. В каждом томе имеется библиография, содержащая те работы по абелевым группам, на которые имеются ссылки в тексте. Автор старался везде указывать, кому принадлежит тот или иной результат. В некоторых случаях, однако (особенно в упражнениях), было почти невозможно приписать идеи их первооткрывателям. В конце каждой главы приводятся комментарии, указываются дальнейшие пути, по которым шло исследование, упоминаются некоторые дополнительные результаты и обобщения, в частности, на модули, которые могут заинтересовать читателя. Приведены также нерешенные проблемы, которые автор считал интересными.

Система ссылок внутри книги достаточно ясна. Конец доказательства отмечается символом. ∎ Задачи, которые по той или иной причине казались автору трудными, часто отмечены звездочкой, как, впрочем, и некоторые разделы, которые начинающий читатель может счесть разумным пропустить.

Автор многим обязан специалистам по теории групп за сделанные ими замечания; всех их автор искренне благодарит. Особенно он благодарен Шарлю за многочисленные полезные советы. Автор хотел бы выразить свою признательность математическим отделениям университетов в Майами (Корэл Гейбл, Флорида) и в Тулейне (Новый Орлеан, Луизиана) за их помощь в подготовке рукописи, а также издательству «Academic Press» за публикацию этой книги в своей замечательной серии «Pure and Applied Mathematics».

Л. Фукс

Глава XI

СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ p-ГРУППЫ

Мы начнем рассмотрение основных классов абелевых групп с теории периодических групп. Напомним, что периодическая группа единственным образом разлагается в прямую сумму p-групп для различных простых чисел p, поэтому структурная теория для случая периодических групп сразу же сводится к случаю p-групп. Далее она легко сводится к случаю редуцированных p-групп. Эта и следующая главы посвящены теории редуцированных p-групп.

В настоящей главе мы прежде всего займемся p-группами без элементов бесконечной высоты — для краткости мы будем называть их *сепарабельными* p-группами,— а общий случай рассмотрим в следующей главе. Сепарабельные p-группы играют фундаментальную роль в общей теории p-групп (например, ульмовские факторы p-групп всегда сепарабельны). Всякая сепарабельная p-группа является сервантной подгруппой, лежащей между базисной подгруппой B этой p-группы и «наибольшей» сепарабельной p-группой $\overline{B}$ с той же базисной подгруппой B. Эти (так называемые периодически полные) p-группы $\overline{B}$ обладают многими замечательными свойствами, которые мы рассмотрим в § 68—71; в частности, эти группы допускают достаточно полные системы инвариантов. По существу ни для какого важного класса сепарабельных p-групп, кроме класса прямых сумм циклических групп и класса периодически полных групп, достаточно хорошей структурной теории пока не получено.

§ 65. Леммы о p-группах

Изучение p-групп мы начнем с изучения p-групп A без элементов бесконечной высоты. Отсутствие элементов бесконечной высоты означает, иными словами, что первая ульмовская подгруппа группы A равна нулю, т. е. $A^1 = 0$. Этот параграф посвящен изложению некоторых предварительных результатов, касающихся в основном таких p-групп.

Прежде всего введем некоторые термины. Произвольную группу A назовем *сепарабельной*, если любую ее конечную подсистему $\{a_1, \ldots, a_n\}$ можно вложить в прямое слагаемое S группы A, являющееся прямой суммой групп ранга 1. Очевидно, тогда в качестве S можно взять прямую сумму конечного числа групп ранга 1; в случае p-групп это означает, что S — конечно копорожденная группа (см. теорему 25.1). В силу своего строения все делимые группы сепарабельны, и легко видеть, что группа сепарабельна в точности тогда, когда ее редуцированная часть сепарабельна.

Предложение 65.1. *Редуцированная p-группа сепарабельна тогда и только тогда, когда она не содержит отличных от нуля элементов бесконечной высоты.*

Если A — сепарабельная редуцированная p-группа, то каждый ее элемент содержится в ее конечном прямом слагаемом. Поэтому группа A не имеет элементов бесконечной высоты. Обратно, если группа A не содержит элементов бесконечной высоты и $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечное подмножество элементов группы A, то $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — конечная подгруппа, высоты элементов которой ограничены в совокупности. По следствию 27.8 эту подгруппу можно вложить в ограниченное [1]) прямое слагаемое S группы A. Тот факт, что S — прямая сумма групп ранга 1, следует из теоремы 17.2. ∎

В силу предложения 65.1 можно для краткости называть p-группы без элементов бесконечной высоты *сепарабельными p-группами.* [О сепарабельных группах без кручения см. § 87.]

Очевидно, что p-группа хаусдорфова в своей p-адической топологии тогда и только тогда, когда она сепарабельна. Хотя нам придется рассматривать также и другие топологии, но если не оговорено противное, *p-группы будут считаться снабженными p-адической топологией.*

В соответствии с этим, если X — подмножество в p-группе A, то через X^- мы будем обозначать его топологическое замыкание в p-адической топологии. Очевидно, что если X — подгруппа, то и X^- — подгруппа группы A. В самом деле, X^-/X — это именно первая ульмовская подгруппа группы A/X.

Заметим, что в сепарабельной p-группе A все подгруппы $A[p^n]$, $n = 0, 1, \ldots$, являются замкнутыми. Если G — замкнутая подгруппа группы A, то $G[p^n] = G \cap A[p^n]$ — также замкнутая подгруппа (как пересечение двух замкнутых подгрупп). Для сервантных подгрупп верно и обратное утверждение:

Лемма 65.2. *Сервантная подгруппа G сепарабельной p-группы A является замкнутой тогда и только тогда, когда подгруппа $G[p^n]$ замкнута в $A[p^n]$ при некотором $n \geqslant 1$.*

Пусть подгруппа $G[p^n]$ замкнута в $A[p^n]$ при некотором n. Тогда подгруппа $G[p]$ замкнута в $A[p]$. Предположим теперь, что подгруппа G не замкнута, т. е. что $(A/G)^1 \neq 0$. Тогда в A/G существует смежный класс $a+G$ порядка p и бесконечной высоты. По теореме 28.1 в качестве a можно выбрать элемент порядка p. Для любого k существуют такие элементы $x \in A$ и $g \in G$, что $p^k x = a + g$, откуда $p^{k+1}x = pg \in G$, и для некоторого $h \in G$ выполняется равенство $p^{k+1}h = pg$. Отсюда $p^k(x-h) = a + (g - p^k h)$, где $g - p^k h \in G[p]$, т. е. a лежит в замыкании подгруппы $G[p]$, т. е. $a \in G[p] \subseteq G$. Противоречие. ∎

Пусть A — редуцированная p-группа и $a \in A$ — ее элемент порядка p^n. Свяжем с a возрастающую последовательность

$$H(a) = (h^*(a), h^*(pa), \ldots, h^*(p^n a) = \infty) \qquad (1)$$

[1]) *Ограниченными* называются группы, в которых порядки элементов ограничены в совокупности.— *Прим. перев.*

порядковых чисел и символов ∞; здесь h^* обозначает обобщенную высоту относительно простого числа p [см. определение в § 37], т. е. $h^*(a) = \sigma$, если $a \in p^\sigma A \setminus p^{\sigma+1}A$, и $h^*(0) = \infty$. Мы будем называть $H(a)$ *индикатором* или *ульмовской последовательностью* элемента a. Часто бывает удобно бесконечно продолжить эту последовательность, добавив к ней символы ∞:

$$H(a) = (h^*(a),\ h^*(pa),\ \ldots,\ h^*(p^n a),\ h^*(p^{n+1}a),\ \ldots). \qquad (2)$$

Из текста всегда будет видно, какую из форм этой последовательности, (1) или (2), следует использовать.

Очевидно, что для любого элемента a справедливо неравенство $h^*(p^i a) < h^*(p^{i+1}a)$, когда $p^i a \neq 0$. Если

$$h^*(p^i a) + 1 < h^*(p^{i+1}a),$$

то говорят, что индикатор элемента a имеет *скачок* между $h^*(p^i a)$ и $h^*(p^{i+1}a)$. Если $o(a) = p^n$, то между $h^*(p^{n-1}a)$ и $h^*(p^n a) = \infty$ всегда имеется скачок.

Следующая лемма точно описывает, как выглядит индикатор. Напомним, что σ-й инвариант Ульма—Капланского $f_\sigma(A)$ для p-группы A определялся как ранг группы $p^\sigma A[p]/p^{\sigma+1}A[p]$ [мы здесь пишем просто $p^\sigma A[p]$ вместо $(p^\sigma A)[p]$, так как это не может вызвать недоразумений].

Лемма 65.3 (Капланский [3]). *Пусть A — редуцированная p-группа и $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ — строго возрастающая последовательность порядковых чисел. Тогда последовательность* $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n = \infty)$ *является индикатором некоторого элемента $a \in A$ в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие*:

(*) *Если между σ_i и σ_{i+1} имеется скачок, то σ_i-й инвариант Ульма—Капланского группы A отличен от нуля.*

Предположим сначала, что в последовательности (1), построенной для некоторого $a \in A$, имеется скачок между $h^*(p^i a)$ и $h^*(p^{i+1}a)$. Это означает, что существует такой элемент $b \in A$, что $p^{i+1}a = pb$ и $h^*(b) > h^*(p^i a) = \sigma_i$. Элемент $c = p^i a - b$ имеет порядок p и высоту $\min(h^*(p^i a),\ h^*(b)) = \sigma_i$, поэтому

$$p^{\sigma_i}A[p]/p^{\sigma_i+1}A[p] \neq 0,$$

и ранг $f_{\sigma_i}(A)$ этой группы отличен от нуля.

Обратно, пусть последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n = \infty$ удовлетворяет условию (*). Тогда можно выбрать элемент $a_{n-1} \in A[p]$ высоты $\sigma_{n-1} \neq \infty$. Если между σ_{n-2} и σ_{n-1} скачка нет, возьмем такой элемент $a_{n-2} \in A$ высоты σ_{n-2}, что $pa_{n-2} = a_{n-1}$. Если скачок между σ_{n-2} и σ_{n-1} есть, то по условию (*) найдется элемент $b \in A[p]$ высоты σ_{n-2}. Существует элемент $c \in A$, высота которого больше σ_{n-2} и для которого $pc = a_{n-1}$. Теперь элемент $a_{n-2} = b + c$ имеет

высоту σ_{n-2} и $pa_{n-2} = a_{n-1}$. Продолжая далее таким же образом, мы последовательно получим элементы $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ группы A, для которых $pa_i = a_{i+1}$ и $h^*(a_i) = \sigma_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Очевидно, элемент $a = a_0$ имеет индикатор $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \infty)$. ∎

Лемма 65.4 (Бэр [5]). *Пусть A есть p-группа и $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n = \infty)$ — индикатор элемента $a \neq 0$ группы A, причем r_i $(i < n)$ — целые числа. Положим $r_0 = k_1$, и пусть*

$$r_{n_1} = n_1 + k_2, \ \ldots, \ r_{n_{t-1}} = n_{t-1} + k_t, \ r_{n_t} = r_n = \infty$$

— те r_i, перед которыми имеются скачки. Тогда

$$0 < n_1 < \ldots < n_t, \quad 0 \leqslant k_1 < \ldots < k_t$$

и существуют такие элементы $c_1, \ldots, c_t \in A$, что

1) *элементы $c_1, \ldots, c_t$ независимы и $o(c_i) = p^{n_i + k_i}$ $(i = 1, \ldots, t)$;*
2) *$C = \langle c_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_t \rangle$ — прямое слагаемое группы A;*
3) *$a = p^{k_1}c_1 + \ldots + p^{k_t}c_t$.*

Доказательство проведем индукцией по экспоненте $e(a)$ элемента a. Если $e(a) = 1$, то индикатор элемента a имеет вид (k_1, ∞), и утверждение вытекает из следствия 27.2. Пусть $e(a) = m + 1$, и пусть лемма 65.4 верна для элементов экспоненты $\leqslant m$. Неравенства, касающиеся чисел n_i и k_i, очевидны. Рассмотрим элемент $p^{n_{t-1}} a$, имеющий высоту $n_{t-1} + k_t$. Пусть $c_t \in A$ выбрано так, что

$$p^{n_{t-1} + k_t} c_t = p^{n_{t-1}} a.$$

Тогда $\langle c_t \rangle$ — сервантная подгруппа группы A порядка $p^{n_t + k_t}$. Элемент $a' = a - p^{k_t} c_t$ имеет экспоненту $\leqslant n_{t-1} \leqslant m$, и, как легко проверить, его индикатором является $(r_0, r_1, \ldots, r_{n_{t-1}-1}, \infty)$. По предположению индукции для a' существуют элементы $c_1, \ldots, c_{t-1} \in A$ с нужными свойствами. Пересечение подгруппы $\langle c_t \rangle$ с подгруппой $\langle c_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_{t-1} \rangle = C'$ равно нулю, так как элемент $p^{n_t + k_t - 1} c_t$ имеет порядок p и высоту $n_t + k_t - 1$, а в C' таких элементов нет. Подгруппа $C = C' \oplus \langle c_t \rangle$ сервантна в A, так как высота любого элемента цоколя подгруппы C в точности равна минимуму высот его C'- и $\langle c_t \rangle$-координат, т. е. элементы цоколя подгруппы C имеют одинаковую высоту в C и в A. Применение теоремы 27.5 завершает доказательство. ∎

На множестве индикаторов можно следующим образом ввести частичный порядок:

$$H(a) \leqslant H(b), \quad \text{если} \quad h^*(p^i a) \leqslant h^*(p^i b) \quad \text{при} \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

Лемма 65.5. *Пусть A — такая p-группа, что $A^1 = 0$, и пусть $a, b \in A$. Эндоморфизм группы A, отображающий a на b, существует тогда и только тогда, когда $H(a) \leqslant H(b)$.*

Так как при эндоморфизме высота не может уменьшиться, необходимость очевидна. Поэтому предположим, что $H(a) \leqslant H(b)$. По предыдущей лемме элементы a и b можно вложить в прямые слагаемые $C = \langle c_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_t \rangle$ и $D = \langle d_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle d_s \rangle$ группы A соответственно. Достаточно построить гомоморфизм η: $C \to D$, переводящий a в b. Запишем элемент a в виде $a = p^{k_1} c_1 + \ldots + p^{k_t} c_t$ [см. п. 3) леммы 65.4] и, аналогично, запишем

$$b = p^{l_1} d_1 + \ldots + p^{l_s} d_s,$$

где $e(d_j) = m_j + l_j$, $0 < m_1 < \ldots < m_s$, $0 \leqslant l_1 < \ldots < l_s$. Заметим, что

$$\infty = h^* (p^{n_t} a) \leqslant h^* (p^{n_t} b),$$

откуда $p^{n_t} b = 0$, т. е. $n_t \geqslant m_s$. Поэтому можно сделать так, чтобы η переводил c_t в

$$p^{l_j - k_t} d_j + \ldots + p^{l_s - k_t} d_s,$$

где j — наименьший индекс, для которого $n_t \geqslant m_j$ и $k_t \leqslant l_j$ [тогда образ элемента c_t будет иметь экспоненту $\leqslant e(c_t) = n_t + k_t$]. Рассмотрим теперь вместо a и b элементы

$$a' = a - p^{k_t} c_t \quad \text{и} \quad b' = b - p^{l_j} d_j - \ldots - p^{l_s} d_s.$$

Тогда $H(a') \leqslant H(b')$ и по предположению индукции существует гомоморфизм группы $\langle c_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle c_{t-1} \rangle$ в $\langle d_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle d_{j-1} \rangle$, переводящий a' в b'. Этот гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма η: $C \to D$ [где η действует на c_t, как указано выше], при котором a переходит в b. ∎

Следуя Капланскому [3], назовем редуцированную p-группу *вполне транзитивной*, если для любых двух ее элементов a, b, для которых $H(a) \leqslant H(b)$, существует эндоморфизм этой группы, переводящий a в b. Лемма 65.5 утверждает, что сепарабельные p-группы вполне транзитивны.

Кроме сепарабельных групп, класс вполне транзитивных p-групп включает в себя также другие важные классы групп, например класс тотально проективных p-групп.

Упражнения

1. Показать, что произвольная группа сепарабельна тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть сепарабельна.

2. Сервантная подгруппа плотна в группе A тогда и только тогда, когда ее цоколь плотен в A [p]. [О плотности см. также § 66.]

3 (Шарль [4]). Пусть A есть p-группа и $a \in A$, причем $\langle a \rangle \cap A^1 = 0$. Тогда элемент a можно вложить в минимальную сервантную подгруппу группы A и любые две минимальные сервантные подгруппы, содержащие a, изоморфны над $\langle a \rangle$.

4. Показать, что индикаторы элементов сепарабельной p-группы образуют дистрибутивную структуру относительно определенного выше частичного порядка.

5. Описать все возможные индикаторы элементов конечной группы типа $(p^{k_1}, \ldots, p^{k_m})$, где $k_1 < \ldots < k_m$.

6. (а) Доказать лемму 65.5 для автоморфизмов, заменив неравенство на равенство.

(б) Усилить лемму 65.5, заменив условие сепарабельности группы A условием $\langle a \rangle \cap A^1 = 0$.

7* (Капланский [3]). Используя структурную теорию для счетных p-групп, показать, что счетные p-группы вполне транзитивны.

§ 66. Подцоколи

В предыдущих главах нам в некоторых случаях приходилось рассматривать цоколи p-групп; на самом деле некоторые из доказательств существенно опирались на свойства цоколя. Цоколь и его подгруппы играют достаточно важную роль в теории p-групп.

Подгруппа S цоколя $A[p]$ p-группы A называется *подцоколем* группы A. Говорят, что подцоколь S служит *носителем* подгруппы C группы A, если $C[p] = S$. Естественно, мы говорим, что подцоколь S *замкнут*, если $S^- = S$, и *плотен*, если $S^- = A[p]$, где замыкание берется в p-адической топологии. Наконец, мы говорим, что подцоколь S *дискретен*, если $S \cap p^n A = 0$ при некотором n, т. е. высоты элементов из S ограничены в совокупности.

Мы начнем с двух лемм, касающихся цоколей прямых слагаемых.

Лемма 66.1 (Энокс [1]). *Пусть $A = B \oplus C$ есть p-группа и G — такая ее сервантная подгруппа, что $G[p] = B[p]$. Тогда $A = G \oplus C$.*

Очевидно, $G \cap C = 0$ и $G + C$ содержит цоколь группы A. Запишем элемент $a \in A[p]$ в виде $a = b + c$ ($b \in B[p] = G[p]$, $c \in C[p]$); тогда высота элемента a в $G + C$ больше или равна $\min(h(b), h(c))$, а последнее число равно высоте элемента a в группе A. Следовательно, подгруппа $G + C$ сервантна в A и, таким образом, $G + C = A$. ∎

Заметим, что из леммы 66.1 следует, что *если цоколь некоторого прямого слагаемого служит носителем сервантной подгруппы, то эта подгруппа является прямым слагаемым, изоморфным исходному.*

Лемма 66.2 (Кроули [4]). *Пусть*

$$A = U \oplus V \oplus W = B \oplus C$$

— такая p-группа, что

$$U[p] \subseteq B[p] \subseteq U[p] \oplus V[p].$$

Тогда существует такая подгруппа B^* группы B, что $B^*[p] = V[p] \cap B[p]$, B^* изоморфна подгруппе группы V и

$$A = U \oplus B^* \oplus C.$$

Проекция группы A на B изоморфно отображает подгруппу U на такую подгруппу B' группы B, что $B'[p] = U[p]$. Очевидно, подгруппа B' сервантна в B, а значит, и в A, поэтому лемма 66.1 дает $A = B' \oplus V \oplus W$. Следовательно, $B = B' \oplus B^*$, где $B^* = (V \oplus W) \cap B$. В силу предположений относительно $B[p]$ справедливо равенство $B^*[p] = V[p] \cap B[p]$. Теперь из $B^* \cap W = 0$ следует, что подгруппа B^* изоморфна подгруппе группы V. Наконец, применение леммы 66.1 дает $A = B' \oplus B^* \oplus C = U \oplus B^* \oplus C$. ∎

Один из основных вопросов, касающихся подцоколей,— определить, какие из них служат носителями сервантных подгрупп. Если подцоколь дискретен, то очевидно, что он — носитель сервантной подгруппы, но для произвольных подцоколей это не так [см. упр. 9]. Однако, для плотных подцоколей верен следующий результат.

Теорема 66.3 (Хилл и Меджиббен [3]). *Пусть S — плотный подцоколь p-группы A. Тогда существует подгруппа C группы A, максимальная относительно свойства $C[p] = S$; она сервантна и плотна в A.*

Существование подгруппы C с нужным свойством сразу следует из леммы Цорна. Докажем по индукции, что $C \cap p^nA \subseteq p^nC$. Пусть $n = 1$, и пусть $pa = c \in C$, где $a \in A$. Если $a \notin C$, то в силу максимальности подгруппы C существует элемент $b \in \langle C, a\rangle$ порядка p, не лежащий в S. Пусть $b = -c' + ka$ для некоторого $c' \in C$ и некоторого целого числа k $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$, которое без ограничения общности можно предположить равным 1. Тогда $pc' = p(a-b) = pa = c$. Предположим теперь, что $C \cap p^nA \subseteq p^nC$ при некотором $n \geqslant 1$, и пусть для $a \in A$ имеет место включение $p^{n+1}a \in C$. По доказанному $p^{n+1}a = pc$ при некотором $c \in C$. Из плотности S в $A[p]$ и включения $p^na - c \in A[p]$ вытекает существование такого $d \in S$, что $p^na - c - d \in p^nA$. По предположению индукции для некоторого $c_1 \in C$ имеем $p^nc_1 = c + d$. Следовательно, $p^{n+1}c_1 = pc = p^{n+1}a$, и сервантность подгруппы C доказана.

Из теоремы 28.1 мы знаем, что в смежных классах, являющихся элементами порядка p группы A/C, могут быть выбраны в качестве представителей элементы порядка p группы A. Из плотности S следует, что элементы порядка p группы A/C имеют бесконечную высоту в A/C. Следовательно, A/C — делимая группа [см. § 20, п. В)] и подгруппа C плотна в A. ∎

Сервантные подгруппы, имеющие один и тот же цоколь, не обязаны быть изоморфными. Более того, имеет место

Теорема 66.4 (Хилл и Меджиббен [3]). *Пусть A — редуцированная p-группа мощности континуума $\mathfrak{c}$ со счетной базисной подгруппой.*

Если S — такой собственный плотный подцоколь группы A, что $|S| = \mathfrak{c}$, то S — носитель $2^{\mathfrak{c}}$ попарно неизоморфных сервантных подгрупп группы A.

Из предположений следует, что группа A неограниченная. В силу теоремы 66.3 существует сервантная подгруппа C, максимальная среди тех, для которых S служит носителем. Подгруппа C также имеет счетную базисную подгруппу [так как эта последняя расширяется до базисной подгруппы группы A], откуда сразу же следует, что $pC \cap S$ имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$. Поэтому можно выбрать такую независимую систему $L = \{c_i\}_{i \in I}$ элементов c_i ($\in C$) порядка p^2, что $|I| = \mathfrak{c}$. По предположению существует элемент $b \in A[p] \setminus S$. Построим $2^{\mathfrak{c}}$ систем $L' = \{c'_i\}_{i \in I}$, полагая $c'_i = c_i$ или $c'_i = c_i + b$ для каждого $i \in I$. Так как цоколь подгруппы $\langle L' \rangle$ содержится в S, то существует подгруппа C' группы A, содержащая L' и максимальная относительно свойства $C'[p] = S$. По теореме 66.3 подгруппа C' сервантна. Таким способом для каждой системы L' мы можем найти сервантную подгруппу C', содержащую L' и имеющую цоколь S.

Если L' и L'' — различные системы указанного выше вида, то соответствующие сервантные подгруппы C' и C'' различны, так как ни при каком i элементы c_i и $c_i + b$ не могут одновременно принадлежать подгруппе с цоколем S. Поэтому A содержит [не менее] $2^{\mathfrak{c}}$ различных сервантных подгрупп C' с цоколем S.

В силу счетности базисной подгруппы B' группы C' группа $\mathrm{Hom}(B', A) = \prod_n \prod A[p^n]$ имеет мощность $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Мощность континуума является верхней гранью для мощностей групп $\mathrm{Hom}(C', A)$, как легко следует из рассмотрения точной последовательности

$$0 = \mathrm{Hom}(C'/B', A) \to \mathrm{Hom}(C', A) \to \mathrm{Hom}(B', A).$$

Это показывает, что среди наших групп C' имеется не больше $\mathfrak{c}$ изоморфных между собой. Следовательно, множество не изоморфных между собой групп C' имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$. ∎

Легко проверить, что предыдущее доказательство (принадлежащее Катлеру и Уинтропу [1]) переносится на любую редуцированную p-группу A мощности $|A| = 2^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n}$ — мощность базисной подгруппы B группы A. Конечно, $\mathfrak{c}$ в теореме 66.4 тогда должно быть заменено на $|A|$, а в заключительной части доказательства нужно использовать обобщенную гипотезу континуума, чтобы можно было утверждать, что $2^{|B|} < 2^{|C|}$.

Непосредственным следствием теоремы 66.4 является результат Лептина [1]: *существует $2^{\mathfrak{c}}$ попарно неизоморфных p-групп без элементов бесконечной высоты, мощность которых равна* $\mathfrak{c}$; более того, при этом можно предполагать, что все эти группы имеют базисную подгруппу $\bigoplus_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$.

Упражнения

1 (Хилл и Меджиббен [1]). Если плотный подцоколь служит носителем слабо сервантной подгруппы, то эта подгруппа сервантна.

2. Если всякий замкнутый подцоколь — носитель сервантной подгруппы, то это же верно для любого подцоколя.

3. Пусть A — прямая сумма циклических и квазициклических p-групп. Тогда всякий подцоколь группы A — носитель сервантной подгруппы.

4. Провести в деталях доказательство утверждения, приведенного после доказательства теоремы 66.4.

5* (Хилл и Меджиббен [1]). Доказать, что существует $2^{\mathfrak{c}}$ неизоморфных сепарабельных p-групп A с одной и той же базисной подгруппой B, таких, что $|A| = \mathfrak{c}$ и $\overline{B}/A \cong Z(p^{\infty})$. [О группе $\overline{B}$ см. § 68.]

6*. Пусть $\mathfrak{m}$ — такое кардинальное число, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}^{\aleph_0}$ для некоторого кардинального числа $\mathfrak{n}$. Тогда существует $2^{\mathfrak{m}}$ неизоморфных сепарабельных p-групп мощности $\mathfrak{m}$. [*Указание*: использовать теорему 66.4 и следствие 68.2.]

7. (а) Если цоколи двух сервантных подгрупп некоторой p-группы совпадают, то эти группы имеют изоморфные базисные подгруппы.

(б) В прямой сумме циклических p-групп любые две сервантные подгруппы с одинаковыми цоколями изоморфны.

8* (Хилл [2]). Привести пример сепарабельной p-группы, содержащей неизоморфные сервантные подгруппы с одинаковыми цоколями. [*Указание*: пусть

$$B' = \bigoplus_n \langle a_{2n-1} \rangle, \qquad B'' = \bigoplus_n \langle a_{2n} \rangle$$

где $o(a_k) = p^{2k}$, и пусть $C = \bigoplus_n \langle a_{2n-1} + pa_{2n} \rangle$; тогда в периодически полной группе $\overline{B}' \oplus \overline{B}''$ [см. § 68] подгруппы $G = B' \oplus \overline{B}''$ и $H = \overline{C} + B''$ имеют одинаковые цоколи; предположив, что существует изоморфизм $G \to H$, получить в группе G элемент, переходящий в элемент, не лежащий в H.]

9 (Меджиббен [1]). Показать, что подцоколь сепарабельной p-группы может не быть носителем сервантной подгруппы. [*Указание*: $\overline{B}''[p]$ в группе H из упр. 8.]

10 (Ирвин и Сванек [1]). (а) Если G — сервантная подгруппа p-группы A и $A[p]/G[p]$ — носитель сервантной подгруппы группы $A/G[p]$, то G служит для A прямым слагаемым. [*Указание*: если $K/G[p]$ — сервантная подгруппа с цоколем $A[p]/G[p]$, то $K = G[p] \oplus H$ для некоторого H и $A = G \oplus H$.]

(б) Пусть $0 \to G \to C \to A \to 0$ — сервантно проективная резольвента p-группы A, причем A не является прямой суммой циклических групп. Тогда $C[p]/G[p]$ не служит носителем сервантной подгруппы группы $C/G[p]$.

11 (Дьёдонне [2]). Пусть $C=\prod_{k=1}^{\infty}\langle c_k\rangle$, где $o(c_k)=p$, и пусть $C_n=$ $=\prod_{k>n}^{\infty}\langle c_k\rangle$. Для каждого элемента $x\in c_n+C_n$, $x\neq 0$, возьмем образующий a_{ni} и положим $p^n a_{ni}=x$. Обозначим через A группу, порожденную группой C и всеми элементами a_{ni} $(n=1, 2, \ldots)$. Показать, что

(а) a_{ni} имеет в группе A порядок p^{n+1};

(б) C — такая подгруппа группы A, что A/C — прямая сумма циклических групп;

(в) всякий ненулевой элемент x в c_n+C_n имеет высоту n и группа A не содержит элементов бесконечной высоты;

(г) если S — любая подгруппа, высоты элементов которой ограничены в совокупности, то $S\cap C$ — конечная группа;

(д) группа A не является прямой суммой циклических групп. [*Указание*: использовать теорему 17.1 и получить противоречие с п. (г).]

§ 67. Вполне характеристические и широкие подгруппы

Напомним, что подгруппа G группы A называется *вполне характеристической* [*характеристической*], если всякий эндоморфизм [автоморфизм] группы A переводит подгруппу G в себя. Очевидно, вполне характеристические подгруппы являются характеристическими, но обратное неверно, как показывают примеры соответствующих 2-групп [и групп без кручения].

Пример (Капланский [3]). Пусть $A=\langle a_1\rangle\oplus\langle a_2\rangle\oplus\langle a_3\rangle$, где $o(a_i)=$ $=2^i$. Рассмотрим подгруппу G, порожденную всеми такими элементами $g\in A$, что

$$o(g)=4,\quad h(g)=0\quad \text{и}\quad h(2g)=2.$$

Все такие элементы g легко перечислить: это $a_1+2a_2\pm 2a_3$ и $a_1\pm 2a_3$. Всякий автоморфизм группы A переводит образующий группы G в образующий. Следовательно, G — характеристическая подгруппа. Но она не вполне характеристическая, так как $a_1\notin G$, а проекция $A\to\langle a_1\rangle$ отображает G на $\langle a_1\rangle$.

Полного описания вполне характеристических подгрупп p-групп до сих пор нет, но в ряде частных случаев такое описание возможно (см. Бэр [3], Шиффман [1] и Капланский [3]). Эти частные случаи охватывают наиболее важные классы p-групп, как, например, сепарабельные p-группы и тотально проективные p-группы.

Чтобы описать вполне характеристические подгруппы в некоторых p-группах, введем в рассмотрение возрастающие последовательности порядковых чисел и символов ∞

$$\mathbf{u}=(\sigma_0,\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n,\ \ldots).$$

С последовательностью $\mathbf{u}$ связана подгруппа

$$A(\mathbf{u})=A(\sigma_0,\ \ldots,\ \sigma_n,\ \ldots)=\{a\in A\mid H(a)\geqslant\mathbf{u}\}\qquad(1)$$

группы A; очевидно, это вполне характеристическая подгруппа. Заметим, что

А) $A(\mathbf{u}) = \bigcap_n p^{-n}(p^{\sigma_n}A)$;

Б) если $A = \oplus A_i$, то $A(\mathbf{u}) = \oplus A_i(\mathbf{u})$;

В) при любом гомоморфизме $A \to C$ подгруппа $A(\mathbf{u})$ отображается в $C(\mathbf{u})$;

Г) $A(\mathbf{u} \cap \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})$, где $\mathbf{u} \cap \mathbf{v}$ строится путем взятия покомпонентного минимума.

Скажем, что последовательность $\mathbf{u}$ удовлетворяет *условию на скачки*, если между σ_n и σ_{n+1} скачок может встретиться только тогда, когда в группе A имеется элемент порядка p и высоты σ_n, т. е., иными словами, когда $f_{\sigma_n}(A) \neq 0$.

Теорема 67.1 (Капланский [3]). *Пусть A — вполне транзитивная p-группа. Подгруппа G группы A является вполне характеристической тогда и только тогда, когда она имеет вид* (1), *где последовательность* $\mathbf{u}$ *удовлетворяет условию на скачки. Всякая вполне характеристическая подгруппа G представляется в указанном виде единственным образом.*

Очевидно, всякая подгруппа G вида (1) является вполне характеристической.

Предположим, обратно, что G — вполне характеристическая подгруппа, и определим σ_n как минимум высот $h^*(p^n g)$, где g пробегает всю группу G. Последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$, очевидно, является возрастающей. Чтобы проверить, что выполнено условие на скачки, предположим, что $\sigma_i + 1 < \sigma_{i+1}$ для некоторого i. Существует элемент $g \in G$, для которого $h^*(p^i g) = \sigma_i$, и по определению $h^*(p^{i+1}g) \geqslant \geqslant \sigma_{i+1}$. По лемме 65.3 группа A содержит элемент порядка p и высоты σ_i.

Включение $G \subseteq A(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots)$ очевидно. Для каждого n установим существование такого элемента $g \in G$, что $h^*(p^i g) = \sigma_i$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Если в последовательности $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ скачков нет и $g \in G$ — такой элемент, что $h^*(p^{n-1}g) = \sigma_{n-1}$, то должно быть $h^*(p^i g) = \sigma_i$ при $i = 0; 1, \ldots, n-1$. Если последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ содержит скачки и если первый скачок встречается между σ_{j-1} и σ_j, то существует такой элемент $g_j \in G$, что $h^*(p^i g_j) = \sigma_i$ при $i = 0, 1, \ldots, j-1$. Если следующий скачок лежит между σ_{k-1} и σ_k $(j < k)$, то существует $g' \in G$, для которого $h^*(p^i g') = \sigma_i$ при $i = j, \ldots, k-1$. По лемме 65.3 существует такой элемент $g_k \in A$, что $h^*(p^i g_k) \geqslant \max(h^*(p^i g'), \sigma_i + 1)$ при $i = 0, 1, \ldots, j-1$ и $h^*(p^i g_k) = h^*(p^i g')$ при $i \geqslant j$. Так как группа A вполне транзитивна, то $g_k \in G$. Продолжая таким же образом, мы для всех скачков в последовательности $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ построим такие элементы $g_j, g_k, \ldots, g_l \in G$, что для элемента $g = g_j + g_k + \ldots + g_l$ будет выполняться равенство $h^*(p^i g) = \sigma_i$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $H(g) \leqslant H(a)$ для любого элемента $a \in A(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots)$,

порядок которого не больше n. Так как группа A вполне транзитивна, $a \in G$, т. е. G имеет вид (1).

Если $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots)$ и $(\sigma_0', \sigma_1', \ldots, \sigma_n', \ldots)$ — различные последовательности, удовлетворяющие условию на скачки, то пусть n — первый индекс, для которого $\sigma_n \neq \sigma_n'$, скажем $\sigma_n < \sigma_n'$. Существует такой элемент $a \in A(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots)$, что $h^*(p^i a) = \sigma_i$ при $i = 0, 1, \ldots, n$. Этот элемент a принадлежит $A(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots)$, но не $A(\sigma_0', \sigma_1', \ldots, \sigma_n', \ldots)$, что доказывает единственность. ∎

Существует один тип вполне характеристических подгрупп p-групп, представляющий особый интерес.

Следуя Пирсу [1], назовем вполне характеристическую подгруппу G произвольной p-группы A *широкой*, если

$$G + B = A \text{ для любой базисной подгруппы } B \text{ группы } A.$$

Очевидно, справедливы следующие утверждения:

а) 0 является широкой подгруппой тогда и только тогда, когда группа A ограниченная.

б) Всякая вполне характеристическая подгруппа ограниченной группы является широкой.

в) $p^n A$ при любом n — широкая подгруппа группы A.

г) Если G — широкая подгруппа группы A, то $p^n G$ при любом n — также широкая подгруппа. [Чтобы это показать, нам нужно только проверить, что $p^n G + B = A$, а это следует из равенств $A = p^n A + B = p^n (G + B) + B$.]

Верен также следующий менее тривиальный результат:

д) *A^1 содержится во всякой широкой подгруппе группы A.*

Если $a \in A^1$ и G — широкая подгруппа группы A, то пусть $a = b + g$, где $b \in B$, $g \in G$. Вложим b в конечное прямое слагаемое B' группы B и запишем $A = B' \oplus A'$. Если $\pi\colon A \to A'$ — проекция, связанная с последним разложением, то $\pi b = 0$ дает $\pi a = \pi g \in G$, так как G — вполне характеристическая подгруппа. Но $(1 - \pi) a = 0$ как элемент бесконечной высоты в B'. Следовательно, $a = \pi g \in G$, что и требовалось.

Наша главная задача — выделить широкие подгруппы среди вполне характеристических подгрупп. Следующее условие на подгруппу G, называемое *условием Пирса*, является основным:

(*) *Для любого неотрицательного целого числа k существует такое целое число $n \geqslant 0$, что если $a \in A$, $e(a) \leqslant k$ и $h(a) \geqslant n$, то $a \in G$; иными словами,*

$$p^n A[p^k] \subseteq G.$$

Используя это условие, докажем следующее утверждение:

Теорема 67.2 (Пирс [1]). *Для вполне характеристической подгруппы G редуцированной p-группы A эквивалентны такие условия:*

1) *G — широкая подгруппа группы A;*

2) *$G = A(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$, где r_n — неотрицательные целые числа или символы ∞, причем ∞ не встречается, если группа A не является ограниченной;*

3) *для подгруппы G выполнено условие Пирса.*

Предположим, что подгруппа G удовлетворяет условию 1). В силу п. б) и теоремы 67.1 для проверки справедливости условия 2) достаточно рассмотреть случай, когда группа A неограниченная. В этом случае группа A обладает базисной подгруппой $B \neq A$, а так как в силу п. г) при любом n имеет место равенство $p^nG + B = A$, то $p^nG \neq 0$ при каждом n. Следовательно, если группа A сепарабельна, то $r_n = \min_{g \in G} h(p^n g) < \omega$ для любого n. Если группа A не сепарабельна, то аналогичным образом получаем, что $p^nG \supset A^1$, откуда снова $r_n < \omega$ при любом n. Следовательно, $G \subseteq A(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$. Чтобы установить равенство [даже если группа A не вполне транзитивна], выберем, если это возможно, элемент $a \in A(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$, не лежащий в G. Прибавив, если нужно, к элементу a элемент из A^1, мы получим $H(a) = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n = \infty)$, где $s_0, \ldots, s_{n-1} < \omega$. Так как $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ — конечные порядковые числа, можно, как в доказательстве теоремы 67.1, построить элемент $g \in G$, для которого $H(g) = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, \infty)$. Так как $s_i \geqslant r_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, то из очевидного обобщения леммы 65.5 и того факта, что G — вполне характеристическая подгруппа, следует, что $a \in G$. Таким образом, условие 1) влечет за собой 2).

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 2). Чтобы проверить справедливость условия 3), мы можем снова рассматривать лишь неограниченные группы A. Для данного k положим $n = r_{k-1} - k + 1$. Тогда ни одно из чисел $r_{k-2} - k + 2$, $r_{k-3} - k + 3, \ldots, r_0$ не будет превосходить n. Поэтому если для элемента $a \in A$ выполнено $e(a) \leqslant k$, $h(a) \geqslant n$, то $h^*(p^i a) \geqslant n + i \geqslant r_i$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$ и $h^*(p^i a) = \infty$ при $i \geqslant k$. Следовательно, $H(a) \geqslant (r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$ и $a \in G$.

Наконец, пусть выполнено условие 3). Нам нужно доказать, что $G + B = A$ для базисной подгруппы B группы A. Пусть $a \in A$ и $e(a) = k$. Выберем число n, соответствующее этому k в условии Пирса. Из делимости группы A/B следует, что $a = b + p^n c$ для некоторых $b \in B$, $c \in A$. Можно предположить, что здесь b удовлетворяет условию $e(b) \leqslant k$, так как $0 = p^k a = p^k b + p^{n+k} c$ влечет за собой $p^k b = p^{n+k} b'$ для некоторого $b' \in B$, и равенство $a = (b - p^n b') + p^n(b' + c)$ показывает, что элемент b можно заменить элементом $b - p^n b'$ экспоненты $\leqslant k$. Но тогда также $e(p^n c) \leqslant k$, откуда $p^n c \in G$ по условию 3). Это доказывает равенство $G + B = A$. ∎

Заметим, что условие 2) эквивалентно условию

$$G = \bigcap_n p^{-n}(p^{r_n} A). \tag{2}$$

Чтобы выяснить значение условия Пирса, докажем

Предложение 67.3 (Пирс [1]). *Подгруппа редуцированной p-группы A удовлетворяет условию Пирса тогда и только тогда, когда она содержит широкую подгруппу группы A.*

Опять представляет интерес только случай, когда группа A неограниченная. В одну сторону утверждение очевидно, так что нам нужно только доказать, что если подгруппа G удовлетворяет условию Пирса, то она содержит широкую подгруппу группы A. По предположению существует такая последовательность $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k \leqslant \ldots$ натуральных чисел, что из $e(a) \leqslant k$, $h(a) \geqslant n_k$ следует $a \in G$. Так как A — неограниченная группа, существует возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $r_0, r_1, \ldots, r_k, \ldots$, удовлетворяющая условию на скачки из леммы 65.3 и, кроме того, такая, что $r_i \geqslant n_{i+1} + i$ при $i = 0, 1, \ldots$. Докажем индукцией по экспоненте k элемента $a \in A(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$, что $A(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots) \subseteq G$. Если $k = 0$, то $a = 0 \in G$. Пусть $k \geqslant 1$. Так как $h(p^{k-1}a) \geqslant r_{k-1}$, то для некоторого $b \in A$ выполнено $p^{r_{k-1}}b = p^{k-1}a$. Теперь $c = p^{r_{k-1}-k+1}b \in G$, так как $e(c) = k$ и $h(c) \geqslant r_{k-1} - k + 1 \geqslant n_k$. Из того, что $p^{k-1}(a - c) = 0$ и

$$h(p^i(a-c)) \geqslant \min(r_i, r_{k-1} - k + 1 + i) = r_i \ (i = 0, \ldots, k-2)$$

следует, что элемент $a - c$ имеет экспоненту $<k$ и содержится в $A(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$, так что $a - c \in G$ по предположению индукции. Поэтому $a \in G$, что и требовалось. ∎

Заслуживает упоминания следующий интересный факт, касающийся широких подгрупп.

Предложение 67.4. *Если G — широкая подгруппа p-группы A, то A/G — прямая сумма циклических групп.*

Так как $G + B = A$ для любой базисной подгруппы B группы A, то $A/G \cong B/(G \cap B)$. Пусть $B = \bigoplus_{i \in I} \langle b_i \rangle$. Заметим, что при проектировании группы A на ее прямое слагаемое $\langle b_i \rangle$ подгруппа G отображается на $G \cap \langle b_i \rangle$, откуда $G \cap B = \bigoplus_{i \in I} (G \cap \langle b_i \rangle)$ [ср. лемму 9.3]. Отсюда следует, что группа $B/(G \cap B)$ изоморфна прямой сумме групп $\langle b_i \rangle / (G \cap \langle b_i \rangle)$, $i \in I$. ∎

Упражнения

1. (а) Вполне характеристические [характеристические] подгруппы периодических групп являются прямыми суммами вполне характеристических [характеристических] p-подгрупп.

(б) Найти вполне характеристические [характеристические] подгруппы периодической делимой группы.

2. (а) В p-группе A единственными сервантными вполне характеристическими подгруппами являются 0, A и максимальная делимая подгруппа.

(б) Если G — сервантная, а A ($\mathbf{u}$) — широкая подгруппа группы A, то

$$G(\mathbf{u}) = G \cap A(\mathbf{u}).$$

3. Пусть A — сепарабельная p-группа и $a \in A$. Представить минимальную вполне характеристическую подгруппу группы A, содержащую элемент a, в виде (1).

4 (Капланский [3]). Пусть G — вполне характеристическая подгруппа вполне транзитивной p-группы A. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) существует такое счетное подмножество X, что G — минимальная вполне характеристическая подгруппа, содержащая X;

(б) если существует конечное подмножество X с указанным выше свойством, то существует и подмножество с тем же свойством, состоящее из одного элемента.

5. (а) Привести пример, где $A(\mathbf{u}) = A(\mathbf{v})$, но $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

(б) Показать, что если $A(\mathbf{u}) = A(\mathbf{v})$ и в $\mathbf{u}$ выполнено условие на скачки, то $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{v}$.

(в) Представить в виде (1) следующие вполне характеристические подгруппы группы A: 0, A^σ, $p^n A^\sigma$, $A[p^k]$, $p^\sigma A[p^k]$, $p^{-m}(p^\sigma A[p^k])$, где σ — порядковое число.

6* (Меджиббен [5]). Доказать, что следующая группа не вполне транзитивна: $A = G \oplus H$, где $G^1 \cong H^1 \cong Z(p)$, G/G^1 — периодически полная группа, а H/H^1 — прямая сумма циклических групп. [*Указание*: показать, что G^1 — вполне характеристическая подгруппа группы A, используя для этого тот факт, что всякий гомоморфизм $G/G^1 \to H/H^1$ является малым (см. § 69, упр. 6).]

7. (а) Определить число вполне характеристических подгрупп и длину максимальной цепочки вполне характеристических подгрупп ограниченной p-группы.

(б) Сделать то же самое для неограниченной сепарабельной p-группы.

8. Пусть A — вполне транзитивная p-группа.

(а) Найти представление в виде (1) объединения и пересечения семейства вполне характеристических подгрупп G_i $(i \in I)$ группы A, представленных в виде (1). [*Указание*: действовать покомпонентно и постараться получить возрастающую последовательность.]

(б) Показать, что вполне характеристические подгруппы образуют полную дистрибутивную подструктуру в структуре всех подгрупп группы A.

9. В неограниченной сепарабельной p-группе вполне характеристическая подгруппа является широкой тогда и только тогда, когда она неограниченная.

10. Широкие подгруппы образуют подструктуру [но не всегда полную подструктуру] структуры всех вполне характеристических подгрупп.

11. Показать, что широкая подгруппа $G = A(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$ группы A может быть представлена в виде

$$G = \sum_n p^{r_n - n} A[p^{n+1}] = \sum_n p^{r_n - n} A[p^{r_n + 1}].$$

12 (Пирс [1]). Пусть B — базисная подгруппа p-группы A, отличная от A. Если G — вполне характеристическая подгруппа группы A и $G + B = A$, то G — широкая подгруппа группы A.

13 (Пирс [1]). Если $\alpha: A \to C$ — гомоморфизм и G — широкая подгруппа группы C, то $\alpha^{-1}G$ содержит широкую подгруппу группы A.

14 (Пирс [1]). Если G — широкая подгруппа сепарабельной p-группы A, а B — базисная подгруппа группы A, то $G \cap B$— базисная подгруппа группы G. [*Указание*: для доказательства сервантности показать, что справедливо равенство $B \cap pG = p(B \cap G)$, и использовать п. (г).]

15 (Пирс [1]). Широкая подгруппа широкой подгруппы группы A сама является широкой подгруппой группы A.

16. Гомоморфизм $\varphi: A \to C$ является малым (см. § 46) тогда и только тогда, когда $\ker \varphi$ содержит широкую подгруппу группы A.

§ 68. Периодически полные группы

Если не считать прямые суммы циклических p-групп, наиболее важным классом сепарабельных p-групп является класс так называемых периодически полных групп. Впервые эти группы стал изучать Куликов [2] [он называл их *замкнутыми p-группами*]. Эти группы можно легко описать с помощью инвариантов, являющихся кардинальными числами, и они играют фундаментальную роль при изучении p-групп, поскольку всякая сепарабельная p-группа является сервантной и плотной подгруппой некоторой периодически полной p-группы.

В этом параграфе мы будем придерживаться следующих обозначений: через B_n будем обозначать прямую сумму циклических групп порядка p^n, скажем, $B_n = \bigoplus_{\mathfrak{m}_n} Z(p^n)$, а через B обозначим прямую сумму $\bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$.

Периодически полной p-группой называется периодическая часть $T(\hat{B})$ p-адического пополнения $\hat{B}$ прямой суммы B циклических p-групп. Группа $T(\hat{B})$ однозначно определяется группой B, поэтому ее можно обозначить через $\bar{B}$. Этим обозначением мы все время будем пользоваться:

$$\bar{B} = T(\hat{B}).$$

Группа, полная в своей p-адической топологии, является p-адическим пополнением любой своей базисной подгруппы, так что периодически полная p-группа имеет вид $\bar{B}$ для любой из своих базисных подгрупп B.

Так как $\hat{B}$ — подгруппа группы $\prod_n B_n$, то и $\overline{B}$ является подгруппой этой группы. Следовательно, элементы $g \in \overline{B}$ однозначно записываются в виде

$$g = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots), \quad \text{где} \quad b_n \in B_n. \tag{1}$$

Естественно, элемент b_n можно отождествить с бесконечным вектором $(0, \ldots, 0, b_n, 0, \ldots)$. Порядок p^m элемента g равен н. о. к. порядков элементов $b_1, \ldots, b_n, \ldots$; значит, последовательность координат элемента $g \in \overline{B}$ является ограниченной. В силу строения групп B_n для любой ограниченной последовательности $\{b_n\}$ [скажем, такой, что $p^m b_n = 0$ для всех n] мы имеем $h(b_n) \geqslant n - m$. Следовательно, для элемента g вида (1) верно неравенство $h(g - b_1 - \ldots - b_{n-1}) \geqslant \geqslant n - m$, откуда $g \in \hat{B}$. Таким образом, (1) задает элемент g из $\overline{B}$ тогда и только тогда, когда последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ограниченная. Группу $\overline{B}$ удобно рассматривать как множество всех ограниченных последовательностей вида (1).

Все ограниченные p-группы являются примерами периодически полных p-групп. Простейший пример неограниченной периодически полной p-группы получится, если мы возьмем $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle$, где $\langle a_n \rangle$ — циклическая группа порядка p^n. Тогда элементы группы $\overline{B}$ будут иметь вид $b = (k_1 a_1, \ldots, k_n a_n, \ldots)$, где $k_n \in \mathbf{Z}/(p^n)$ и существует такое число $m \geqslant 0$, что $p^m k_n a_n = 0$ для всех n.

Из определения можно легко вывести такие утверждения:

а) *B — базисная подгруппа группы $\overline{B}$.* В самом деле, в силу следствия 39.6 подгруппа B является базисной в $\hat{B}$, а значит, и в $T(\hat{B})$, так как $T(\hat{B})$ — сервантная подгруппа группы $\hat{B}$.

б) *Две периодически полные p-группы $\overline{B}$ и $\overline{B}'$ изоморфны тогда и только тогда, когда их базисные подгруппы B и B' изоморфны.* Необходимость этого тривиальным образом следует из а) и единственности (с точностью до изоморфизма) базисных подгрупп.

в) *$\overline{B} = B$ тогда и только тогда, когда группа B ограниченная.* Если B — ограниченная группа, то $\hat{B} = B$ и, следовательно, $\overline{B} = B$, а если B — неограниченная группа, то группа $\hat{B}$ содержит элементы конечного порядка, не лежащие в B.

г) $\overline{B \oplus B'} = \overline{B} \oplus \overline{B'}$. Это легко следует из определения.

Основным следствием п. (б) является то, что последовательность $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n, \ldots$ кардинальных инвариантов группы B является в то же время *полной (и независимой) системой инвариантов группы $\overline{B}$.* Это сразу выясняет строение периодически полных p-групп.

Выясним связь между произвольными p-группами A и периодически полными p-группами. Пусть $B = \bigoplus_n B_n$ [см. введенное выше обо-

значение] — базисная подгруппа группы A. Следуя теореме 32.4, напишем $B_n^* = B_{n+1} \oplus B_{n+2} \oplus \ldots$ и положим $A_n = B_n^* + p^n A$. Тогда $A_{n+1} \subseteq A_n$ для любого n, и мы получаем последовательность прямых разложений

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где каждое разложение получается из предыдущего путем расщепления последнего слагаемого. Поэтому для всякого $a \in A$ существует такая последовательность элементов $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ $(b_n \in B_n)$, что $a = b_1 + \ldots + b_n + a_n$ при некотором $a_n \in A_n$ для любого n. Это порождает соответствие

$$\eta\colon a \mapsto (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \quad (b_n \in B_n), \tag{3}$$

очевидно, являющееся гомоморфизмом группы A в $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$. Ясно, что порядок элемента a служит верхней границей для порядков элементов $b_1, \ldots, b_n, \ldots$. Это означает, что η можно рассматривать как гомоморфизм группы A в $\bar{B}$. Отображение η, по существу, оставляет элементы из B на месте, так как $\eta b_n = (0, \ldots, 0, b_n, 0, \ldots)$. Из сепарабельности группы $\bar{B}$ следует, что $A^1 \subseteq \operatorname{Ker} \eta$. С другой стороны, если $\eta a = 0$, то $a = a_n \in A_n$ при любом n, откуда $h(a) = h(a_n) \geqslant n + 1 - e(a)$ для всякого n, т. е. $h(a) = \infty$, и $a \in A^1$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \eta = A^1$.

Теорема 68.1. *Пусть B — базисная подгруппа p-группы A. Тогда отображение η, определенное с помощью формулы* (3), *является гомоморфным отображением группы A на сервантную подгруппу группы $\bar{B}$, содержащую B; ядро отображения η совпадает с A^1.*

Нужно проверить только сервантность ηA в $\bar{B}$. Согласно п. Е) § 34, подгруппа ηB является базисной подгруппой группы ηA, так что $\eta A / \eta B$ — делимая группа. Следовательно, подгруппа ηA сервантна в $\bar{B}$. ∎

Следствие 68.2 (Куликов [2]). *Сепарабельная p-группа A с базисной подгруппой B изоморфна сервантной* [*и плотной*] *подгруппе группы $\bar{B}$, содержащей B.* ∎

В силу этого результата сепарабельные p-группы могут и во многих случаях будут отождествляться с сервантными и плотными подгруппами периодически полных p-групп.

Прервем ненадолго изложение и докажем следующее полезное обобщение теоремы 17.3.

Предложение 68.3. *Пусть A — сепарабельная p-группа, а B — ее базисная подгруппа. Если A/B — счетная группа, то A — прямая сумма циклических групп.*

Группу A можно считать сервантной подгруппой группы $\bar{B}$. В A существует счетное множество элементов $a_1, \ldots, a_m, \ldots$, которое вместе с B порождает группу A. Как и в (1), мы можем написать $a_m = (b_{m1}, \ldots, b_{mn}, \ldots)$, где $b_{mn} \in B_n$. Каждая группа B_n является прямой суммой циклических групп порядка p^n, поэтому существует такое прямое разложение $B_n = B'_n \oplus B''_n$, что $b_{mn} \in B'_n$ при любом m и B'_n — счетная группа. Полагая $B' = \bigoplus_n B'_n$, получаем $B = B' \oplus B''$ и $A = A' \oplus B''$, где $A' = \langle B', a_1, \ldots, a_m, \ldots \rangle$. Группа A' здесь счетна и по теореме 17.3 является прямой суммой циклических групп. ∎

В следующей теореме даются различные алгебраические характеризации периодически полных групп.

Теорема 68.4. *Для редуцированной p-группы A эквивалентны следующие условия:*

1) *A — периодически полная группа;*

2) *A — периодическая часть алгебраически компактной группы;*

3) *группа A сервантно инъективна в классе p-групп, т. е. группа A инъективна относительно всех сервантно точных последовательностей p-групп;*

4) *группа A служит прямым слагаемым для всякой p-группы, в которой она содержится в качестве сервантной подгруппы.*

Доказательство будем вести по циклу. 1) влечет за собой 2), так как $\hat{B}$ — алгебраически компактная группа.

Пусть теперь A — периодическая часть алгебраически компактной группы C. Тогда группа C сервантно инъективна, откуда для любой сервантно точной строки p-групп

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G & \to & H & \to & K & \to & 0 \\ & & \eta\downarrow & \swarrow \chi & & & & & \\ & & C & & & & & & \end{array}$$

и любого гомоморфизма $\eta\colon G \to C$ существует гомоморфизм $\chi\colon H \to C$, превращающий диаграмму в коммутативную. Так как группы G, H являются p-группами, гомоморфизмы η, χ можно рассматривать и как отображения в группу A, т. е. 3) выполнено.

Если для группы A выполнено условие 3) и A — сервантная подгруппа p-группы G, то тождественное отображение $A \to A$ можно представить в виде $A \to G \to A$, откуда следует, что A — прямое слагаемое группы G.

Наконец, пусть группа A удовлетворяет условию 4). Если бы выполнялось соотношение $A^1 \neq 0$, то группа A была бы сервантной подгруппой, но не прямым слагаемым периодической части G своей сервантно инъективной оболочки [по лемме 41.8 группа G/A делима, а всякая ненулевая делимая подгруппа группы G имеет с A^1 ненулевое пересечение]. Следовательно, $A^1 = 0$, и по следствию 68.2 группа

A — сервантная подгруппа группы $\overline{B}$, где B — базисная подгруппа группы A. По предположению $\overline{B} \cong A \oplus \overline{B}/A$. Второе слагаемое должно быть нулевым, так как $\overline{B}$ — редуцированная группа, а $\overline{B}/A$ — делимая. Следовательно, выполнено условие 1). ■

Наши рассуждения о периодически полных группах существенно опирались на теорию алгебраически компактных групп. Следует заметить, что легко дать и независимое изложение рассматриваемых вопросов.

Можно начать с определения группы $\overline{B}$ как периодической части группы $\prod B_n$ [заметим, что и здесь должна быть проверена независимость группы $\overline{B}$ от разложения $B = \bigoplus B_n$]. Для доказательства эквивалентности условий 1), 3) и 4) теоремы 68.4 можно провести следующее рассуждение.

Чтобы проверить, что для группы $A = \overline{B}$ выполнено условие 3), предположим, что G — сервантная подгруппа p-группы H и η: $G \to \overline{B}$ — гомоморфизм. Если ε_n — координатная проекция $\overline{B} \to B_n$, то ядро гомоморфизма $\varepsilon_n\eta$: $G \to B_n$ содержит p^nG и, таким образом, он индуцирует гомоморфизм $G/p^nG \to B_n$. По теореме 27.10 группа G/p^nG служит прямым слагаемым для H/p^nG, поэтому последний гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма $H/p^nG \to B_n$. Если предварительно применить еще каноническое отображение $H \to H/p^nG$, то получится продолжение χ_n: $H \to B_n$ гомоморфизма $\varepsilon_n\eta$ при любом n. Очевидно, отображение

$$\chi: h \longmapsto (\chi_1 h, \ldots, \chi_n h, \ldots)$$

является продолжением гомоморфизма η до гомоморфизма группы H в $\overline{B}$.

Доказательство импликации 3) $\Rightarrow$ 4) проводится так же, как и выше.

Наконец, для доказательства того, что из 4) следует 1), заметим, что если $0 \neq a \in A^1[p]$, то A — сервантная подгруппа p-группы $C = \langle A, x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$, где $px_1 = a$, $px_n = x_{n-1}$ при любом $n \geqslant 2$. Но это невозможно, так как по предположению $C = A \oplus G$ для некоторой подгруппы G и компоненты элементов a, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ в A должны порождать квазициклическую подгруппу группы A. Следовательно, группа A сепарабельна, т. е. является сервантной подгруппой периодически полной p-группы $\overline{B}$. По предположению A выделяется в $\overline{B}$ прямым слагаемым. Дополнительное прямое слагаемое должно равняться нулю, так как $\overline{B}$ — редуцированная, а $\overline{B}/A$ — делимая группы. Таким образом, $A = \overline{B}$, что и требовалось доказать.

Очевидно, условие 4) эквивалентно такому условию:

$$\operatorname{Pext}(X, A) = 0 \quad \text{для любой } p\text{-группы } X.$$

В частности, мы имеем $\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), A) = 0$. Для любой p-группы X существует сервантно точная последовательность $0 \to C \to X \to \oplus Z(p^\infty) \to 0$, где C — прямая сумма циклических групп, поэтому по теореме 53.7 получаем точную последовательность

$$\operatorname{Pext}(\oplus Z(p^\infty), A) \cong \prod \operatorname{Pext}(Z(p^\infty), A) \to \operatorname{Pext}(X, A) \to \operatorname{Pext}(C, A) = 0.$$

Этим доказано

Следствие 68.5. *Редуцированная p-группа A является периодически полной тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), A) = 0. \ ■$$

Из следствия 38.3 и теоремы 68.4 непосредственно получается

Следствие 68.6. *Периодическая часть A прямого произведения $\prod A_i$ p-групп A_i является периодически полной группой тогда и только тогда, когда все группы A_i периодически полные.* ∎

Частичным аналогом следствия 39.2 служит такой результат:

Следствие 68.7 (Ирвин и О'Нейл [1]). *Если G — подгруппа периодически полной p-группы A и если A/G — редуцированная группа, то подгруппа G сама является периодически полной.*

Из точности последовательности $0 \to G \to A \to A/G \to 0$ вытекает точность последовательности

$$\operatorname{Hom}(Z(p^\infty), A/G) \to \operatorname{Ext}(Z(p^\infty), G) \to \operatorname{Ext}(Z(p^\infty), A).$$

Если A/G — редуцированная группа, то первый член этой последовательности — нулевая группа, и $\operatorname{Ext}(Z(p^\infty), G)$ можно рассматривать как подгруппу группы $\operatorname{Ext}(Z(p^\infty), A)$. Если первая ульмовская подгруппа этой последней группы является нулевой, то то же верно для исходной группы, т. е. из $\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), A) = 0$ вытекает $\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), G) = 0$. ∎

Замечание. Читателю, возможно, интересно будет узнать, что периодически полные p-группы можно также охарактеризовать как p-группы A, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Pext}(\overline{B}, A) = 0$$

для любой периодически полной p-группы $\overline{B}$ [см. Гриффит [9]]. Достаточно проверить, что если группа A удовлетворяет этому условию, то обязательно $\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), A) = 0$.

Предположим, напротив, что $\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), A) \neq 0$. Выберем такое кардинальное число $\mathfrak{n}$, что $|A| < \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}^{\aleph_0} = 2^{\mathfrak{n}}$ $(= \mathfrak{m})$; такое $\mathfrak{n}$ существует: например, можно взять $\mathfrak{n} = |A| + 2^{|A|} + 2^{2^{|A|}} + \ldots$. Пусть $\overline{B}$ — периодически полная p-группа с базисной подгруппой $B = \bigoplus_{\mathfrak{n}} \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z(p^i)$. Из сервантно точной последовательности $0 \to B \to \overline{B} \to \overline{B}/B \to 0$ получаем точную последовательность

$$\operatorname{Hom}(B, A) \to \operatorname{Pext}(\overline{B}/B, A) \to \operatorname{Pext}(\overline{B}, A) = 0.$$

Здесь

$$|\operatorname{Hom}(B, A)| = \prod_{\mathfrak{n}} \prod_{i=1}^{\infty} |A[p^i]| \leqslant |A|^{\mathfrak{n}} = 2^{\mathfrak{n}},$$

в то время как $\overline{B}/B = \bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)$ дает

$$|\operatorname{Pext}(\overline{B}/B, A)| = \prod_{\mathfrak{m}} |\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), A)| \geqslant 2^{\mathfrak{m}}.$$

Из последней точной последовательности имеем $2^{\mathfrak{n}} \geqslant 2^{\mathfrak{m}}$, а это противоречит тому, что $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}} < 2^{\mathfrak{m}}$.

Наконец, докажем следующий результат.

Предложение 68.8. *Если G — сервантная подгруппа периодически полной p-группы A, то A/G — прямая сумма делимой группы и периодически полной группы.*

Из теоремы 53.7 следует, поскольку $0 \to G \to A \to A/G \to 0$ — сервантно точная последовательность, что $\mathrm{Pext}(Z(p^\infty), A) \to \mathrm{Pext}(Z(p^\infty), A/G)$ — эпиморфизм. По следствию 68.5 первая из этих групп нулевая, и утверждение доказано. ∎

Отсюда, в частности, следует, что замыкание G^- сервантной подгруппы G периодически полной p-группы A удовлетворяет следующему условию: G^-/G — делимая группа, следовательно, подгруппа G^- также сервантна [ср. квазиполные группы, § 74]. Очевидно, группа A/G^- периодически полная, поэтому по следствию 68.7 подгруппа G^- также периодически полная. В силу ее сервантности получаем

Следствие 68.9. *В периодически полной p-группе замыкание сервантной подгруппы выделяется прямым слагаемым.* ∎

Упражнения

1. Пусть B — прямая сумма циклических p-групп. Доказать, что тогда группа $\overline{B}/\overline{B}[p]$ изоморфна периодически полной группе с базисной подгруппой $B/B[p]$.

2 (Фукс [3]). (а) Пусть A — сепарабельная p-группа, а B — некоторая ее верхняя базисная подгруппа. Если $B \neq A$, то $|A/B| \geqslant \aleph_1$ и существует разложение $A = A' \oplus A''$, где A' — прямая сумма циклических групп и $|A''| = |A/B|$. [*Указание*: провести рассуждение, как при доказательстве предложения 68.3.]

(б) Всякую сепарабельную p-группу A можно представить в виде $A = A' \oplus A''$, где A' — прямая сумма циклических групп, а в группе A'' всякая базисная подгруппа одновременно является и верхней, и нижней.

3. Используя обозначения из основного текста, показать, что $\prod B_n/\overline{B}$ — алгебраически компактная группа без кручения, не являющаяся делимой, если она отлична от 0.

4. Элемент $g = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in \overline{B}$ экспоненты $e(g) = n$ порождает прямое слагаемое группы $\overline{B}$ в точности тогда, когда $e(b_n) = n$.

5 (Лептин [1]). Пусть A — сепарабельная p-группа и $a = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in A$, где $b_n \in B_n$, $\oplus B_n = B$ — базисная подгруппа группы A. Тогда максимальное число n, для которого $h(b_n) = h(a)$, не зависит от выбора базисной подгруппы B; это число — инвариант элемента a в группе A.

6 (Лептин [1]). (а) Пусть $M \cup M' = N \cup N'$ — разбиения множества натуральных чисел [на непересекающиеся подмножества]. Для подмножества X множества целых чисел пусть $B_X = \bigoplus_{n \in X} Z(p^n)$. Доказать, что группы

$$A_M = B_M \oplus \overline{B}_{M'} \quad \text{и} \quad A_N = B_N \oplus \overline{B}_{N'}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда M и N отличаются друг от друга лишь на конечные подмножества. [*Указание*: если это не так, записать $A = B_L \oplus C \cong \overline{B}_L \oplus C'$ для бесконечного множества L и показать, что ограничение проекции $A \to B_L$ на $\overline{B_L}$ является мономорфизмом.]

(б) Используя п. (а), построить континуум неизоморфных групп с базисной подгруппой $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$, каждая из которых является прямой суммой циклических групп и периодически полной группы.

7. Доказать, что для неограниченной группы B справедливо равенство

$$|\overline{B}| = |B|^{\aleph_0}.$$

[*Указание*: нетривиальную часть теоретико-множественных рассуждений см. в примере 2 из § 75.]

8. (а) Широкие подгруппы периодически полных p-групп являются периодически полными. [*Указание*: см. предложение 67.4 и следствие 68.7.]

(б) Если C — периодически полная подгруппа p-группы A и A/C — ограниченная группа, то A — периодически полная группа.

9. Назовем периодическую группу A *периодически полной*, если все ее p-компоненты — периодически полные группы.

(а) Доказать теорему 68.4 для редуцированных периодических групп A, заменив в условиях 3) и 4) слова «p-группы» словами «периодические группы».

(б) Отбросить условие редуцированности и доказать то же утверждение, что и в п. (а), заменив условие 1) таким условием: 1′) группа A является прямой суммой делимой группы и периодически полной группы.

10. Доказать, что периодическая группа A является прямой суммой делимой группы и периодически полной группы тогда и только тогда, когда $\operatorname{Pext}(Q/Z, A) = 0$.

11. (а) Ядра эндоморфизмов периодически полных групп сами являются периодически полными группами.

(б) Привести пример, показывающий, что эндоморфный образ периодически полной p-группы может не быть периодически полной группой. [*Указание*: теорема 36.1.]

12. Периодическая часть обратного предела периодически полных p-групп также является периодически полной группой. [*Указание*: теорема 68.4, теорема 12.3 и предложение 39.4.]

13. В обозначениях, использовавшихся в тексте, справедливо равенство

$$\hat{B} = \operatorname{Ext}(Q/Z, \overline{B}).$$

[*Указание*: § 54, п. 3).]

14. Пусть T — сепарабельная p-группа с базисной подгруппой B, и пусть факторгруппа $\bar{B}/T$ имеет конечный ранг r. Показать, что

$$\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), T) = \bigoplus_r J_p.$$

[*Указание*: предложение 56.5.]

15. Если T — группа из упр. 14 и S — сепарабельная p-группа, содержащая T в качестве такой сервантной и плотной подгруппы, что $r(S/T) = r$, то $S \cong \bar{B}$. [*Указание*: использовать следствие 68.5 и тот факт, что группа $\operatorname{Pext}(Z(p^\infty), S)$ или нулевая, или бесконечная.]

§ 69. Дальнейшая характеризация периодически полных p-групп

В предыдущем параграфе периодически полные p-группы были разными способами охарактеризованы с помощью алгебраических свойств, касающихся также других групп. Здесь нашей основной целью будет получить для них внутреннюю алгебраическую характеризацию.

Нашей отправной точкой служит такой результат.

Теорема 69.1 (Лептин [1]). *Две сервантные и плотные подгруппы A, A' периодически полной p-группы $\bar{B}$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм группы $\bar{B}$, отображающий одну из этих подгрупп на другую. Более того, всякий изоморфизм между A и A' единственным образом продолжается до автоморфизма группы $\bar{B}$.*

Достаточно доказать, что если α — изоморфизм между A и A', то существует единственный автоморфизм $\bar{\alpha}$ группы $\bar{B}$, индуцирующий α. Если рассматривать α как гомоморфизм группы A в $\bar{B}$, то из наличия сервантно точной последовательности $0 \to A \to \bar{B} \to \bar{B}/A \to 0$ будет в силу теоремы 68.4, п. 3), следовать, что существует такой гомоморфизм $\bar{\alpha}$: $\bar{B} \to \bar{B}$, что $\bar{\alpha} \mid A = \alpha$. Аналогично, существует такой гомоморфизм $\bar{\beta}$: $\bar{B} \to \bar{B}$, что $\bar{\beta} \mid A' = \alpha^{-1}$. Теперь отображения $\bar{\beta}\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ — эндоморфизмы группы $\bar{B}$, причем первый из них является тождественным на A, а второй — тождественным на A'. Следовательно, оба эти эндоморфизма являются тождественными на базисных подгруппах групп A и A' соответственно. Из наших предположений следует, что эти базисные подгруппы служат в то же время базисными подгруппами группы $\bar{B}$. Поэтому по предложению 34.1 имеем $\bar{\beta}\bar{\alpha} = 1_{\bar{B}} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, т. е. $\bar{\alpha}$ — автоморфизм группы $\bar{B}$. Единственность автоморфизма $\bar{\alpha}$ также является следствием предложения 34.1, так как любые два продолжения изоморфизма α индуцируют одно и то же отображение на базисной подгруппе группы $\bar{B}$. ∎

Этот результат имеет важное следствие: вопрос об изоморфизме сепарабельных p-групп эквивалентен проблеме существования определенных автоморфизмов периодически полных p-групп. К сожалению, эта последняя проблема, видимо, так же трудно решается, как и первая.

Другим следствием теоремы 69.1 является то, что *изоморфизм между двумя базисными подгруппами группы $\bar{B}$ может быть единственным образом продолжен до автоморфизма группы $\bar{B}$.* В частности, это также показывает, что периодически полная группа имеет вид $\bar{B}$ для *любой* своей базисной подгруппы B.

Выделенное курсивом замечание позволяет дать новую характеризацию периодически полных групп.

Теорема 69.2 (Лептин [1], Энокс [2]). *Редуцированная p-группа A является периодически полной тогда и только тогда, когда всякий изоморфизм между ее базисными подгруппами продолжается до автоморфизма самой группы A.*

Чтобы доказать достаточность, предположим, что группа A обладает указанным свойством. Если она ограниченная, то имеет только одну базисную подгруппу [ср. следствие 35.4], и доказывать нечего. Предположим, что группа A неограниченна, и пусть B — ее базисная подгруппа. Тогда $\bar{B} \neq B$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in \bar{B} \setminus B$. В силу делимости группы $\bar{B}/B$ существует такая сервантная подгруппа B' группы $\bar{B}$, содержащая B и $x_1, \ldots, x_n$, что B'/B — конечная прямая сумма групп $Z(p^\infty)$. По предложению 68.3 подгруппа B' тоже является прямой суммой циклических групп и, таким образом, также служит базисной подгруппой для группы $\bar{B}$. В силу теоремы 69.1 существует автоморфизм α группы $\bar{B}$, отображающий B' на B. Очевидно, αB — тоже базисная подгруппа группы $\bar{B}$ и $\alpha B \subseteq B$. Следовательно, αB также является базисной подгруппой группы A. По предположению существует автоморфизм β группы A, для которого $\beta \mid B = \alpha \mid B$.

Определим теперь следующим образом отображение $\varphi \colon \bar{B} \to A$. Пусть φ переводит каждый элемент $b \in B$ в себя. Если $x \in \bar{B}$, то пусть он равняется элементу x_i некоторого конечного множества $x_1, \ldots, x_n$ (см. предыдущий абзац). Положим тогда $\varphi x = \varphi x_i = \beta^{-1}\alpha x_i$. Это определение корректно: если B'' — базисная подгруппа группы $\bar{B}$, содержащая B', и α' — автоморфизм группы $\bar{B}$, отображающий B'' на B, а β' — автоморфизм группы A, для которого $\beta' \mid B = \alpha' \mid B$, то $\alpha'\alpha^{-1}B = \alpha'B' \subseteq \alpha'B'' = B$, а $\beta'\beta^{-1}$ совпадает с $\alpha'\alpha^{-1}$ на $\alpha B = \beta B$, а значит, и на B. Отсюда $\beta'\beta^{-1}(\alpha x_i) = \alpha' x_i$, т. е. $\beta^{-1}\alpha x_i = \beta'^{-1}\alpha' x_i$. Таким образом, φ — корректно определенный гомоморфизм $\bar{B} \to A$. Если $x \in \operatorname{Ker} \varphi$, то $\beta^{-1}\alpha x = 0$, $\alpha x = 0$ и $x = 0$. Следовательно, φ — мономорфизм.

Мы получили, что $\varphi\bar{B}$ — подгруппа группы A и $\varphi B = B$. Это означает, что подгруппа $\varphi\bar{B}$ сервантна в A, и из теоремы 68.4, п. 4), следует,

что $\varphi\overline{B}$ — прямое слагаемое группы A. Но A — редуцированная группа, а группа $A/\varphi\overline{B}$ делимая, поэтому $\varphi\overline{B} = A$. Этим доказано, что φ — изоморфизм, и группа A периодически полная. ∎

Если мы ограничимся рассмотрением сепарабельных p-групп, то последнюю теорему можно усилить.

Теорема 69.3 (Лептин [3]). *Пусть A — сепарабельная p-группа и B — такая ее базисная подгруппа, что каждый автоморфизм группы B продолжается до автоморфизма группы A. Тогда или $A = B$, или $A = \overline{B}$.*

Группу A можно считать вложенной в $\overline{B}$ в качестве сервантной подгруппы, содержащей B. Если $A \neq B$, то B — неограниченная группа. Пусть $B = \bigoplus\limits_n B'_n$, где $B'_n \neq 0$ — прямая сумма некоторого множества групп $Z(p^{i_n})$, $i_1 < \ldots < i_n < \ldots$. В каждой группе B'_n выберем прямое слагаемое $\langle b_n\rangle$ и положим

$$x_n = (0, \ldots, 0, p^{i_n-1}b_n, p^{i_{n+1}-1}b_{n+1}, \ldots) \in \overline{B} \setminus B.$$

Элемент x_n имеет порядок p и высоту $i_n - 1$. Если элемент $y \in \overline{B} \setminus B$ имеет порядок p, то он имеет высоту $i_n - 1$ при некотором n и, таким образом, имеет вид

$$y = (0, \ldots, 0, \quad p^{i_n-1}c_n, \quad p^{i_{n+1}-1}c_{n+1}, \ldots),$$

где $c_m \in B'_m$ и бесконечное число координат отлично от нуля. Пусть ненулевые координаты элемента y — это

$$p^{i_n-1}c_n, \quad p^{i_{n_2}-1}c_{n_2}, \quad p^{i_{n_3}-1}c_{n_3}, \ldots.$$

Заметим, что $\langle c_{n_j}\rangle$ является прямым слагаемым группы B'_{n_j}, а значит и группы $B'_{n_j} \oplus \ldots \oplus B'_{n_{j+1}-1}$. В этой последней элемент

$$c'_{n_j} = b_{n_j} + p^{i_{n_j+1}-i_{n_j}}b_{n_j+1} + \ldots + p^{i_{n_{j+1}-1}-i_{n_j}}b_{n_{j+1}-1}$$

также порождает прямое слагаемое того же порядка. Поэтому существует автоморфизм α группы B, переводящий элемент c_{n_j} в c'_{n_j} при любом j. В силу теоремы 69.2 автоморфизм α можно продолжить до автоморфизма $\overline{\alpha}$ группы $\overline{B}$. Из представления элементов в виде векторов сразу получается, что $\overline{\alpha}y = x_n$.

Если группа A обладает свойством, указанным в формулировке теоремы, то существует такой автоморфизм φ этой группы, что $\varphi \mid B = \alpha$. Автоморфизм φ можно продолжить до автоморфизма группы $\overline{B}$. Из единственности этого продолжения следует, что $\overline{\alpha} \mid A = \varphi$, т. е. что группа A переводится автоморфизмом $\overline{\alpha}$ в себя. Автоморфизм, обратный автоморфизму $\overline{\alpha}$, также отображает группу A в себя, поэтому получается, что для любых двух элементов y и y' из $\overline{B} \setminus B$, имеющих

порядок p и одинаковую высоту, существует такой автоморфизм β группы $\bar{B}$, что $\beta A = A$ и $\beta y = y'$.

Пусть теперь элемент $a \in A \setminus B$ имеет порядок p. Легко видеть, что при любом n смежный класс $a + B$ содержит элемент a_n порядка p и высоты $i_n - 1$. Если дан элемент $y \in \bar{B} \setminus B$ порядка p, то его высота равна $i_n - 1$ при некотором n. Следовательно, как показано в предыдущем абзаце, существует такой автоморфизм β группы $\bar{B}$, что $\beta A = A$ и $\beta a_n = y$. Отсюда $y \in A$ и, таким образом, группа A содержит цоколь группы $\bar{B}$. В силу сервантности подгруппы A в $\bar{B}$ получаем $A = \bar{B}$. ∎

Упражнения

1. Показать, что всякий автоморфизм цоколя группы $\bar{B}$, сохраняющий высоты элементов, можно продолжить до автоморфизма группы $\bar{B}$.

2 (Энокс [3]). Если A — такая редуцированная p-группа, что всякий автоморфизм подгруппы A^1 продолжается до автоморфизма группы A, то $A^1 = 0$.

3 (Лептин [3]). Редуцированная p-группа A является периодически полной, если всякий изоморфизм между некоторой фиксированной базисной подгруппой B группы A и любой базисной подгруппой группы B индуцируется автоморфизмом группы A.

4 (Мадер [6]). (а) Пусть B — прямая сумма циклических p-групп и $\hat{B}$ — ее p-адическое пополнение. Две сервантные вполне характеристические подгруппы группы $\hat{B}$, содержащие подгруппу B, изоморфны тогда и только тогда, когда они совпадают.

(б) Пусть A — произвольная группа, в которой $p^{\omega}A = 0$ и все p-базисные подгруппы B являются p-группами [p — фиксированное простое число]. Группа A тогда и только тогда обладает тем свойством, что всякий изоморфизм между ее p-базисными подгруппами индуцируется некоторым автоморфизмом самой группы A, когда A изоморфна некоторой p-сервантной вполне характеристической подгруппе, лежащей между $\bar{B}$ и $\hat{B}$.

5. Пусть $\bar{B}$ — периодически полная p-группа с базисной подгруппой $B = \oplus B_n$ (каноническая форма). Пусть $\{c_i\}_{i \in I}$ — базис группы B, и пусть $\eta c_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}, \ldots)$, где $b_{in} \in B_n$, при некотором гомоморфизме $\eta\colon B \to \bar{B}$. Для элемента $b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in \bar{B}$ определим формально $\eta b = \sum_{n=1}^{\infty} \eta b_n$, где элементы b_n заменены соответствующими линейными комбинациями элементов c_i. Показать, что бесконечная сумма имеет смысл, и определить продолжение гомоморфизма η до эндоморфизма группы $\bar{B}$. [*Указание*: k-е координаты почти всех элементов ηb_n для каждого k равны нулю.]

6 (Меджиббен [5]). Пусть A — неограниченная периодически полная p-группа, а C — произвольная сепарабельная p-группа. Гомоморфизм группы A в группу C, не являющийся малым, существует

тогда и только тогда, когда группа C содержит неограниченную периодически полную p-подгруппу. [*Указание*: выделить в образе гомоморфизма, не являющегося малым, неограниченную периодически полную группу.]

7 (Ричмен [1]). p-группа T называется *тонкой*, если всякий гомоморфизм периодически полной p-группы в группу T является малым [ср. определение узкой группы в § 94]. Показать, что

(а) класс тонких групп замкнут относительно подгрупп, прямых сумм и расширений;

(б) все счетные редуцированные p-группы являются тонкими;

(в) всякий гомоморфизм $\overline{B} \longrightarrow B$ является малым.

§ 70. Топологическая полнота периодически полных групп

В сепарабельной p-группе A можно ввести различные топологии, которые получаются из стандартной p-адической топологии группы A и особенно интересны с точки зрения теории периодически полных p-групп.

Отправной точкой для нас будет служить p-адическая топология сепарабельной p-группы A, которую мы обозначим через τ_A [или просто τ]. Для каждого k подгруппа $A[p^k]$ обладает топологией, индуцированной топологией τ_A, где

$$p^nA \cap A[p^k] = p^nA[p^k] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— подбазис окрестностей нуля. Это индуцирует топологию $\tau_A^{(k)}$ на группе A, которая, таким образом, тоже является линейной топологией с подгруппами $p^nA[p^k]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в качестве подбазиса. Наконец, введем топологию

$$\tau_A^* = \bigcap_k \tau_A^{(k)},$$

т. е. такую топологию, что τ_A^*-открытые множества — это в точности те множества, которые являются $\tau_A^{(k)}$-открытыми при любом k. Заметим, что

$$\tau_A \leqslant \tau_A^* \leqslant \ldots \leqslant \tau_A^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant \tau_A^{(1)}. \tag{1}$$

Легко доказать, что τ_A^* — также линейная топология. Топологическая группа (A, τ_A^*) является индуктивным [т. е. прямым] пределом топологических групп $A[p^k]$, снабженных топологиями, индуцированными топологией τ_A. Поэтому τ_A^* можно назвать *индуктивной p-адической топологией* группы A. В предложении 70.1 эта топология описывается более подробно.

Нам окажутся полезными следующие замечания:

а) Если A — ограниченная группа, то все топологии в последовательности (1) дискретны и потому совпадают. Но если группа A неогра-

ниченная, то все топологии τ_A^*, $\tau_A^{(k)}$ ($k = 1, 2 \ldots$) различны. [Из дальнейших рассуждений будет следовать, что τ_A и τ_A^* также различны.]

б) Широкие подгруппы группы A замкнуты в каждой из топологий последовательности (1). Это сразу следует из формулы (2) § 67, где подгруппы $p^{-n}(p^{rn}A)$ [содержащие открытые подгруппы $p^{rn}A$] являются открытыми.

в) Если C — сервантная подгруппа группы A, то, как известно, p-адическая топология τ_C на ней совпадает с топологией, индуцированной τ_A. Очевидно, то же верно для $\tau_C^{(k)}$ и $\tau_A^{(k)}$ при любом k, поэтому для сервантной подгруппы C группы A топология τ_C^* совпадает с топологией, индуцированной топологией τ_A^*.

Опишем теперь подгруппы, открытые в топологии τ_A^*.

Предложение 70.1 (Шарль). *Подгруппа G группы A является открытой в индуктивной p-адической топологии группы A тогда и только тогда, когда она содержит широкую подгруппу группы A, т. е. удовлетворяет условию Пирса.*

Если подгруппа G удовлетворяет условию Пирса, то для данного k выберем соответствующее ему n. Тогда $p^nA[p^k] \subseteq G$, и G — открытая подгруппа в топологии $\tau_A^{(k)}$. Это верно для любого k, поэтому подгруппа G является открытой в топологии τ_A^*. Обратно, если G — подгруппа, открытая в топологии τ_A^*, то она является открытой в каждой из топологий $\tau_A^{(k)}$, и для любого k существует такое n, что $p^nA[p^k] \subseteq G$. Но это условие Пирса. ∎

Следовательно, *индуктивная p-адическая топология является* **D**-*топологией* [см. § 7], *где дуальный идеал* **D** *представляет собой множество всех подгрупп группы A, удовлетворяющих условию Пирса.* В неограниченной группе A имеется континуум широких подгрупп, и нетрудно показать, что топология τ_A^* может не удовлетворять второй аксиоме счетности. Однако, верно следующее утверждение:

Лемма 70.2 (Катлер и Стринголл [1]). *Для всякой сети Коши $\{a_i\}_{i \in I}$ в индуктивной p-адической топологии группы A существует такое m, что сеть $\{p^m a_i\}_{i \in I}$ сходится к нулю.*

Можно предполагать, что множество индексов I частично упорядочено так, что $i \leqslant j$ в множестве I, если $G_i \supseteq G_j$, где G_i, G_j — широкие подгруппы группы A. Учитывая рассмотрения § 13, мы можем ограничиться чистыми сетями Коши, т. е. такими сетями Коши, что $a_i - a_j \in G_i$ при любых $j \geqslant i$.

Во-первых, заметим, что при $j \geqslant i$ смежные классы $a_i + G_i$ и $a_j + G_i$ совпадают.

Предположим, что наше утверждение не выполнено, т. е. что существует строго возрастающая последовательность целых чисел $n_1 <$

$< n_2 < \ldots$ и последовательность $i_1 < i_2 < \ldots$ индексов из I, для которых экспонента элемента $a_j + G_{i_k}$ равна n_k при любом $j \geqslant i_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Без ограничения общности можно предполагать, что числа n_k удовлетворяют неравенствам $n_{k+1} > n_k + k$. Очевидно, что смежные классы $p^{n_k - 1} a_j + G_{i_k}$ при всех $j \geqslant i_k$ совпадают, а так как группа A/G_{i_k} не содержит элементов бесконечной высоты [см. предложение 67.4], то существует конечная верхняя граница h_k высот $h(p^{n_k - 1} a_j)$, $j \geqslant i_k$. Возьмем теперь широкую подгруппу $G = A(r_0, r_1, \ldots$ $\ldots, r_k, \ldots)$ группы A, где $r_k > h_{k+1}$ при любом k. Эта подгруппа G снабжена некоторым индексом из I, скажем $G = G_{i_0}$. Существует такое целое число n, что $p^n a_j \in G_{i_0}$ при всех $j \geqslant i_0$. Выберем такое k, что $n_k \geqslant n$. Возьмем $j \in I$, для которого выполнены неравенства $j \geqslant i_0$ и $j \geqslant i_{k+1}$. По определению подгруппы G_{i_0} из включения $p^{n_k} a_j \in G_{i_0}$ следует, что высота элемента

$$p^{n_{k+1} - 1} a_j = p^{n_{k+1} - n_k - 1} (p^{n_k} a_j)$$

больше или равна $r_{n_{k+1} - n_k - 1} \geqslant r_k > h_{k+1}$, что противоречит определению числа h_{k+1}. Это доказывает, что $\{p^m a_i\}_{i \in I}$ есть 0-сеть при некотором m. ∎

Из этой леммы следует, что можно рассматривать только ограниченные сети Коши $\{a_i\}_{i \in I}$ в топологии τ_A^*, т. е. сети Коши, для которых $p^m a_i = 0$ при некотором m и всех i. В самом деле, если $\{a_i\}_{i \in I}$ — произвольная чистая сеть Коши в топологии τ_A^* группы A, то по лемме 70.2 для некоторого m при любом i имеет место включение $p^m a_i \in G_i$. Если G_i — широкая подгруппа, то $p^m G_i$ также является широкой. Пусть $p^m G_i = G_{i(m)}$, $i(m) > i$. Теперь $a_i - a_{i(m)} \in G_i$, откуда $p^m a_i - p^m a_{i(m)} \in G_{i(m)}$ и, таким образом, $p^m a_i \in G_{i(m)} = p^m G_i$, т. е. $p^m a_i = p^m g_i$ для некоторого $g_i \in G_i$. Сеть $\{a_i - g_i\}_{i \in I}$ снова является чистой сетью Коши в топологии τ_A^*, причем эта сеть ограничена числом p^m и отличается от данной сети $\{a_i\}$ на 0-сеть $\{g_i\}_{i \in I}$. Поэтому *мы можем и будем теперь рассматривать лишь ограниченные сети Коши в топологии* τ_A^*. Более того, возможно еще следующее упрощение. Ограниченной сети Коши $\{a_i\}_{i \in I}$ в топологии τ_A^* можно следующим образом поставить в соответствие ограниченную сеть Коши в топологии τ_A. Выберем среди групп G_i группы вида $p^n A$; пусть, например, $p^n A = G_{i_n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Затем введем соответствие

$$\psi\colon \{a_i\}_{i \in I} \mapsto \{a_{i_n}\}_{n=0, 1, \ldots}.$$

Другими словами, мы оставим в точности те a_i, которые соответствуют подгруппам $p^n A$. Если дана произвольная ограниченная сеть Коши $\{a'_n\}$ в топологии τ_A, например, такая, что $p^m a'_n = 0$ при всех n, то существует сеть Коши $\{a_i\}$, отображающаяся при ψ на нее: для $i \in I$ выбираем наименьшее целое число r_i, при котором $p^{r_i} A[p^m] \subseteq G_i$, и полагаем $a_i = a'_{r_i}$. Легко видеть, что $\{a_i\}$ — действительно сеть

Коши. С другой стороны, если $\{a_{i_n}\}$ есть 0-последовательность, т. е. $a_{i_n} \in p^n A$ при любом n, то для каждого заданного индекса $i \in I$ и целого числа n существует такой индекс $j \in I$, что $j > i$ и $j > i_n$, а из того, что заданная сеть есть сеть Коши, следует, что $a_j \in p^n A$ и $a_i - a_j \in G_i$. Значит, элемент $a_i + G_i$ имеет в группе A/G_i высоту $\geqslant n$, а так как группа A/G_i сепарабельна, то $a_i \in G_i$, т. е. $\{a_i\}_{i \in I}$ есть 0-сеть. Таким образом, ψ отображает на 0-последовательности только 0-сети. Мы получаем

Предложение 70.3. *Если A — сепарабельная p-группа, то существует естественный изоморфизм [индуцированный отображением ψ] между факторгруппой группы всех ограниченных сетей Коши по подгруппе ограниченных 0-сетей в топологии τ_A^* и факторгруппой группы всех ограниченных последовательностей Коши по подгруппе ограниченных 0-последовательностей в топологии τ_A.* ■

В силу предыдущих рассмотрений ясно, что *полноту в топологии τ_A^* можно исследовать с помощью ограниченных последовательностей Коши в топологии τ_A.*

Непосредственно видно, что ограниченная последовательность Коши в топологии τ_A является последовательностью Коши в некоторой топологии $\tau_A^{(m)}$; легко доказать и обратное. Точно так же последовательность Коши в топологии $\tau_A^{(m)}$ является последовательностью Коши в топологии $\tau_A^{(m+1)}$; но утверждение, обратное этому, уже места не имеет. Однако справедлива

Лемма 70.4. *Пусть m — натуральное число. Сепарабельная p-группа A полна в топологии $\tau_A^{(m+1)}$ тогда и только тогда, когда она полна в топологии $\tau_A^{(m)}$.*

Пусть группа A полна в топологии $\tau_A^{(m+1)}$, и пусть $\{a_n\}$ — последовательность Коши в топологии $\tau_A^{(m)}$. Тогда эта последовательность является последовательностью Коши и в топологии $\tau_A^{(m+1)}$. Поэтому в топологии $\tau_A^{(m+1)}$ она сходится к некоторому элементу a. Для достаточно большого n при любом $k \geqslant 1$ справедливо равенство $p^m a_n = p^m a_{n+k}$. Если дано целое число s, то при достаточно больших k имеем $a - a_{n+k} \in p^s A\ [p^{m+1}]$. Следовательно, высота элемента $p^m a - p^m a_n$ в группе A бесконечна, откуда следует, что $p^m (a - a_{n+k}) = 0$ для любого $k \geqslant 0$. Это означает, что элемент a — предел последовательности $\{a_n\}$ также и в топологии $\tau_A^{(m)}$.

Обратно, пусть группа A полна в топологии $\tau_A^{(m)}$, и пусть $\{a_n\}$ — чистая последовательность Коши в топологии $\tau_A^{(m+1)}$. Тогда $\{pa_n\}$ — чистая последовательность Коши в топологии $\tau_A^{(m)}$, имеющая в этой топологии предел a. Так как подгруппа pA замкнута в топологии $\tau_A^{(m)}$, то $a \in pA$, т. е. $a = pb$ для некоторого $b \in A$. Следовательно, существует такой элемент $c_n \in A$, что $pa_n - pb = p^{n+1}c_n$, $p^{m+n+1}c_n = 0$. Последовательность $\{a_n - b - p^n c_n\}$ является последовательностью Коши в топологии $\tau_A^{(m+1)}$ и даже в топологии $\tau_A^{(m)}$, так как порядок ее членов не превосходит $p \leqslant p^m$. Значит, эта последовательность

имеет предел $b' \in A$, т. е. $a_n - b - b' - p^n c_n = p^n c'_n$ для некоторого $c'_n \in A$, где $p^{n+m} c'_n = 0$. Отсюда

$$a_n - b - b' \in p^n A [p^{m+1}],$$

и $b + b'$ — предел последовательности $\{a_n\}$ в топологии $\tau_A^{(m+1)}$. ■

Рассуждение, сходное с примененным во второй части предыдущего доказательства, показывает, что справедлива

Лемма 70.5 (Энокс [2]). *В сепарабельной p-группе A для любого натурального числа m подгруппы* $A[p^m]$ *и* $A[p^{m+1}]$ *являются или не являются полными в топологиях, индуцированных топологией* τ_A [*топологией* τ_A^*], *одновременно.* ■

Сравнение полноты в различных рассмотренных до сих пор топологиях дает следующий результат.

Теорема 70.6. *В сепарабельной p-группе A эквивалентны следующие условия:*

1) *всякая ограниченная последовательность Коши в p-адической топологии* τ_A *имеет предел в группе A;*

2) *группа A полна в индуктивной p-адической топологии* τ_A^*;

3) *группа A полна в топологии* $\tau_A^{(m)}$ *для некоторого* [*а тогда и для любого*] *m;*

4) *подгруппа* $A[p^m]$ *полна в топологии* τ_A *для некоторого* [*а тогда и для любого*] *m.*

Условия 1) и 2) эквивалентны в силу предложения 70.3. Условие 1) имеет место в точности тогда, когда при любом m справедливо условие 3), а это равносильно тому, что условие 3) выполняется при некотором m, как показывает лемма 70.4. В силу леммы 70.5 то же относится к условию 4). ■

Покажем, что группы, о которых идет речь в теореме 70.6, нам давно уже знакомы.

Теорема 70.7 (Куликов [2]). *Пусть A — сепарабельная p-группа. В группе A всякая ограниченная последовательность Коши в p-адической топологии сходится тогда и только тогда, когда A — периодически полная группа.*

Пусть $B = \bigoplus_n B_n$, где $B_n = \bigoplus Z(p^n)$, — базисная подгруппа группы A. Тогда группу A можно считать сервантной подгруппой группы $\bar{B}$, содержащей B, т. е. каждый элемент $a \in A$ можно отождествить с вектором $a = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in \bar{B}$, где $b_n \in B_n$ и $p^m b_n = 0$ для любого n, если $o(a) = p^m$.

Предположим теперь, что $A = \bar{B}$, и пусть

$$a_k = (b_{k1}, \ldots, b_{kn}, \ldots), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

— ограниченная последовательность Коши в группе $\overline{B}$, где $b_{kn} \in B_n$. Предполагая, что эта последовательность чиста, получаем

$$a_{k+l} - a_k = (b_{k+l,1} - b_{k1}, \ldots, b_{k+l,n} - b_{kn}, \ldots) \in p^k \overline{B} \text{ для всех } k, l \geqslant 1,$$

откуда $b_{k+l,1} = b_{k1}, \ldots, b_{k+l,k} = b_{kk}$. Это показывает, что первые k координат у элементов $a_k, a_{k+1}, \ldots$ совпадают и, кроме того, $b_{k+l,n} - b_{kn} \in p^k B_n$ для любого n. Пусть a — «диагональный» элемент,

$$a = (b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}, \ldots);$$

в силу ограниченности порядков элементов a_k он принадлежит $\overline{B}$. Так как элемент $a - a_k = (0, \ldots, 0, b_{k+1,k+1} - b_{k,k+1}, b_{k+2,k+2} - b_{k,k+2}, \ldots)$, очевидно, принадлежит подгруппе $p^k \overline{B}$, то a — предел заданной последовательности Коши.

Предположим теперь, что всякая ограниченная последовательность Коши в группе A сходится, и пусть $c = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in \overline{B}$. Если $p^m c = 0$, то $h(b_n) \geqslant n - m$ для любого $n \geqslant m$. Следовательно, $a_k = b_1 + \ldots + b_{m+k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ есть [чистая] ограниченная последовательность Коши в группе A. Если $a \in A$ — ее предел, то в группе $\overline{B}$ и a, и c — пределы этой последовательности, откуда $c = a \in A$ и $A = \overline{B}$. ∎

Полученные результаты позволяют придать теореме о вложении 68.2 топологический смысл.

Пусть B — прямая сумма циклических p-групп, снабженная индуктивной топологией τ_B^*. Можно взять пополнение группы B в этой топологии. В силу предложения 70.3 это пополнение состоит из пределов всех ограниченных последовательностей Коши в топологии τ_B, рассматриваемых по модулю 0-последовательностей. Следовательно, как показывает теорема 70.7, пополнением группы B служит и периодически полная группа $\overline{B}$. Кроме того, получается, что тождественное отображение группы B на себя продолжается до изоморфизма между этим пополнением и группой $\overline{B}$ [это топологический изоморфизм, если группа $\overline{B}$ снабжена топологией $\tau_{\overline{B}}^*$]. Следовательно, мы вправе называть группу $\overline{B}$ *периодическим пополнением* группы B.

Естественно, можно начать с произвольной сепарабельной p-группы A и образовать ее пополнение $\overline{A}$ в топологии τ_A^*. Так как всякая базисная подгруппа B группы A с введенной на ней топологией τ_B^* является плотным τ_A^*-подпространством в A, то ясно, что вложение $B \to A$ продолжается до изоморфизма $\overline{B} \to \overline{A}$. Поэтому справедливо

Предложение 70.8. *Если A — сепарабельная p-группа и B — ее базисная подгруппа, то τ_A^*-пополнение $\overline{A}$ группы A изоморфно $\overline{B}$.* ∎

Упражнения

1. Топологии $\tau_A^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots$) и τ_A^* в категории сепарабельных p-групп являются функторными [т. е. всякий групповой гомоморфизм в этой категории непрерывен].

2. Подгруппа C группы A замкнута в топологии τ_A^* тогда и только тогда, когда подгруппа $C[p^k]$ замкнута в $A[p^k]$ в топологии τ_A для любого k.

3. (а) Неограниченная сепарабельная p-группа A содержит такие собственные подгруппы C, открытые в топологии τ_A^*, что A/C — делимые группы.

(б) Базисные подгруппы группы A плотны в топологии τ_A^*.

4 (Шарль). Пусть A и C — сепарабельные p-группы, снабженные индуктивной p-адической топологией и дискретной топологией соответственно. Показать, что гомоморфизм φ: $A \to C$ непрерывен тогда и только тогда, когда он является малым.

5. Пусть A — сепарабельная p-группа и τ'_A — топология на группе A, более грубая, чем τ_A. Если всякая ограниченная τ'_A-последовательность Коши имеет τ'_A-предел в группе A, то группа A периодически полная. [*Указание*: использовать замечание в § 39.]

6. Замкнутая подгруппа периодически полной p-группы сама является периодически полной (в своей топологии!). [*Указание*: см. упр. 5.]

7. Доказать, что в неограниченной p-группе A топология τ_A^* не удовлетворяет аксиомам счетности. [*Указание*: использовать идею доказательства леммы 70.2.]

8. Показать, что в периодически полной p-группе бесконечный ряд $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$, где $p^m a_n = 0$ для некоторого m и любого n, сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n\}$ стремится к 0.

9. Если $0 \to G \to A$ — сервантно точная последовательность сепарабельных p-групп, то индуцированная последовательность $0 \to \overline{G} \to \overline{A}$ пополнений в топологии τ^* точна и расщепляется.

10. Неограниченная сепарабельная p-группа может быть полной в бесконечном числе различных линейных топологий.

§ 71. Прямые разложения периодически полных групп

Начнем со следующего технического результата.

Лемма 71.1 (Хилл [10]). *Пусть A — периодически полная p-группа а φ — гомоморфизм группы $A[p]$ в прямую сумму $C = \oplus C_i$ сепарабельных p-групп C_i. Если при гомоморфизме φ высоты элементов не уменьшаются, то существует такое целое число m и такое конечное подмножество $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ множества групп C_i, что*

$$\varphi(p^m A[p]) \subseteq C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_k}.$$

Если это не так, то можно найти такую строго возрастающую последовательность $m_1 < m_2 < \ldots$ целых чисел и такую последовательность элементов $a_k \in p^{m_k}A\,[p]$, что выполняются соотношения

$$p^{m_k}C \cap \langle \pi_i\varphi a_1, \ldots, \pi_i\varphi a_{k-1},\ i \in I\rangle = 0$$

и

$$\varphi a_k \notin C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_r},$$

где $\pi_i: C \to C_i$ — проекции, а $\{i_1 \ldots, i_r\}$ — минимальное подмножество множества I, для которого $\langle \varphi a_1, \ldots, \varphi a_{k-1}\rangle \subseteq C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_r}$. Очевидно, последовательность $g_k = a_1 + \ldots + a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходится к пределу $g \in A$. Однако последовательность $\varphi g_k = \varphi a_1 + \ldots + \varphi a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не может обладать пределом в группе C. В самом деле, если $c \in C$ — ее предел, то из $h(\varphi a_k) \geqslant m_k$ следует $c - (\varphi a_1 + \ldots + \varphi a_k) \in p^{m_{k+1}}C$ при любом k, откуда легко получается, что $\pi_i c \neq 0$ для бесконечного числа индексов $i \in I$, а этого не может быть. ∎

В случае когда $A \subseteq C$, получается более интересное

Предложение 71.2 (Энокс [1]). *Если периодически полная p-группа A содержится в прямой сумме $C = \bigoplus_i C_i$ сепарабельных p-групп C_i, то существует такое целое число m и такое конечное подмножество $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ множества групп C_i, что*

$$p^m A\,[p] \subseteq C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_k}. \ ∎$$

Следующая теорема дает достаточно хорошее описание прямых разложений периодически полных групп.

Теорема 71.3 (Куликов [2]). *Если периодически полная p-группа A является прямой суммой бесконечного числа своих подгрупп A_i, то A_i — периодически полные группы и для достаточно большого целого числа m*

$$p^m A_i = 0 \quad \text{при почти всех } i.$$

Если $B = \bigoplus_i C_i$ — прямое разложение базисной подгруппы группы $\bar{B}$, где $p^m C_i = 0$ для некоторого m при почти всех i, то $\bar{B} = \bigoplus_i C_i^-$, где $C_i^- \cong \bar{C}_i$.

Если $A = \oplus A_i$ — периодически полная группа, то по следствию 68.7 подгруппы A_i также являются периодически полными, и простое применение предложения 71.2 доказывает первое утверждение.

Пусть $B = \bigoplus_i C_i$ — прямое разложение базисной подгруппы $\bar{B}$, где $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ — неограниченные группы, а для всех остальных слагаемых C_i выполнено равенство $p^m C_i = 0$. Пусть $B = C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_k} \oplus C_0$, где C_0 — прямая сумма этих остальных групп C_i.

и $p^n C_0 = 0$. Так как, очевидно, доказательство можно провести по индукции, то достаточно доказать, что из $B = C_1 \oplus C_2$ следует $\overline{B} = C_1^- \oplus C_2^-$, где $C_j^- \cong \overline{C}_j$ $(j = 1, 2)$. Имеет место прямое разложение $B = \bigoplus_n B_n$, где $B_n = \oplus Z(p^n)$ и $B_n = (B_n \cap C_1) \oplus (B_n \cap C_2)$ при любом n. Поэтому любой элемент $a \in \overline{B}$ можно представить в виде

$$a = (b_{11} + b_{12}, \ldots, b_{n1} + b_{n2}, \ldots) =$$
$$= (b_{11}, \ldots, b_{n1}, \ldots) + (b_{12}, \ldots, b_{n2}, \ldots),$$

где $b_{nj} \in B_n \cap C_j$. В последней сумме первый вектор принадлежит C_1^-, а второй принадлежит C_2^-. Ясно, что элемент $a = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in \overline{B}$ лежит в C_j^- тогда и только тогда, когда каждый элемент b_n лежит в $B_n \cap C_j$. Этим установлено не только равенство $C_1^- \cap C_2^- = 0$, но и изоморфизм $C_j^- \cong \overline{C}_j$. ∎

Следствие 71.4 (Куликов [2]). *Любые два прямых разложения периодически полной группы обладают изоморфными продолжениями.*

Пусть A — периодически полная p-группа, и пусть $A = \bigoplus_i A_i = \bigoplus_j C_j$ — два ее прямых разложения. Обозначим через B_i и B'_j соответственно базисные подгруппы групп A_i и C_j. Тогда $B = \bigoplus_i B_i$ и $B' = \bigoplus_j B'_j$ — базисные подгруппы группы A, откуда $B \cong B'$. Из следствия 18.2 вытекает существование таких групп B_{ij} и B'_{ji}, что

$$B_i = \bigoplus_j B_{ij}, \quad B'_j = \bigoplus_i B'_{ji} \text{ и } B_{ij} \cong B'_{ji}.$$

В силу теоремы 71.3 существует такое целое число m, что $p^m A_i = p^m C_j = 0$ для почти всех i и j. Так как $p^m A_i = 0$ или $p^m C_j = 0$ влечет за собой $p^m B_{ij} = 0$, мы видим, что существует лишь конечное число групп B_{ij}, для которых $p^m B_{ij} \neq 0$. Положим $A_{ij} = B_{ij}^-$, $C_{ji} = B'^-_{ji}$. Тогда $A_{ij} \cong \overline{B}_{ij} \cong \overline{B}'_{ji} \cong C_{ji}$, и $A_i = \bigoplus_j A_{ij}$, $C_j = \bigoplus_i C_{ji}$, как следует из теоремы 71.3. ∎

Упражнения

1. Привести пример, показывающий, что для произвольных редуцированных p-групп C_i лемма 71.1 неверна.

2. Периодически полная p-группа содержится в прямой сумме циклических групп тогда и только тогда, когда она ограниченна.

3. Если A — периодически полная группа и $A \subseteq \oplus C_i$, где C_i — сепарабельные p-группы, то $A \cap C_i$ — периодически полная подгруппа группы C_i при любом i.

4 (Ирвин и О'Нейл [1]). Если прямая сумма сепарабельных p-групп содержит неограниченную периодически полную p-группу, то хотя бы одно из слагаемых содержит такую подгруппу.

5. (а) Показать, что предложение 71.2 останется в силе, если заменить $[p]$ на $[p^k]$ при любом $k \geqslant 1$.

(б) Показать на примере, что предложение 71.2 перестанет быть справедливым, если опустить $[p]$ в его формулировке.

6. В условиях предложения 71.2 для группы A существует разложение $A = G \oplus H$, где G — ограниченная группа, а $H[p] \subseteq C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_k}$ для некоторого конечного множества индексов $i_1, \ldots, i_k$.

7. Перенести лемму 71.1, предложение 71.2 и теорему 71.3 на случай произвольных периодически полных групп.

8. Всякую подгруппу C периодически полной p-группы можно вложить в прямое слагаемое мощности $\leqslant |C|^{\aleph_0}$. [*Указание*: вложить C в сервантную подгруппу и взять замыкание.]

9. Периодически полная p-группа $\overline{B}$ не содержит собственных сервантных подгрупп, изоморфных $\overline{B}$, тогда и только тогда, когда ее инварианты Ульма — Капланского конечны.

§ 72. Свойство замены

Наши результаты, касающиеся периодически полных групп, показывают, что эти группы хорошо ведут себя по отношению к прямым разложениям. Кроули и Йонсон [1] заметили, что периодически полные группы обладают очень сильным свойством, называемым свойством замены. Настоящий параграф посвящен рассмотрению этого важного факта. Мы воздержимся от детального изучения свойства замены вообще и сосредоточим свое внимание на периодически полных группах.

Говорят, что группа A обладает *свойством замены*, если она удовлетворяет следующему условию: если группа A служит прямым слагаемым для некоторой группы M, являющейся прямой суммой подгрупп C_i, т. е. если

$$M = A \oplus N = \bigoplus_{i \in I} C_i, \tag{1}$$

то существуют такие подгруппы E_i групп C_i, что

$$M = A \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i. \tag{2}$$

Говорят, что группа A обладает *конечным свойством замены*, если она удовлетворяет указанному выше условию для конечных систем индексов I.

Начнем с некоторых простых замечаний.

а) При любом i подгруппа E_i служит для C_i прямым слагаемым, $C_i = E_i \oplus E_i'$.

б) Если E_i' — подгруппы, определенные в п. а), то $A \cong \bigoplus_{i \in I} E_i'$.

в) *Группа $A = G \oplus H$ обладает свойством замены тогда и только тогда, когда этим свойством обладают G и H.*

Для доказательства этого факта предположим, что группа A обладает свойством замены, и пусть $M = G \oplus N = \oplus C_i$. Тогда $H \oplus M = A \oplus N = H \oplus \oplus C_i$, откуда $H \oplus M = A \oplus K \oplus \oplus E_i$ для некоторых подгрупп $K \subseteq H$ и $E_i \subseteq C_i$. Здесь обязательно $K = 0$, так как $K \subseteq A$. Следовательно, $H \oplus M = H \oplus G \oplus \bigoplus_i E_i$. Так как $G \oplus \oplus E_i \subseteq M$, то из последнего равенства вытекает, что $M = G \oplus \oplus E_i$.

Обратно, предположим, что группы G и H обладают свойством замены. Тогда из (1) получаем $M = G \oplus \oplus E_i$, где $E_i \subseteq C_i$. Отсюда $M/G = \overline{H} \oplus \overline{N} = \oplus \overline{E}_i$, где черта означает смежные классы по подгруппе G. Но это дает $M/G = \overline{H} \oplus \oplus \overline{E}'_i$ для некоторых подгрупп $E'_i \subseteq \overline{E}_i$. Так как подгруппа G служит для M прямым слагаемым, то существуют такие подгруппы $E'_i \subseteq E_i$, что $G \oplus E'_i$ соответствует E'_i. Из леммы 9.4 получаем $M = G \oplus H \oplus \oplus E'_i = A \oplus \oplus E'_i$, что и требовалось.

г) *Если группа A обладает свойством замены для всех таких групп M из* (1), *что группы C_i изоморфны подгруппам группы A, то группа A обладает свойством замены.*

Предположим, что равенство (1) выполнено для произвольных групп C_i, а группа A обладает указанным выше ослабленным свойством замены. Пусть π: $M \to A$ — проекция с ядром N, и пусть $K_i = \operatorname{Ker}(\pi \mid C_i)$. Тогда $K = \oplus K_i \subseteq N$ и $M/K = \overline{A} \oplus N/K = \oplus (C_i/K_i)$, где $\overline{A} = (A + K)/K \cong A$, а C_i/K_i — группы, отождествленные с $(C_i + K)/K$ с помощью канонического отображения. Группы C_i/K_i изоморфны подгруппам группы A, поэтому существуют такие группы $E_i/K_i \subseteq C_i/K_i$, что $M/K = \overline{A} \oplus \oplus (E_i/K_i)$. Легко проверить, что $M = A \oplus \oplus E_i$. Это завершает доказательство.

Теперь легко получить такое свойство:

д) Периодическая группа обладает свойством замены тогда и только тогда, когда им обладает каждая из ее p-компонент.

В следующих двух теоремах устанавливается, что некоторые классы групп обладают свойством замены.

Теорема 72.1 (Кроули и Йонсон [1]). *Если редуцированная часть группы A является периодической группой с ограниченными p-компонентами, то группа A обладает свойством замены.*

В силу п. в) и д) достаточно доказать, что свойством замены обладают делимые группы и группы, являющиеся прямыми суммами изоморфных между собой групп $Z(p^n)$.

Пусть A — делимая группа, и пусть имеет место равенство (1). Возьмем подгруппу E группы M, максимальную по отношению к свой-

ствам $E = \bigoplus_i E_i$, где $E_i \subseteq C_i$, и $E \cap A = 0$. Докажем, что для подгрупп E_i выполнено (2). Если φ: $M \to M/E$ — естественный гомоморфизм, то $\varphi(A) \cong A$ — подгруппа группы $M/E = \bigoplus_i (C_i/E_i)$, где группы C_i/E_i отождествлены с $(C_i + E)/E$. Так как E — максимальная подгруппа с указанными выше свойствами, то $\varphi(A) \cap (C_i/E_i)$ — существенная подгруппа группы C_i/E_i. Следовательно,

$$\bigoplus_i [\varphi(A) \cap (C_i/E_i)],$$

а тогда и $\varphi(A)$, — существенная подгруппа группы M/E. Так как для группы $\varphi(A)$ не существует собственных существенных расширений, то $\varphi(A) = M/E$, откуда $M = A \oplus E$.

Пусть теперь $A = \oplus Z(p^n)$, где p^n фиксировано. Предположим, что справедливо равенство (1), где группы C_i удовлетворяют условию $p^n C_i = 0$. Тогда можно провести те же рассуждения, что и в предыдущем случае, кроме последней фразы. Вместо этого можно заметить, что из $p^n(M/E) = 0$ в силу строения группы A следует, что M/E не может быть собственным существенным расширением группы $\varphi(A) \cong A$. Таким образом, снова $\varphi(A) = M/E$ и $M = A \oplus E$. ∎

Обратимся теперь к другим классам групп. Прежде всего ясно, что группа обладает свойством замены тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ее редуцированная часть. Поэтому достаточно рассматривать только редуцированные группы. До сих пор для редуцированных групп со свойством замены никакого удовлетворительного описания не получено.

Можно доказать, что свойством замены обладают также алгебраически компактные группы [достаточно исследовать полные группы]. Свойство замены для полных и периодически полных групп получается аналогичным образом. Для удобства мы ограничимся периодически полными группами, а рассмотрение полных групп вынесем в упражнения.

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 72.2 (Кроули и Йонсон [1]). *Периодически полные группы обладают свойством замены.*

Пусть A — периодически полная p-группа, и пусть выполнено равенство (1), где группы C_i изоморфны подгруппам группы A. Тогда C_i — сепарабельные p-группы, и по предложению 71.2 существует такое целое число m, что

$$p^m A[p] \subseteq C_1 \oplus \ldots \oplus C_k = C'$$

[конечная прямая сумма]. Из теоремы 27.7 следует, что группа A обладает прямым разложением $A = A_1 \oplus A_2$, где $p^m A_2 = 0$, причем $A_1[p] \subseteq C'$. В силу п. в) и теоремы 72.1 группу A_2 можно не рассматривать. Группа A_1, очевидно, является периодически полной.

Поэтому группа $\pi A_1 \cong A_1$, где π — проекция группы M на C', также периодически полная. Так как A_1 — сервантная подгруппа группы M, легко проверить, что πA_1 — сервантная подгруппа группы C'. Поэтому $C' = \pi A_1 \oplus N'$ для некоторой подгруппы $N' \subseteq C'$. Так как A_1 и πA_1 — сервантные подгруппы группы M, имеющие одинаковые цоколи, то из леммы 66.1 вытекает, что в прямой сумме $\oplus C_i$ слагаемое $C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$ можно заменить на $A_1 \oplus N'$. Следовательно, нам нужно только проверить, что периодически полные p-группы обладают конечным свойством замены.

Начав снова с периодически полной p-группы A и группы $M = A \oplus N = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$, где $C_1, \ldots, C_k$ — сепарабельные p-группы, образуем прежде всего периодическое пополнение группы M

$$\overline{M} = A \oplus \overline{N} = \overline{C}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{C}_k.$$

Пусть $B = \bigoplus_n B_n$ [где B_n — прямая сумма циклических групп порядка p^n] — базисная подгруппа группы A. Как было показано в теореме 72.1, каждая из групп B_n обладает свойством замены, поэтому мы можем последовательно для каждого n получить разложение

$$\overline{M} = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \overline{C}_1^{(n)} \oplus \ldots \oplus \overline{C}_k^{(n)},$$

где всегда $\overline{C}_i^{(n)}$ — прямое слагаемое группы $\overline{C}_i^{(n-1)}$. Очевидно, что слагаемое, дополнительное к $\overline{C}_i^{(n)}$ в группе $\overline{C}_i^{(n-1)}$, должно быть прямой суммой циклических групп порядка p^n. Отсюда следует, что группа $\overline{M}$ имеет базисную подгруппу вида $B \oplus D_1 \oplus \ldots \oplus D_k$, где при любом i группа D_i — прямое слагаемое базисной подгруппы группы $\overline{C}_i$. По теореме 71.3 имеем $\overline{M} = A \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$, где $E_i = D_i^{-} \cong \overline{D}_i$. Отсюда

$$M = A \oplus [(E_1 \oplus \ldots \oplus E_k) \cap M],$$

где второе слагаемое является пересечением подгруппы $E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ с $C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$ в группе $\overline{C}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{C}_k$ и поэтому равно $(E_1 \cap C_1) \oplus \ldots \oplus (E_k \cap C_k)$. Это завершает доказательство. ∎

Следующий пример показывает, что неограниченные прямые суммы циклических p-групп в общем случае свойством замены не обладают.

Пример (Кроули и Йонсон [1]). Пусть $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle b_n \rangle$, $C = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle c_n \rangle$, где $o(b_n) = o(c_n) = p^n$ при любом n. Прямая сумма $M = B \oplus C$ может быть разложена также следующим образом:

$$M = A \oplus B = C \oplus D, \quad \text{где} \quad A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle c_n + pb_{n+1} \rangle, \qquad D = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle b_n + pc_{n+1} \rangle.$$

Предположим, что существуют такие подгруппы $C' \subseteq C$, $D' \subseteq D$, что $M = A \oplus C' \oplus D'$. Тогда $A \oplus C' \subseteq A + C \subseteq A + pB$, откуда следует, что

каждый элемент b_n может быть записан в виде $b_n = a + pb + d$, где $a \in A$, $b \in B$, $a + pb \in A \oplus C'$, $d \in D'$. Из $p^n b_n = 0$ получается $p^n d = 0$. Так как $M = A \oplus B$, то элемент $p^k(b_n - a) = p^{k+1}b + p^k d$ имеет высоту k, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, откуда $h(p^k d) = k$. Отсюда сразу получаем, что $\langle d \rangle$ — сервантная подгруппа, т. е. прямое слагаемое группы D'. Следовательно, для любого n группа D' имеет прямое слагаемое порядка p^n. Сравнение базисных подгрупп теперь дает $C' = 0$. Но $A + D$ не содержит ни b_1, ни c_1. Это показывает, что группа A свойством замены не обладает.

Упражнения

1. (а) Для бесконечных сумм утверждение в) места не имеет.

(б) Пусть $A = \oplus A_j$ — такая группа, что для любой ее подгруппы X справедливо разложение

$$X = \oplus (A_j \cap X).$$

Доказать, что если каждая из групп A_j обладает свойством замены, то и группа A обладает свойством замены.

2. Показать, что никакая неограниченная p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп, не обладает свойством замены.

3. Бесконечная прямая сумма неограниченных периодически полных p-групп не обладает свойством замены [p фиксировано].

4 (Кроули и Йонсон [1]). Доказать, что если группа A обладает свойством замены для некоторого множества индексов I мощности 2, то она обладает конечным свойством замены.

5 (Кроули и Йонсон [1]). Если группа A обладает свойством замены для всех таких множеств индексов I, что $|I| \leqslant |A|$, то группа A обладает свойством замены.

6 (Кроули и Йонсон [1]). Для неразложимой группы конечное свойство замены влечет за собой свойство замены.

7. Группа Q_p обладает свойством замены. [*Указание*: если $Q_p \oplus N = C \oplus D$, то, используя проекции, получаем, что или $Q_p \to C \xrightarrow{\sigma} Q_p$, или $Q_p \to D \to Q_p$ — автоморфизм группы Q_p; если автоморфизмом оказывается первое отображение, то группу C можно заменить группой $Q_p \oplus \operatorname{Ker} \sigma$.]

8* (Уорфилд [2]). Неразложимая группа обладает свойством замены тогда и только тогда, когда ее кольцо эндоморфизмов является локальным кольцом. [*Указание*: для доказательства достаточности провести рассуждения как в упр. 7; если $\xi - \eta = 1_A$, где эндоморфизмы ξ, η не являются автоморфизмами, то

$$M = A \oplus A = \operatorname{Im}(\xi \oplus \eta)\nabla_A \oplus \operatorname{Im}\Delta_A$$

и ни первое, ни второе слагаемое не порождает вместе с третьим слагаемым всю группу M.]

9 (Уорфилд [3]). Полная группа обладает свойством замены. [*Указание*: используя теорему 39.9, свести вопрос к конечному свойству замены и p-адическим модулям; вести рассуждения как в доказательстве теоремы 72.2; некоторых дополнительных усилий требует только вопрос о существовании базисной подгруппы нужного вида.]

10. (а) Используя упр. 9, показать, что всякая сервантная вполне характеристическая подгруппа полной группы обладает конечным свойством замены. [*Указание*: как в доказательстве теоремы 72.2, перейти к пополнениям, применить упр. 9 и лемму 9.3.]

(б) Вывести из п. (а) теорему 72.2.

11. Пусть A — сепарабельная p-группа, обладающая свойством замены, и пусть эта группа служит прямым слагаемым для $\oplus C_i$, где C_i — сепарабельные p-группы. Тогда существует такое целое число m, что $p^m A[p]$ содержится в конечной прямой сумме групп C_i. [*Указание*: использовать пример и п. (в)].

§ 73. Прямые суммы периодически полных групп

Как мы уже отмечали, до сих пор прямые суммы циклических p-групп и периодически полные p-группы — это, по существу, единственные классы сепарабельных p-групп, для которых существует удовлетворительная структурная теория. Естественно ожидать, что существует класс групп, содержащий оба указанных класса, для которого некоторые из полученных результатов остаются справедливыми.

Колеттис [2] выдвинул идею исследования p-групп вида $B \oplus C$, где B — прямая сумма циклических групп, а C — периодически полная группа. Более естественным обобщением рассматриваемых классов групп является класс прямых сумм периодически полных групп. В последнее время эти группы привлекали большое внимание, и их теория оказалась хорошо развитой. Изучение класса этих групп составляет тему настоящего параграфа. Излишне говорить, что, не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением p-групп.

Мы начнем с некоторых предварительных рассуждений, которые представляют и самостоятельный интерес. Будем называть p-группу A *сервантно полной*, если всякий ее подцоколь служит носителем сервантной подгруппы группы A. В силу теоремы 66.3 достаточно знать, что все замкнутые подцоколи группы A служат носителями сервантных подгрупп.

Легко видеть, что прямые слагаемые G сервантно полных групп A сами являются сервантно полными. В самом деле, если $\pi\colon A \to G$ — проекция на слагаемое G и C — сервантная подгруппа группы A, носителем которой служит подцоколь S группы G, то πC — сервантная подгруппа группы G, носитель которой — подцоколь S.

Лемма 73.1 (Хилл и Меджиббен [3]). *Если* $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$, *где все* A_n *— периодически полные группы, то* A *— сервантно полная группа.*

Если A *— сервантно полная группа и* C *— прямая сумма циклических* p*-групп, то* $A \oplus C$ *— также сервантно полная группа.*

Прежде всего покажем, что периодически полная p-группа A обязательно является сервантно полной. Докажем даже несколько большее:

если S — подцоколь группы A, G — ее сервантная подгруппа и $G[p] \subseteq S$, то в A существует сервантная подгруппа H, содержащая подгруппу G, носителем которой служит S. Пусть L' является p-базисом группы G, и пусть L есть p-независимое множество в A, максимальное по отношению к свойствам $L' \subseteq L$, $\langle L\rangle[p] \subseteq S$. Тогда $B' = \langle L\rangle$ служит прямым слагаемым для базисной подгруппы B группы A, скажем $B = B' \oplus B''$, и $A = \overline{B}' \oplus \overline{B}''$. Здесь $S \subseteq \overline{B}'[p]$, так как подгруппа $\langle L\rangle[p]$ плотна в S. Простая ссылка на теорему 66.3 показывает, что подгруппа H с нужными свойствами существует.

Предположим теперь, что $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n — периодически полные p-группы, и пусть S — подцоколь группы A. Тогда $S_n = S \cap (A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)$ — подцоколь периодически полной группы $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Следовательно, S_n — носитель сервантной подгруппы G_n группы $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. По предыдущему абзацу подгруппы G_n можно выбрать так, чтобы выполнялись включения $G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n \subseteq \ldots$. Очевидно, $G = \bigcup_n G_n$ — сервантная подгруппа, носителем которой служит S.

Прямую сумму C циклических p-групп можно рассматривать как объединение возрастающей последовательности $C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq \ldots$ ограниченных сервантных подгрупп. Если группа A сервантно полна и S — подцоколь группы $A \oplus C$, то пусть $S_n = (A \oplus C_n) \cap S$. Предположим, что выбрана такая монотонная последовательность $G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n$ сервантных подгрупп $G_j \subseteq A \oplus C_j$, что $G_j[p] = S_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда $(G_n + S_{n+1})/G_n$ — дискретный подцоколь группы $(A + C_{n+1})/G_n$, т. е. носитель сервантной подгруппы G_{n+1}/G_n. Непосредственно видно, что $G_{n+1}[p] = S_{n+1}$ и что G_{n+1} — сервантная подгруппа группы $A \oplus C$. Объединение $G = \bigcup_n G_n$ обладает нужными свойствами, и $A \oplus C$ — снова сервантно полная группа. ∎

Если C — прямое слагаемое группы A, то существует проекция π: $A \to C$. Ограничение отображения π на цоколь порождает проекцию $A[p] \to C[p]$, при которой высоты элементов не уменьшаются. Следовательно, необходимым условием для того, чтобы подцоколь S некоторой p-группы A служил носителем какого-либо ее прямого слагаемого, является существование проекции группы $A[p]$ на S, при которой высоты элементов не уменьшаются. Интересно, что для сервантно полных групп легко установить обратное:

Лемма 73.2 (Хилл [10]). *Пусть π — проекция цоколя сервантно полной p-группы A, при которой высоты элементов не уменьшаются. Тогда* $\operatorname{Im}\pi$ *служит носителем прямого слагаемого группы A.*

Пусть G и H — сервантные подгруппы группы A с носителями $\operatorname{Im}\pi$ и $\operatorname{Im}(1-\pi)$ соответственно. Тогда $A[p]$ — цоколь подгруппы $G \oplus H$. Чтобы проверить, что $G \oplus H = A$, достаточно показать, что высота любого элемента $a \in A[p]$ в группе A меньше или равна его

высоте в $G \oplus H$. Но это действительно так, потому что высота элемента a в $G \oplus H$ равна $\min \{h(\pi a), h((1-\pi) a)\}$ [высота элементов из G и H в этих подгруппах равна их высоте в группе A], а обе высоты $h(\pi a)$ и $h((1-\pi) a)$ больше или равны высоте элемента a в группе A в силу свойств отображения π. ∎

Обратимся к основной теме этого параграфа. Наша первая задача — найти критерии, при которых сепарабельная p-группа принадлежит классу прямых сумм периодически полных групп. В общем случае удовлетворительного критерия здесь не найдено, но для счетных прямых сумм p-групп имеется довольно простой результат [где под полнотой следует понимать полноту в индуктивной p-адической топологии]:

Предложение 73.3. *Сепарабельная p-группа A является прямой суммой счетного числа периодически полных групп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям*

1) *$A[p]$ есть объединение возрастающей последовательности полных подцоколей S_n $(n = 1, 2, \ldots)$;*

2) *всякий полный подцоколь группы A служит носителем сервантной подгруппы.*

Если $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$, где каждая группа A_n периодически полная, то подцоколи $S_n = A_1[p] \oplus \ldots \oplus A_n[p]$ удовлетворяют условию 1), а условие 2) вытекает из леммы 73.1.

Обратно, если группа A удовлетворяет условиям 1) и 2), то пусть G_n — сервантная подгруппа группы A, носителем которой служит S_n. По теореме 70.6 группа G_n является периодически полной. Она содержит прямое слагаемое G'_{n-1}, носителем которого служит S_{n-1}, $G_n = G'_{n-1} \oplus A_n$, где, очевидно, группа A_n также периодически полная [можно положить $G_1 = A_1$]. Подгруппы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ порождают в A подгруппу, являющуюся их прямой суммой и содержащую цоколь группы A. Так как $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ служит прямым слагаемым для группы A, то $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ — сервантная подгруппа группы A. Следовательно, $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n = A$. ∎

Важно отметить такое непосредственное следствие полученного результата:

Следствие 73.4 (Ирвин, Ричмен, Уокер [1]). *Всякое прямое слагаемое G счетной прямой суммы A периодически полных групп само является прямой суммой счетного числа периодически полных групп.*

Если S_n означает то же, что и в предложении 73.3, п. 1), то подцоколь $T_n = G \cap S_n$ замкнут в S_n и, следовательно, является полным. Очевидно, $G[p] = \bigcup T_n$. Далее, группа G как прямое слагаемое

сервантно полной группы есть сервантно полная группа. Простая ссылка на предложение 73.3 завершает доказательство. ∎

В прямых суммах периодически полных групп цоколи играют основную роль. Убедительным доказательством этого служит следующая теорема:

Теорема 73.5 (Хилл [5]). *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ *и* $G = \bigoplus_{j \in J} G_j$ — *сервантные подгруппы некоторой p-группы* H, *причем* $A[p] = G[p]$, *а каждая из групп* A_i, G_j *периодически полная. Тогда* $A \cong G$.

Из леммы 71.1 непосредственно следует, что для любого i существуют такое разложение $A_i = B_i \oplus C_i$ и такое конечное подмножество $J(i)$ множества индексов J, что B_i — ограниченная группа и $C_i[p] \subseteq \bigoplus_{j \in J(i)} G_j$. По лемме 73.1 последняя группа содержит сервантную подгруппу C_i' с носителем $C_i[p]$, служащую прямым слагаемым по теореме 70.6. Кроме того, группа G обладает прямым слагаемым B_i' с цоколем $B_i[p]$. Из леммы 66.1 следует, что имеют место изоморфизмы $C_i' \cong C_i$ и $B_i' \cong B_i$. Подгруппы B_i', C_i' $(i \in I)$ порождают в группе G подгруппу E, являющуюся их прямой суммой, и требуемый изоморфизм будет установлен, если мы покажем, что $E = G$.

Так как известно, что $E[p] = G[p]$ и $E \subseteq G$, нам нужно только проверить, что ни у одного элемента x цоколя высота в E не может быть меньше, чем высота в G. Если x имеет в A высоту k, то все координаты элемента x в B_i' и C_i' имеют высоту $\geqslant k$, и их сумма имеет высоту $\geqslant k$ в E. ∎

Последняя теорема имеет важное следствие, касающееся изоморфизма прямых сумм периодически полных групп.

Пусть A — прямая сумма периодически полных p-групп. Так как A — сепарабельная группа, то в силу теоремы 7.2 она является [хаусдорфовым] метрическим пространством в метрике $\delta(a, b) = \|a - b\| = \exp(-h(a - b))$, где $a, b \in A$. Цоколь $A[p]$ является метрическим векторным пространством над простым полем характеристики p, а всякий изоморфизм между группой A и некоторой группой G индуцирует изометрию между $A[p]$ и $G[p]$.

Теорема 73.6 (Хилл [5]). *Пусть* A *и* G — *прямые суммы периодически полных p-групп. Группы* A *и* G *изоморфны тогда и только тогда, когда между их цоколями* $A[p]$ *и* $G[p]$ *существует изометрия.*

Наше утверждение окажется простым следствием теоремы 73.5, если мы сможем показать, что группы A и G можно вложить в качестве сервантных подгрупп с одним и тем же цоколем в некоторую p-группу. Пусть φ — изометрическое отображение пространства $A[p]$ на $G[p]$, т. е. изоморфное отображение группы $A[p]$ на $G[p]$, сохраняющее высоты элементов. Если B — базисная подгруппа группы A, то $\varphi(B[p])$ — носитель базисной подгруппы C группы G и существует

изоморфизм $\varphi^*: B \to C$, продолжающий φ. Кроме того, изоморфизм φ^* можно продолжить по теореме 68.4 до изоморфизма $\bar\varphi: \bar B \to \bar C$. Отображение $\bar\varphi$ индуцирует вложение группы A в $\bar C$, причем в $\bar C$ получается сервантная подгруппа, цоколь которой совпадает с цоколем группы G. ∎

Продолжим изучение слагаемых прямых сумм периодически полных групп. Из следствия 73.4 мы знаем, что они сами являются прямыми суммами периодически полных групп, если прямые суммы имеют счетное число компонент. Следующая теорема показывает, что условие счетности может быть отброшено.

Теорема 73.7 (Ирвин, Ричмен, Уокер [1], Хилл [10]). *Прямое слагаемое прямой суммы периодически полных групп само является прямой суммой периодически полных групп.*

Пусть $A = \bigoplus_{\sigma \in I} A_\sigma$, где A_σ — периодически полные p-группы [p фиксировано]. Чтобы можно было провести трансфинитную индукцию, выберем в качестве множества индексов I множество всех порядковых чисел, меньших первого порядкового числа ω_τ некоторой мощности $\aleph_\tau$. Положив $A = G \oplus H$ и взяв проекцию $\pi: A \to G$, покажем, что G — прямая сумма периодически полных групп.

Во-первых, для каждой группы A_σ напишем разложение $A_\sigma = B_\sigma \oplus C_\sigma$, где B_σ — ограниченная группа, а $\pi C_\sigma[p]$ содержится в прямой сумме конечного числа групп A_ρ; возможность такого разложения обеспечивается леммой 71.1. Теперь $B = \bigoplus_\sigma B_\sigma$ — прямая сумма циклических групп, и мы имеем $A = B \oplus \bigoplus_\sigma C_\sigma = G \oplus H$.

Во-вторых, установим существование цепочки

$$\varnothing = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_\sigma \subseteq \ldots \quad (\sigma < \omega_\tau)$$

подмножеств множества I со свойствами (i) $\sigma \in I_{\sigma+1}$; (ii) $I_\sigma = \bigcup_{\rho<\sigma} I_\rho$, если σ — предельное порядковое число; (iii) $|I_\sigma| \leqslant \aleph_0 |\sigma|$; и, наконец,

(iv) $$\pi\,(\bigoplus_{\rho \in I_\sigma} C_\rho[p]) \subseteq \bigoplus_{\rho \in I_\sigma} A_\rho = A^*_\sigma.$$

Все, что нам нужно сделать,— это указать, как получить множество $I_{\sigma+1}$ из I_σ, если $I_\sigma \neq I$. Возьмем первое порядковое число σ', не лежащее в I_σ [оно больше или равно σ], и выберем конечное подмножество $I(\sigma')$ множества I, для которого $\pi C_{\sigma'}[p] \subseteq \bigoplus_{\rho \in I(\sigma')} A_\rho$. Повторим этот процесс для каждого $\rho \in I(\sigma') \setminus I_\sigma$, затем поступим аналогично снова и т. д. ω раз и возьмем в качестве $I_{\sigma+1}$ объединение множества I_σ с $I(\sigma')$ и всеми другими получившимися по ходу дела конечными подмножествами. Очевидно, что $I_{\sigma+1}$ будет тогда обладать свойствами (i), (iii), (iv).

Вернемся теперь к группе B и представим ее в виде объединения возрастающей последовательности прямых слагаемых

$$0 = B'_0 \subseteq B'_1 \subseteq \ldots \subseteq B'_\sigma \subseteq \ldots \quad (\sigma < \omega_\tau),$$

где

$$B'_\sigma \subseteq \bigoplus_{\rho \in I_\sigma} B_\rho \quad \text{и} \quad \pi B'_\sigma[p] \subseteq A^*_\sigma.$$

Это можно сделать, так как каждое циклическое прямое слагаемое группы B и его образ при π должны принадлежать A^*_σ при некотором σ. Легко проверить, что существуют такие сервантные подгруппы B^*_σ групп A^*_σ, что $B^*_\sigma[p] = B'_\sigma[p]$. Подгруппы B^*_σ тоже являются прямыми суммами циклических групп, такими, что при любом σ

$$C^*_\sigma = B^*_\sigma \oplus \bigoplus_{\rho \in I_\sigma} C_\rho$$

— такое прямое слагаемое группы A^*_σ, что $\pi C^*_\sigma[p] \subseteq A^*_\sigma$. Ясно, что $\bigcup_\sigma C^*_\sigma = A$, как так $\bigcup_\sigma C^*_\sigma$ — сервантная подгруппа группы A с цоколем $A[p]$. Следовательно, $\bigcup_\sigma \pi C^*_\sigma[p] = G[p]$.

Первый шаг индукции основывается на том, что по лемме 73.1 группа A^*_1 является сервантно полной. Следовательно, из леммы 73.2 вытекает, что существует прямое слагаемое K_1 группы A^*_1, носителем которого служит $\pi C^*_1[p]$, $A^*_1 = K_1 \oplus L_1$. В силу следствия 73.4 группы K_1 и L_1 — счетные прямые суммы периодически полных p-групп.

Теперь можно проводить доказательство с помощью трансфинитной индукции. Пусть для любого порядкового числа $\tau' < \tau$ мы установили, что (1) образ всякой проекции цоколя прямой суммы $\aleph_{\tau'}$ периодически полных групп, не уменьшающей высоты элементов, служит носителем прямого слагаемого группы и (2) всякое прямое слагаемое прямой суммы $\aleph_{\tau'}$ периодически полных групп может быть представлено в виде прямой суммы не более чем $\aleph_{\tau'}$ периодически полных групп. Это означает, что для любого $\sigma < \omega_\tau$ мы имеем $A^*_\sigma = K_\sigma \oplus L_\sigma$, где $K_\sigma[p] = \pi C^*_\sigma[p]$, а L_σ — прямая сумма меньше чем $\aleph_\tau$ периодически полных групп. Очевидно,

$$A^*_{\sigma+1} = K_\sigma \oplus (L_\sigma \oplus \bigoplus_{\rho \in I_{\sigma+1} \setminus I_\sigma} A_\rho).$$

Пусть φ — проекция группы $A^*_{\sigma+1}$ на второе слагаемое. Тогда $K_{\sigma+1}[p] = K_\sigma[p] \oplus H$, где по предположению индукции подгруппа $H = \varphi\pi C^*_{\sigma+1}[p]$ служит носителем прямого слагаемого G_σ группы A, являющегося прямой суммой меньше чем $\aleph_\tau$ периодически полных групп. Легко проверить, что подгруппы G_σ $(\sigma < \omega_\tau)$ порождают в A подгруппу, являющуюся их прямой суммой, и что $\bigoplus_{\sigma < \omega_\tau} G_\sigma = G'$ — сервантная подгруппа группы A. Заметим теперь, что $G'[p]$ содержится в $\pi A = G$ и содержит все подгруппы $K_\sigma[p]$, откуда, очевидно, сле-

дует, что $G'[p] = G[p]$. Наконец, из леммы 66.1 получаем $G \cong G' = \bigoplus_\sigma G_\sigma$, и это завершает доказательство. ∎

В заключение приведем теорему о продолжении разложений.

Теорема 73.8 (Кроули и Йонсон [1], Энокс [1], Хилл [10]). *Если A — прямая сумма периодически полных групп, то любые два прямых разложения группы A обладают изоморфными продолжениями.*

В силу теоремы 73.7 достаточно рассматривать прямые разложения $A = \bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{j \in J} A'_j$, где все группы A_i, A'_j периодически полные. Мы можем предположить, что A является p-группой.

Допустим сначала, что I и J — счетные множества, и для простоты положим $I = J = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Подцоколи $S_n = (A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)[p] \cap (A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_n)[p]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют возрастающую цепочку, объединение которой совпадает с $A[p]$. Каждый подцоколь S_n является полным, поэтому $S_{n+1} = S_n \oplus S^*_n$ для некоторого полного подцоколя S^*_n. Легко проверить, что если C_n и C'_n — [периодически полные] прямые слагаемые групп $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_n$ соответственно, носителем которых служит S^*_n, то $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_n = \bigoplus_{n=1}^{\infty} C'_n$. По лемме 66.1 имеем $C_n \cong C'_n$, и из следствия 71.4 получается, что любые два продолжения последних двух разложений группы A обладают изоморфными продолжениями. Таким образом, достаточно найти изоморфные продолжения разложений $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n = \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_n$, где при любом n подгруппа $C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$ служит прямым слагаемым для $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Мы построим последовательно группы $C_{ji} \cong A_{ij}$ $(i \leqslant j)$, такие, что

$$C_j = C_{j1} \oplus \ldots \oplus C_{jj} \quad \text{и} \quad A_i = A_{ii} \oplus A_{i,\, i+1} \oplus \ldots$$

при всех i, j. Положив $C_1 = C_{11} = A_{11}$, $A_1 = A_{11} \oplus A'_{11}$, предположим, что для $i \leqslant j \leqslant n$ группы $C_{ji} \cong A_{ij}$ уже выбраны так, что $C_j = C_{j1} \oplus \ldots \oplus C_{jj}$, $A_i = A_{ii} \oplus \ldots \oplus A_{in} \oplus A'_{in}$ при любых j, $i \leqslant n$ и $C_1 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus A'_{1n} \oplus \ldots \oplus A'_{nn} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Прибавляя к обеим частям A_{n+1} и используя свойство замены для группы $C_1 \oplus \ldots \oplus C_{n+1}$, получаем такие разложения $A'_{in} = A_{i,\, n+1} \oplus A'_{i,\, n+1}$ $(i \leqslant n)$ и $A_{n+1} = A_{n+1,\, n+1} \oplus A'_{n+1,\, n+1}$, что

$$C_{n+1} \cong A_{1,\, n+1} \oplus \ldots \oplus A_{n+1,\, n+1}$$

и

$$C_1 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus C_{n+1} \oplus A'_{1,\, n+1} \oplus \ldots \oplus A'_{n+1,\, n+1} =$$
$$= A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus A_{n+1}.$$

Так как $\bigoplus_j A_{ij}$ — сервантная подгруппа группы A_i, цоколь которой не может быть меньше цоколя A_i, то $\bigoplus_j A_{ij} = A_i$. Это завершает доказательство в случае, когда системы индексов счетны.

Обратимся к общему случаю. В силу леммы 71.1 существует разложение $A_i = B_i \oplus C_i$, где B_i — ограниченная группа, а $C_i[p] \subseteq \subseteq \bigoplus_{j \in J(i)} A'_j$ для некоторого конечного подмножества $J(i)$ множества J. Это дает новое разложение $A = B \oplus \bigoplus_{i \in I} C_i$, где $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$ — прямая сумма циклических групп. Если нужно, изменив B, мы можем предположить, что C_i — неограниченная периодически полная группа при любом $i \in I$. Таким же образом получается, что существует разложение $A'_j = B'_j \oplus C'_j$, где B'_i — ограниченная группа и $C'_j[p] \subseteq \bigoplus_{i \in I(j)} C_i$ для соответствующего конечного подмножества $I(j)$ множества I. Можно написать $A = B' \oplus \bigoplus_{j \in J} C'_j$, где B' — прямая сумма циклических групп, а C'_j — неограниченные периодически полные группы. Покажем, что разложения

$$A = B \oplus \bigoplus_{i \in I} C_i = B' \oplus \bigoplus_{j \in J} C'_j \qquad (1)$$

имеют изоморфные продолжения. Как легко убедиться, это все, что нужно доказать.

Начнем с построения двух трансфинитных последовательностей множеств

$$\varnothing = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_\sigma \subseteq \ldots \quad \text{и} \quad \varnothing = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \ldots \subseteq J_\sigma \subseteq \ldots,$$

где (I) $\bigcup_\sigma I_\sigma = I$ и $\bigcup_\sigma J_\sigma = J$; (II) $|I_{\sigma+1} \setminus I_\sigma| \leqslant \aleph_0$ и $|J_{\sigma+1} \setminus J_\sigma| \leqslant \aleph_0$; (III) $I_\sigma = \bigcup_{\rho < \sigma} I_\rho$ и $J_\sigma = \bigcup_{\rho < \sigma} J_\rho$, если σ — предельное порядковое число, и

(IV) $$\bigoplus_{j \in J_\sigma} C'_j[p] \subseteq \bigoplus_{i \in I_\sigma} C_i[p] \subseteq B' \oplus \bigoplus_{j \in I_\sigma} C'_j[p] \text{ для любого } \sigma.$$

Нам нужно только уметь построить $I_{\sigma+1}$ и $J_{\sigma+1}$ по I_σ и J_σ. Заметим, что $I_\sigma = I$ в точности тогда, когда $J_\sigma = J$. Если существует индекс $i \in I \setminus I_\sigma$, то положим $K_0 = \{i\}$, $L_0 = J(i)$, $K_n = \bigcup_{j \in L_{n-1}} I(j)$, $L_n = = \bigcup_{i \in K_n} J(i)$ и

$$I_{\sigma+1} = I_\sigma \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad J_{\sigma+1} = J_\sigma \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n.$$

Ясно, что условия (II) и (IV) [где в последнем σ заменено на $\sigma+1$] здесь выполнены. Положив $I^*_\sigma = I \setminus I_\sigma$, $J^*_\sigma = J \setminus J_\sigma$, получим

$$A = B \oplus \bigoplus_{i \in I_\sigma} C_i \oplus \bigoplus_{i \in I^*_\sigma} C_i = B' \oplus \bigoplus_{j \in J_\sigma} C'_j \oplus \bigoplus_{j \in J^*_\sigma} C'_j.$$

Из условия (IV) и леммы 66.2 следует, что существует такая подгруппа E_σ группы A, изоморфная подгруппе группы B', с носителем $\bigoplus_{i\in I_\sigma} C_i \cap B'[p]$, что

$$A = B \oplus \bigoplus_{j\in J_\sigma} C'_j \oplus E_\sigma \oplus \bigoplus_{i\in I^*_\sigma} C_i. \tag{2}$$

Сравнивая это разложение с аналогичным разложением, полученным для $\sigma+1$, и заметив, что $E_\sigma[p] \subseteq E_{\sigma+1}[p]$, снова в силу леммы 66.2 заключаем, что для некоторой подгруппы F_σ группы $E_{\sigma+1}$ справедливо разложение

$$A = B \oplus \bigoplus_{j\in J_{\sigma+1}} C'_j \oplus E_\sigma \oplus F_\sigma \oplus \bigoplus_{i\in I^*_{\sigma+1}} C_i.$$

Отсюда получаем

$$\bigoplus_{j\in J_{\sigma+1}\setminus J_\sigma} C'_j \oplus F_\sigma \cong \bigoplus_{i\in I_{\sigma+1}\setminus I_\sigma} C_i. \tag{3}$$

Положив $F_0 = 0$, с помощью трансфинитной индукции можно показать, что $E_\sigma[p] = \bigoplus_{\rho<\sigma} F_\rho[p]$ и $\bigoplus_{\rho<\sigma} F_\rho$ — сервантная подгруппа группы A при любом σ. Если $I_\tau = I$, $J_\tau = J$ для некоторого порядкового числа τ, то $F = \bigoplus_{\rho<\tau} F_\rho$ — сервантная подгруппа группы A и $F[p] = E_\tau[p]$. Таким образом, лемма 66.1 дает

$$A = B \oplus \bigoplus_{j\in J} C'_j \oplus F.$$

Следовательно,

$$B \oplus \bigoplus_{\rho<\tau} F_\rho \cong B'. \tag{4}$$

Так как в обоих разложениях в формуле (3) содержится лишь счетное число слагаемых, являющихся периодически полными группами, эти разложения обладают изоморфными продолжениями. В силу (4) сразу получается, что разложения из формулы (1) также имеют изоморфные продолжения. ∎

Упражнения

1 (Хилл и Меджиббен [3]). Если A — сервантно полная p-группа, а C — периодически полная p-группа с конечными инвариантами Ульма — Капланского, то $A \oplus C$ — сервантно полная группа.

2* (Хилл и Меджиббен [3]). Прямая сумма двух сервантно полных p-групп не обязана быть сервантно полной. [*Указание*: используя теорему 66.4, построить две неизоморфные сервантные подгруппы G и H группы A, имеющие один и тот же цоколь, причем так, чтобы G была квазиполной группой в смысле § 74; вывести из предложения 74.3, что H также является квазиполной группой; по следствию 74.2 группы G и H сервантно полны, но в прямой сумме $A \oplus A$ подцоколь

$S = \{(x, x) \mid x \in G[p] = H[p]\}$ не служит носителем ни для какой сервантной подгруппы.]

3 (Катлер [1]). Если pA — прямая сумма периодически полных p-групп, то A также является прямой суммой периодически полных групп.

4 (Хилл [10]). Существуют такая счетная прямая сумма A периодически полных p-групп и такая сепарабельная p-группа C, что $A[p]$ и $C[p]$ — изометричные векторные пространства, но группы A и C не изоморфны. [*Указание*: упр. 8 из § 66.]

5. *Сужением* метрического пространства называется отображение этого пространства в себя, при котором расстояния не увеличиваются. Показать, что если π — сужение векторного пространства $A[p]$, являющееся в то же время проекцией, и A — сервантно полная p-группа, то $\operatorname{Im}\pi$ — носитель прямого слагаемого группы A.

6 (Хилл [10]). Подцоколь S прямой суммы A циклических p-групп служит носителем прямого слагаемого группы A тогда и только тогда, когда S является образом проекции группы $A[p]$, при которой высоты элементов не уменьшаются.

7 (Колеттис [2]). Если A — прямая сумма периодически полных p-групп, которые почти все являются ограниченными, то каждое прямое слагаемое группы A снова имеет тот же вид.

8 (Энокс [1]). В любых двух разложениях данной p-группы в прямую сумму периодически полных групп число неограниченных компонент одинаково, если хотя бы одно из этих чисел бесконечно.

9. Пусть G — прямое слагаемое прямой суммы периодически полных p-групп A_i $(i \in I)$, где ровно $\mathfrak{m}$ из групп A_i являются неограниченными $(\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0)$. Тогда всякое прямое разложение группы G содержит не более $\mathfrak{m}$ неограниченных слагаемых.

§ 74. Квазиполные группы

В этом параграфе мы рассмотрим одно важное свойство периодически полных групп. Первым обратил на него внимание Хед [1]. Оказалось, что этим свойством обладает и несколько более широкий класс групп.

Назовем редуцированную периодическую группу A *квазиполной*, если замыкание G^- [естественно, в Z-адической топологии группы A] всякой сервантной подгруппы G группы A также сервантно в A.

Приведем сначала несколько простых замечаний, поясняющих это понятие.

а) *Редуцированная периодическая группа A является квазиполной тогда и только тогда, когда для любой сервантной подгруппы G группы A утверждение «G замкнута» эквивалентно утверждению «A/G — редуцированная группа».* Заметим, что из равенства $G^-/G = (A/G)^1$ следует, что подгруппа G^- сервантна в A в том и только в том случае,

когда подгруппа $(A/G)^1$ сервантна в A/G. А это имеет место тогда и только тогда, когда $(A/G)^1$ — делимая группа.

б) *Квазиполные группы сепарабельны.* Это ясно, так как $0^- = A^1$.

в) *Сепарабельная периодическая группа является квазиполной, если G^- — сервантная подгруппа для любой ее неограниченной сервантной подгруппы G.* В самом деле, ограниченные сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми и, следовательно, в сепарабельных периодических группах они обязательно замкнуты.

г) *Периодическая группа является квазиполной тогда и только тогда, когда каждая ее p-компонента — квазиполная группа.*

д) *Периодически полные группы являются квазиполными.* Это очевидно в силу следствия 68.9.

е) *В квазиполной группе замыкание сервантной подгруппы также является квазиполной группой.*

Особенно интересна следующая характеризация квазиполноты.

Теорема 74.1 (Ирвин, Ричмен и Уокер [1], Ķояма [1]). *Редуцированная p-группа A является квазиполной тогда и только тогда, когда для любой ее сервантной подгруппы C и любого подцоколя S со свойством $C[p] \subseteq S$ существует сервантная подгруппа G группы A с носителем S, содержащая C.*

Пусть A — квазиполная группа и G — ее подгруппа, максимальная среди тех сервантных подгрупп группы A, содержащих C, носители которых являются подгруппами группы S. Чтобы доказать, что $G[p] = S$, предположим противное, и пусть $x \in S \setminus G$. Если смежный класс $x + G$ имеет в группе A/G конечную высоту n, то запишем $x + G = p^n y + G$, где $p^{n+1} y = 0$, и заметим, что $\langle y + G \rangle$ — прямое слагаемое группы A/G. Следовательно, $G \oplus \langle y \rangle$ — сервантная подгруппа, носителем которой служит подцоколь $G[p] \oplus \langle x \rangle \subseteq S$. Если смежный класс $x + G$ имеет бесконечную высоту, то из квазиполноты следует, что он содержится в некоторой подгруппе $H/G \cong Z(p^\infty)$. Подгруппа H сервантна в A и ее носитель равен $G[p] \oplus \langle x \rangle \subseteq S$. Полученное противоречие показывает, что $G[p] = S$.

Обратно, если группа A обладает указанным в формулировке теоремы свойством, то, взяв сначала $S = A^1[p]$, мы получим, что A^1 — делимая группа, т. е. 0. Далее, для любой сервантной подгруппы C возьмем сервантную подгруппу G, содержащую C, цоколь которой равен $C^-[p]$. Тогда G/C — сервантная подгруппа группы A/C с цоколем $(A/C)^1[p]$. По § 20, п. В), группа G/C делима, и $G = C^-$. Таким образом, группа A квазиполная. ∎

Следствие 74.2 (Хилл и Меджиббен [2]). *Всякая квазиполная группа является сервантно полной.* ∎

Следующий результат дает для квазиполноты характеризацию другого типа. Здесь под замыканием мы будем понимать замыкание

в $\bar{B}$, где B — базисная подгруппа группы A, а группу A будем считать подгруппой группы $\bar{B}$.

Предложение 74.3 (Хилл и Меджиббен [2]). *Сепарабельная p-группа A является квазиполной тогда и только тогда, когда*

$$A[p]+S^{-}=\bar{B}[p]$$

для любого недискретного подцоколя S группы A.

Пусть A — квазиполная группа и S — ее недискретный подцоколь. Проведя такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 33.1, можно получить сервантную подгруппу C группы A, являющуюся прямой суммой циклических групп и такую, что $C[p]$ плотно в S. Так как подцоколь S недискретен, подгруппа C должна быть неограниченной, поэтому она в силу леммы 35.1 содержит такую базисную подгруппу C', что $C/C' \cong Z(p^{\infty})$. Пусть элемент $c \in C \setminus C'$ имеет порядок p^2, и пусть b — элемент порядка p группы $\bar{B}$. Легко построить прямую сумму D циклических групп, являющуюся такой сервантной подгруппой группы A, что $D[p]=C'[p]$ и $b+c \in D^{-}$. В силу квазиполноты группы A замыкание $D^{-} \cap A$ подгруппы D в A сервантно в A. Отсюда и из $pc \in D^{-} \cap A$ получаем, что $pc=pa$ для некоторого $a \in D^{-} \cap A$. Таким образом, $b=(b+c-a)-(c-a) \in$ $\in D^{-}[p]+A[p] \subseteq S^{-}+A[p]$, откуда $\bar{B}[p] \subseteq S^{-}+A[p]$.

Обратно, предположим, что условие, сформулированное в предложении, выполнено, и пусть G — неограниченная сервантная подгруппа группы A. Нам нужно проверить, что замыкание $G^{-} \cap A$ подгруппы G в группе A сервантно в A. Если $pa \in G^{-} \cap A$ при некотором $a \in A$, то пусть элементы $g \in G$, $h \in G^{-}$ таковы, что $ph=pa+g$; такие элементы существуют, так как $\bar{B}$ — периодически полная группа и, таким образом, G^{-}/G — делимая группа. Отсюда $p(h-a)=g=$ $=pg'$ для некоторого $g' \in G$. Элемент $h-(a+g') \in \bar{B}[p]$ по условию имеет вид $a'+h'$, где $a' \in A[p]$, $h' \in G^{-}[p]$. Это означает, что элемент $h-h'=a+a'+g' \in G^{-} \cap A$ дает решение уравнения $px=pa+G$ в группе A/G. Следовательно, подгруппа $(G^{-} \cap A)/G$ слабо сервантна в A/G и, значит, делима, а тогда подгруппа $G^{-} \cap A$ сервантна в A. ∎

Из предыдущей теоремы легко получается

Следствие 74.4 (Хилл и Меджиббен [2]). *Пусть B — базисная подгруппа квазиполной p-группы A и $B \subseteq A \subseteq \bar{B}$. Если группа A содержит базисную подгруппу некоторого неограниченного прямого слагаемого H группы $\bar{B}$, то $A+H=\bar{B}$.*

Если группа A содержит базисную подгруппу группы H, то $(A+H)/A \cong H/(A \cap H)$ — делимая группа. Поэтому подгруппа $A+H$ сервантна в $\bar{B}$. Из предложения 74.3 вытекает, что $\bar{B}[p] \subseteq$ $\subseteq A+H$. Отсюда $A+H=\bar{B}$. ∎

Следующий результат дает еще одно замечательное характеристическое свойство квазиполных групп.

Предложение 74.5 (Хилл и Меджиббен [2]). *Для квазиполноты сепарабельной p-группы A необходимо и достаточно, чтобы факторгруппа A/G при любой неограниченной сервантной подгруппе G группы A была прямой суммой делимой группы и периодически полной p-группы.*

Достаточность непосредственно следует из п. а). Для доказательства необходимости предположим, что A — квазиполная группа, и пусть H — замыкание неограниченной сервантной подгруппы G группы A, причем замыкание взято в группе $\bar{B}$. Тогда H служит для $\bar{B}$ прямым слагаемым [ср. следствие 68.9], а так как группа A содержит базисную подгруппу [группы G, а значит, и] группы H, то из следствия 74.4 вытекает, что $A + H = \bar{B}$. В силу квазиполноты группы A имеем, что $(A \cap H)/G = (A/G)^1$ — делимая группа. Поэтому группа A/G изоморфна прямой сумме делимой группы и группы $A/(A \cap H) \cong$ $\cong (A + H)/H = \bar{B}/H$, которая изоморфна прямому слагаемому группы $\bar{B}$. ∎

Следствие 74.6. *Если A — квазиполная, но не периодически полная p-группа, то в любом ее прямом разложении одно из слагаемых является ограниченным.*

Пусть A — квазиполная группа, и пусть $A = G \oplus H$, где G и H — неограниченные группы. В силу предложения 74.5 и G и H $\oplus$ периодически полные группы. ∎

Докажем теперь другое простое утверждение, вытекающее из следствия 74.4. Оно нам понадобится в дальнейшем.

Предложение 74.7 (Хилл и Меджиббен [2]). *Пусть A — квазиполная p-группа, и пусть $B = B' \oplus B''$ — разложение базисной подгруппы B группы A в прямую сумму неограниченных слагаемых. Тогда A — подпрямая сумма групп $\bar{B}'$ и $\bar{B}''$ с сервантными ядрами.*

Во-первых, ясно, что $(A \cap \bar{B}') \oplus (A \cap \bar{B}'') \subseteq A \subseteq \bar{B}' \oplus \bar{B}''$. Ссылка на следствие 74.4 показывает, что $A + \bar{B}' = \bar{B} = A + \bar{B}''$. Следовательно, A — подпрямая сумма групп $\bar{B}'$ и $\bar{B}''$, причем ядра $A \cap \bar{B}'$ и $A \cap \bar{B}''$ сервантны как замыкания подгрупп B' и B'' соответственно в группе A. ∎

Два предыдущих результата позволяют показать, что финальный ранг квазиполной, но не периодически полной p-группы не превосходит мощности континуума, т. е. что такие группы составляют лишь небольшую часть класса всех квазиполных групп.

Теорема 74.8. *Квазиполная p-группа финального ранга $> 2^{\aleph_0}$ непременно является периодически полной.*

Пусть A — квазиполная p-группа, финальный ранг которой больше $2^{\aleph_0}$, и пусть B — ее базисная подгруппа. Предположим, что B' —

неограниченное счетное прямое слагаемое группы B, причем $B = B' \oplus B''$. По предложению 74.7 группа A — подпрямая сумма групп $\bar{B}'$ и $\bar{B}''$ с ядрами $A \cap \bar{B}'$ и $A \cap \bar{B}''$, сервантными в A. Из рассуждений § 8 следует, что группа A состоит из всевозможных пар (b', b''), где элементы b' и b'' лежат в $\bar{B}'$ и $\bar{B}''$ соответственно и при естественных отображениях $\bar{B}' \to \bar{B}'/(A \cap \bar{B}')$, $\bar{B}'' \to \bar{B}''/(A \cap \bar{B}'')$ переходят в элементы, соответствующие друг другу при некотором изоморфизме $\bar{B}'/(A \cap \bar{B}') \cong \bar{B}''/(A \cap \bar{B}'')$. Последние факторгруппы являются делимыми группами мощности $\leqslant 2^{\aleph_0}$, так как $|\bar{B}'| = 2^{\aleph_0}$. Поэтому, выбрав представители смежных классов группы $\bar{B}''$ по подгруппе $A \cap \bar{B}''$ и записав их в виде бесконечных векторов, как в § 68, мы можем для группы B'' написать такое разложение $B'' = C_1 \oplus C_2$, что все координаты этих бесконечных векторов будут лежать в C_1, причем будет выполняться неравенство $|C_1| \leqslant 2^{\aleph_0}$ и, кроме того, включение $\bar{C}_2 \subseteq A \cap \bar{B}''$, так что $\bar{C}_2$ будет прямым слагаемым группы A. Дополнительное прямое слагаемое имеет базисную подгруппу, изоморфную $B' \oplus C_1$, мощность которой $\leqslant 2^{\aleph_0}$, поэтому оно само имеет мощность не больше $2^{\aleph_0}$ по следствию 34.4. Если финальный ранг группы A больше $2^{\aleph_0}$, то и финальный ранг $\bar{C}_2$ должен быть больше $2^{\aleph_0}$, т. е. $\bar{C}_2$ не может быть ограниченной группой. Из следствия 74.6 вытекает, что группа A периодически полная. ∎

Следующий пример, найденный Хиллом и Меджиббеном [2], показывает, что существуют квазиполные p-группы, не являющиеся периодически полными.

П р и м е р. Пусть $\bar{B}$ — периодически полная группа с базисной подгруппой $B \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$. Очевидно, $|\bar{B}| = 2^{\aleph_0}$ и $\bar{B}$ обладает $2^{\aleph_0}$ счетными подмножествами. Всякое неограниченное прямое слагаемое группы $\bar{B}$ определяется базисной подгруппой, являющейся счетной группой, поэтому $\bar{B}$ имеет [не больше, а поэтому ровно] $2^{\aleph_0}$ неограниченных слагаемых. Эти слагаемые H_σ можно перенумеровать с помощью порядковых чисел $\sigma < \omega_1$, где ω_1 — первое порядковое число мощности $2^{\aleph_0}$. Пусть $C = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle c_n \rangle$ — такой счетный подцоколь группы $\bar{B}$, что $B[p] \cap C = 0$. Мы хотим выбрать элементы $h_{\rho n}$ и подгруппы T_σ в $\bar{B}[p]$ так, чтобы при любом $\sigma < \omega_1$

1) $h_{\rho n} \in H_\rho$ для всякого $\rho < \sigma$ и $n = 1, 2, \ldots$;

2) $T_\sigma = B[p] \oplus \bigoplus_{\rho<\sigma} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle h_{\rho n} - c_n \rangle$;

3) $T_\sigma \cap C = 0$.

Начав с $T_0 = B[p]$, проведем трансфинитную индукцию. Пусть для всех $\rho < \sigma$ и $n = 1, 2, \ldots$ элементы $h_{\rho n}$ уже выбраны так, что выпол-

няются условия 2), 3). Заметим, что

$$|T_\sigma+C|\leqslant|\sigma|\aleph_0+\aleph_0<2^{\aleph_0}, \quad \text{а } |H_\sigma[p]|=2^{\aleph_0},$$

следовательно, $H_\sigma[p]$ содержит такие элементы $h_{\sigma n}$ ($n = 1, 2, \ldots$), что определяемые ими смежные классы по подгруппе $T_\sigma + C$ независимы. Если определить $T_{\sigma+1}$ при помощи формулы 2), используя эти элементы $h_{\sigma n}$, то условие 3) будет выполнено. Очевидно, что

$$T\cap C=0 \quad \text{для} \quad T=B[p]\oplus\bigoplus_{\rho<\omega_1}\bigoplus_{n=1}^{\infty}\langle h_{\rho n}-c_n\rangle.$$

Пусть T^* — такой подцоколь в $\overline{B}[p]$, что $T\subseteq T^*$, причем T^* — максимальный подцоколь со свойством $T^*\cap C = 0$, т. е. $T^*+C = \overline{B}[p]$. Тогда подцоколь T^* плотен в $\overline{B}[p]$ и по теореме 66.3 служит носителем сервантной подгруппы A группы $\overline{B}$. Ясно, что группа A не является периодически полной, так как ее цоколь не замкнут в $\overline{B}[p]$, т. е. не полон. Чтобы показать, что группа A — квазиполная, используем предложение 74.3. Если S — недискретный подцоколь группы A, то S^- служит носителем неограниченной сервантной подгруппы H группы $\overline{B}$. По лемме 65.2 подгруппа H замкнута в группе $\overline{B}$, поэтому по следствию 68.9 подгруппа H совпадает с одной из подгрупп H_σ. В силу условий 1) и 2) получаем соотношения

$$A[p]+S^-=A[p]+H_\sigma[p]\supseteq T^*+C=\overline{B}[p].$$

Теперь предложение 74.3 показывает, что A — квазиполная группа, что и требовалось.

Используя изложенную здесь теорию квазиполных групп, можно получить следующую характеризацию периодически полных p-групп.

Предложение 74.9 (Кояма [1]). *Редуцированная p-группа A является периодически полной тогда и только тогда, когда для любой сервантной подгруппы G группы A подгруппа G^- выделяется в группе A прямым слагаемым.*

Необходимость этого условия была доказана в следствии 68.9. Обратно, если группа A обладает указанным свойством, то из п. а) следует, что она квазиполна. Достаточно рассмотреть неограниченные группы A. Если $B = B' \oplus B''$ — такая группа, как в предложении 74.7, то, поскольку замыкание $A\cap\overline{B}'$ подгруппы B' в группе A выделяется прямым слагаемым, $A = (A\cap\overline{B}')\oplus H$, где H — неограниченная группа [с базисной подгруппой, изоморфной B'']. Теперь из следствия 74.6 вытекает, что A — периодически полная группа. ∎

Упражнения

1. В любой редуцированной группе без кручения замыкание сервантной подгруппы всегда сервантно.

2. (Хед [1]). Квазиполная p-группа является прямой суммой циклических групп тогда и только тогда, когда она — ограниченная группа.

3. Прямая сумма квазиполной группы и ограниченной группы снова является квазиполной группой.

4. Всякий замкнутый подцоколь квазиполной p-группы служит носителем квазиполной сервантной подгруппы этой группы.

5* (Хилл и Меджиббен [2]). Пусть $\overline{B}$ — неограниченная периодически полная p-группа мощности $2^{\aleph_0}$ и C — произвольный счетный подцоколь группы $\overline{B}$. Существует такая сервантная квазиполная подгруппа A группы $\overline{B}$, что $A \cap C = 0$ и $\overline{B}/A$ — делимая группа.

6. Предполагая справедливой гипотезу континуума, показать, что финальный ранг всякой квазиполной p-группы, не являющейся периодически полной, равен $2^{\aleph_0}$.

§ 75. Прямые разложения p-групп

Сепарабельные периодические группы обладают многими прямыми разложениями; в самом деле, каждый элемент такой группы может быть вложен в конечное прямое слагаемое этой группы. Однако мы не выясняли, что можно сказать о прямых слагаемых бо́льших мощностей или о существовании прямых разложений с бо́льшим числом слагаемых. До сих пор не существует законченной теории, касающейся этих вопросов, поэтому при рассмотрении прямых разложений приходится довольствоваться изложением некоторых не связанных между собой результатов.

A) Начнем с интересного факта, связанного с нашей проблемой 5.

Теорема 75.1 (Хилл [18], Кроули и Меджиббен [1]). *Существует такая p-группа A мощности $\aleph_1$, не являющаяся прямой суммой циклических групп, что всякая ее счетная подгруппа содержится в прямом слагаемом этой группы, являющемся прямой суммой циклических групп.*

Для любого порядкового числа σ, меньшего первого несчетного порядкового числа ω_1, выберем счетную неограниченную сепарабельную p-группу C_σ и построим группы

$$G = \prod_\sigma C_\sigma \quad \text{и} \quad H = \bigoplus_\sigma C_\sigma.$$

Для любого $\sigma < \omega_1$ положим $G^{(\sigma)} = \prod_{\rho < \sigma} C_\rho$ и $\overline{G}^{(\sigma)} = \prod_{\sigma \leqslant \rho} C_\rho$, так что $G = G^{(\sigma)} \oplus \overline{G}^{(\sigma)}$ при любом $\sigma < \omega_1$. Если X — подгруппа группы G, то пусть $X^{(\sigma)} = X \cap G^{(\sigma)}$ и $\overline{X}^{(\sigma)} = X \cap \overline{G}^{(\sigma)}$. Элементы g группы G мы можем считать бесконечными векторами, σ-е координаты $g(\sigma)$ которых лежат в C_σ.

Для любого предельного порядкового числа $\lambda < \omega_1$ выберем последовательность $x_{\lambda 1}, \ldots, x_{\lambda n}, \ldots \in G$ со следующими свойствами:

1) $x_{\lambda n}(\sigma) = 0$ при всех n и всех $\sigma \geqslant \lambda$;

2) при любом n и любом $\sigma < \lambda$ для почти всех $\rho < \sigma$ имеет место равенство $x_{\lambda n}(\rho) = 0$;

3) для подгруппы $X_\lambda = \langle x_{\lambda 1}, \ldots, x_{\lambda n}, \ldots \rangle$ выполнено условие $(X_\lambda + H^{(\lambda)})/H^{(\lambda)} \cong Z(p^\infty)$.

Такие элементы $x_{\lambda n}$ найти легко [возьмем порядковые числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$, стремящиеся к λ, и выберем такой элемент $x_{\lambda n}$ с носителем $\{\sigma_n, \sigma_{n+1}, \ldots\}$, что $px_{\lambda n}(\sigma_m) = x_{\lambda, n-1}(\sigma_m)$ при $m \geqslant n$].

Пусть A — подгруппа группы G, порожденная подгруппой H и подгруппами X_λ, где $\lambda < \omega_1$ — предельные порядковые числа. Тогда A — сепарабельная p-группа мощности $\aleph_1$ со свойством $A = \bigcup_{\sigma < \omega_1} A^{(\sigma)}$. Здесь каждая подгруппа $A^{(\sigma)}$ счетна [следовательно, является прямой суммой циклических групп] и всякое счетное подмножество группы A содержится в некоторой подгруппе $A^{(\sigma)}$ $(\sigma < \omega_1)$. Так как $A = A^{(\sigma)} \oplus \oplus \bar{A}^{(\sigma)}$ для любого $\sigma < \omega_1$, то остается лишь показать, что сама группа A не является прямой суммой циклических групп.

Предположим, что, напротив, $A = \bigoplus_{i \in I} K_i$, где K_i — счетные группы. Начнем с любой группы K_{i_0}. Существует предельное порядковое число $\lambda_1 < \omega_1$, для которого $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{\sigma < \lambda_1} A^{(\sigma)}$. Далее, существуют такое счетное подмножество $I_1 \subset I$ и такое предельное порядковое число $\lambda_2 < \omega_1$, что $\bigcup_{\sigma < \lambda_1} A^{(\sigma)} \subseteq \bigoplus_{i \in I_1} K_i \subseteq \bigcup_{\sigma < \lambda_2} A^{(\sigma)}$. Повторяя этот процесс, найдем счетное подмножество J множества I и предельное порядковое число $\lambda < \omega_1$, для которых $\bigoplus_{i \in J} K_i = \bigcup_{\sigma < \lambda} A^{(\sigma)}$. Последняя группа является, таким образом, прямым слагаемым группы A, а значит, и группы $A^{(\lambda)}$. Так как $A^{(\lambda)} = X_\lambda + \bigcup_{\sigma < \lambda} A^{(\sigma)}$ и факторгруппа $A^{(\lambda)} / \bigcup_{\sigma < \lambda} A^{(\sigma)} \neq 0$ является эпиморфным образом группы $(X_\lambda + H^{(\lambda)})/H^{(\lambda)} \cong Z(p^\infty)$, то группа $A^{(\lambda)}$ должна иметь прямое слагаемое $Z(p^\infty)$. Полученное противоречие показывает, что группа A не может быть прямой суммой счетных групп, что и требовалось. ∎

Б) Назовем группу A *квазинеразложимой*, если для любого ее прямого разложения справедливо следующее утверждение: для всякого кардинального числа $\mathfrak{p} < |A|$ в заданном разложении группы A имеется слагаемое S мощности $|S|$, большей $\mathfrak{p}$. Из определения ясно, что

а) счетная p-группа квазинеразложима тогда и только тогда, когда она неограниченна;

б) если $|A| = \aleph_\sigma$, где σ — непредельное порядковое число, то группа A квазинеразложима в точности тогда, когда в любом ее прямом разложении одно из слагаемых имеет ту же мощность, что и сама группа A.

Теорема 75.2 (Куликов [1], [2]). *Для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существуют квазинеразложимые сепарабельные p-группы мощности $\mathfrak{m}$.*

Случай $\mathfrak{m} = \aleph_0$ был рассмотрен в п. а). Остается рассмотреть теперь следующие три взаимно исключающие друг друга случая.

Случай I. Существует такое бесконечное кардинальное число $\mathfrak{n}$, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}^{\aleph_0}$.

Положим $B_n = \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^n)$, и пусть $\overline{B}$ — периодически полная группа с базисной подгруппой $B = \bigoplus_n B_n$. Так как $|\overline{B}| = \mathfrak{n}^{\aleph_0}$, то существует такая подгруппа A группы $\overline{B}$, что $B \subseteq A$ и $A/B \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^\infty)$. Очевидно, что $|A| = \mathfrak{m}$. Из равенства $|B| = \mathfrak{n}$ следует, что в каждом прямом разложении группы A содержится не более $\mathfrak{n}$ ненулевых слагаемых. Ясно, что, если $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, то невозможно, чтобы мощность каждого из этих слагаемых была меньше или равна $\mathfrak{p}$. Следовательно, группа A квазинеразложима.

Случай II. Для любого $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ справедливо неравенство $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}$ — непредельное кардинальное число.

Пусть $\mathfrak{m} = \aleph_{\sigma+1}$ и $\mathfrak{n} = \aleph_\sigma$, причем $\mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{n}$. Хаусдорф [Hausdorff F., *Jahresber. Deut. Math. Ver*, **13** (1904), 569—571] доказал, что $\aleph_{\sigma+1}^{\aleph_\rho} = \aleph_\sigma^{\aleph_\rho} \cdot \aleph_{\sigma+1}$ для любой пары порядковых чисел ρ, σ. При $\rho = 0$ это дает $\mathfrak{m}^{\aleph_0} = \mathfrak{m}$. Пусть теперь A — периодически полная группа с базисной подгруппой $B = \bigoplus_n B_n$, где $B_n = \bigoplus_{\mathfrak{m}} Z(p^n)$. Ясно, что $|A| = \mathfrak{m}$ и $\operatorname{fin} r(A) = \mathfrak{m}$. Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — произвольное прямое разложение группы A и m — такое целое число, что почти все группы $p^m A_i$ равны нулю [см. теорему 71.3], то одна из этих групп $p^m A_i$ должна иметь мощность $\mathfrak{m}$. Это доказывает квазинеразложимость группы A.

Случай III. Для любого $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ справедливо неравенство $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}$ — предельное кардинальное число.

Представим $\mathfrak{m}$ в виде суммы таких кардинальных чисел $\mathfrak{m}_\sigma$ $(\sigma < \tau)$, что $[\mathfrak{m}_\sigma^{\aleph_0} = \mathfrak{m}_\sigma$ и$]$ $\mathfrak{m}_\sigma$ стремятся к $\mathfrak{m}$. Для каждого σ возьмем периодически полную группу $A(\sigma)$ с базисной подгруппой $B(\sigma) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{m}_\sigma} Z(p^n)$ и положим $A = \bigoplus_\sigma A(\sigma)$. Так как мощность группы A равна $\mathfrak{m}$, нужно только проверить, что группа A квазинеразложима. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} G_i$ — прямое разложение группы A. Если дано σ, то по предложению 71.2 существует такое целое число m, что $p^m A(\sigma)[p]$ содержится в прямой сумме конечного числа групп G_i. Очевидно, что мощность одной из этих групп должна быть не меньше $\mathfrak{m}_\sigma$. Так как кардинальные числа $\mathfrak{m}_\sigma$ стремятся к $\mathfrak{m}$, отсюда следует, что группа A квазинеразложима.

Случаями I — III исчерпываются все возможности, и теорема доказана. ∎

B) Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Группа A называется *$\mathfrak{m}$-неразложимой*, если она не может быть представлена в виде прямой суммы $\mathfrak{m}$ ненулевых групп. Тривиальным образом получается, что $\mathfrak{m}$-неразложимость влечет за собой $\mathfrak{n}$-неразложимость при любом $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$ и что группы мощности $< \mathfrak{m}$ всегда $\mathfrak{m}$-неразложимы.

Приведем несколько нетривиальных примеров $\mathfrak{m}$-неразложимых p-групп.

Пример 1. Пусть для кардинальных чисел $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ выполнены неравенства $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}^{\aleph_0}$. Возьмем в качестве A периодически полную группу с базисной подгруппой $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^n)$. Из $\mathfrak{n}^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0} \leqslant (\mathfrak{n}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$ следует, что $|A| = \mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Предположим, что $A = \bigoplus_{i \in I} S_i$. Здесь $|I| \leqslant |B| = \mathfrak{n}\aleph_0$, так что группа A является $\mathfrak{m}$-неразложимой, если $\mathfrak{n}$ бесконечно. Если $\mathfrak{n}$ конечно, то все ограниченные прямые слагаемые группы A конечны, и из теоремы 71.3 сразу следует, что множество I конечно.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{m}$ — кардинальное число, для которого $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ всегда влечет за собой $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$, но существует счетное число таких кардинальных чисел $\mathfrak{n}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{n}_n \leqslant \ldots$, меньших $\mathfrak{m}$, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{n}_n = \mathfrak{m}$. Из теории множеств следует [Hausdorff, Mengenlehre, 3rd. ed., 1935, p. 36], что справедливо неравенство $\sum \mathfrak{n}_n = \mathfrak{m} < \prod \mathfrak{n}_n$. Очевидно,

$$\mathfrak{m}^{\aleph_0} \leqslant \left(\prod \mathfrak{n}_n\right)^{\aleph_0} = \prod \mathfrak{n}_n^{\aleph_0} \leqslant \prod \mathfrak{m}^{\aleph_0} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $\mathfrak{n}_n^{\aleph_0} = \mathfrak{n}_n$; тогда $\prod \mathfrak{n}_n = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Возьмем в качестве A периодически полную группу с базисной подгруппой $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = \bigoplus_{\mathfrak{n}_n} Z(p^n)$. Ясно, что $|A| = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Если $A = \bigoplus_{i \in I} G_i$ и m — такое целое число, что почти все группы $p^m G_i$ равны нулю, то $|I| \leqslant \mathfrak{n}_m$. Это доказывает $\mathfrak{m}$-неразложимость группы A.

Докажем теперь, что $\mathfrak{m}$-неразложимые p-группы при любых $\mathfrak{m}$, не обладающих указанными в этих примерах свойствами, имеют мощность $< \mathfrak{m}$.

Теорема 75.3 (Селе [16], Фукс [5]). *$\mathfrak{m}$-неразложимые [редуцированные] p-группы мощности $\geqslant \mathfrak{m}$ существуют тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *существует такое кардинальное число $\mathfrak{n}$, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}^{\aleph_0}$;*
2) *$\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ влечет за собой $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$ и существует счетное множе-*

ство таких кардинальных чисел $\mathfrak{n}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{n}_n \leqslant \ldots$, *что* $\mathfrak{n}_n < \mathfrak{m}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{n}_n = \mathfrak{m}$.

Для завершения доказательства рассмотрим такие кардинальные числа $\mathfrak{m}$, что для любого кардинального числа $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ справедливо $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$ и для любого счетного множества кардинальных чисел $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n, \ldots$, меньших $\mathfrak{m}$, выполнено неравенство $\sum \mathfrak{n}_n < \mathfrak{m}$. Остается показать, что для любого такого кардинального числа $\mathfrak{m}$ не существует $\mathfrak{m}$-неразложимых p-групп мощности $\geqslant \mathfrak{m}$.

Допустим, что $\mathfrak{m}$ — такое кардинальное число и A — некоторая $\mathfrak{m}$-неразложимая p-группа мощности $\geqslant \mathfrak{m}$. Пусть $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = \bigoplus_{\mathfrak{n}_n} Z(p^n)$,— базисная подгруппа группы A. Так как B_n служит для группы A прямым слагаемым, то обязательно $\mathfrak{n}_n < \mathfrak{m}$ при любом n, откуда в силу предположения относительно $\mathfrak{m}$ получаем $\sum \mathfrak{n}_n < \mathfrak{m}$. С другой стороны, из следствия 34.4 вытекает, что $\mathfrak{m} \leqslant |A| \leqslant |B|^{\aleph_0} = (\sum \mathfrak{n}_n)^{\aleph_0}$, откуда снова в силу наших предположений относительно $\mathfrak{m}$ имеем $\mathfrak{m} \leqslant \sum \mathfrak{n}_n$. Полученное противоречие завершает доказательство. ∎

Заметим, что в ходе доказательства мы установили, что в $\mathfrak{m}$-неразложимой p-группе A обязательно $\mathfrak{n}_n < \mathfrak{m}$, т. е. что $|B| \leqslant \mathfrak{m}$. Это дает верхнюю границу $|A| \leqslant |B|^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ для мощностей $\mathfrak{m}$-неразложимых p-групп A. Это и еще одно следствие из доказательства можно выразить так:

Следствие 75.4. *Всякая $\mathfrak{m}$-неразложимая p-группа имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Если существует $\mathfrak{m}$-неразложимая p-группа мощности $\geqslant \mathfrak{m}$, то существует и сепарабельная $\mathfrak{m}$-неразложимая p-группа мощности $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$.* ∎

Упражнения

1 (Хилл [18]). Для любого несчетного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует такая группа A, что сама она не является прямой суммой циклических групп, но всякое ее счетное подмножество содержится в ее счетном прямом слагаемом, являющемся прямой суммой циклических групп. [*Указание*: прямые суммы групп из теоремы 75.1.]

2 (Кроули и Меджиббен [1]). Показать, что если заменить в доказательстве теоремы 75.1 группы C_σ неограниченными счетными редуцированными группами и выбрать X_λ так, чтобы вместо $Z(p^\infty)$ получались подходящие делимые группы, то возникающая при этом группа A не является прямой суммой счетных групп, но такова, что всякое ее счетное подмножество содержится в ее счетном прямом слагаемом.

3. Периодически полная p-группа A, финальный ранг $\operatorname{fin} r(A)$ которой равен $|A|$, квазинеразложима.

4. Всякая неограниченная квазиполная p-группа, имеющая счетную базисную подгруппу, квазинеразложима. [*Указание*: см. следствие 74.6.]

5. Группа A является $\mathfrak{m}$-неразложимой тогда и только тогда, когда ранг ее делимой части меньше $\mathfrak{m}$, а ее редуцированная часть $\mathfrak{m}$-неразложима.

6* (Кхаббаз [1]). Редуцированная p-группа A является $\mathfrak{m}$-неразложимой тогда и только тогда, когда ее первый ульмовский фактор A_0 есть $\mathfrak{m}$-неразложимая группа.

7. Пусть $\mathfrak{m}$ — такое кардинальное число, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} < \mathfrak{n}^{\aleph_0}$ для некоторого кардинального числа $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$. Тогда для любого кардинального числа $\mathfrak{p}$, для которого выполняются неравенства $\mathfrak{m} < \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0}$, существует $\mathfrak{m}$-неразложимая p-группа мощности $\mathfrak{p}$. [*Указание*: модифицировать упр. 1.]

8. (а) Счетных бесконечных редуцированных $\aleph_0$-неразложимых p-групп не существует. [*Указание*: теорема Цыпина 76.2.]

(б)* (Кхаббаз [1]) $\mathfrak{m}$-неразложимых редуцированных p-групп мощности $\mathfrak{m} > \aleph_0$ не существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}$ — такое кардинальное число, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ влечет за собой $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$.

9 (Фукс [5]). Периодическая группа T является $\mathfrak{m}$-неразложимой в точности тогда, когда ее p-компоненты T_p $\mathfrak{m}$-неразложимы, а их базисные подгруппы B_p таковы, что равенство $|B_p| = \mathfrak{m}$ выполняется не более чем для конечного множества простых чисел p и $\sum_q |B_q| < \mathfrak{m}$, где суммирование распространяется на остальные простые числа q.

10*. Используя теорему существования 76.1, показать, что множество неизоморфных $\mathfrak{m}$-неразложимых p-групп мощности $\geqslant \mathfrak{m}$ или пусто, или имеет мощность $2^{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

Замечания

Работы Прюфера [1] — [3] представляют собой, несомненно, первое систематическое изложение теории бесконечных абелевых p-групп. В работе [2] Прюфер опубликовал наиболее важную теорему 17.3, а также теорему 17.2 для счетного случая. Десятилетием позже Бэр заметил, что условие счетности в теореме 17.2 можно отбросить: ограниченные p-группы любой мощности являются прямыми суммами циклических групп. Уже Прюфер [1] установил, что p-группы без элементов бесконечной высоты могут не быть прямыми суммами циклических групп, если их мощность равна мощности континуума. Селе [11] отметил, что то же имеет место для мощности $\aleph_1$. Тем самым он прояснил теоретико-множественную основу теоремы 17.3.

Структурная теория сепарабельных p-групп была вновь оживлена Куликовым [1], [2]. Это он доказал общий критерий 17.1 разложимости p-группы в прямую сумму циклических групп, ввел понятие базисной подгруппы и периодически полных p-групп [он назвал их замкнутыми p-группами]. Он доказал, кроме того, что все сепарабельные p-группы являются сервантными подгруппами, лежащими между своими базисными подгруппами B и соответствующими группами $\overline{B}$. Этот результат до сих пор является одним из наиболее содержательных результатов о произвольных сепарабельных p-группах. В теорему 68.4 внесли свой вклад несколько авторов: эквивалентность условий 1) и 4) была доказана

Куликовым [2] для сепарабельных p-групп и распространена Паппом [1] на случай произвольных редуцированных p-групп, а свойство инъективности 3) было отмечено Лептином [1] для одного частного случая. Полнота группы $\overline{B}$ относительно ограниченных последовательностей Коши была доказана уже Куликовым [2]; но важное замечание, что эта полнота должна рассматриваться в топологии, задаваемой широкими подгруппами, было сделано Шарлем только в 1967 г.

Первый шаг на пути объединения теории прямых сумм циклических p-групп с теорией периодически полных групп был сделан Колеттисом [2], который рассматривал прямые суммы циклических p-групп и периодически полной группы. Более общий и более естественный класс прямых сумм периодически полных p-групп впервые появился почти одновременно в работе Энокса [1] и в одной из проблем Фукса [23]. В 60-х годах для этого класса групп были получены один за другим многочисленные результаты. Важный вклад в рассматриваемый вопрос сделал Хилл [5] и [10], но до сих пор удовлетворительной характеризации этого класса групп нет; предложение 73.3 — очень скромная попытка заполнить пробел.

До сих пор поиски удовлетворительных инвариантов для сепарабельных p-групп были не особенно успешными. Наиболее интересна теорема Лептина 69.1, но она новых инвариантов не дает. Бьюмонт и Пирс [8] ввели новые инварианты, но их требуется значительно больше. Рассматривался также вопрос об инвариантах относительно квазиизоморфизмов, но в основном без всякой реальной пользы для общей структурной теории.

Лучше поддается изучению класс квазиполных p-групп, введенный Хедом [1]. Однако это крайне изолированный класс в противоположность классу сервантно полных p-групп, который весьма широк. Об этом последнем классе мало что известно, кроме нескольких примеров и небольшого числа разрозненных результатов.

Неожиданные примеры сепарабельных p-групп A были даны Корнером [7]. Он доказал, что для любого натурального числа m существует такая группа A, что прямая сумма n групп, изоморфных A, изоморфна прямой сумме k групп, изоморфных A, в точности тогда, когда $n \equiv k \bmod m$.

Кроули и Йонсон [1] исследовали свойство замены для произвольных алгебраических систем; они доказали большинство теорем из § 72. Связанный с этим вопрос об изоморфных продолжениях для некоторых p-групп рассматривал Кроули [4]. Было нелегко указать p-группу, в которой теорема о существовании изоморфных продолжений разложений неверна (ср. Корнер и Кроули [1]). И свойство замены, и вопрос об изоморфных продолжениях для групп и модулей рассмотрел в серии интересных работ Уорфилд [2], [3] [Warfield R., *Pacific J. Math.* 31 (1969), 263—276] и т. д. В частности, он доказал, что 1) инъективные модули обладают свойством замены; 2) неразложимый модуль обладает свойством замены в точности тогда, когда его кольцо эндоморфизмов является локальным кольцом; 3) модуль обладает свойством замены тогда и только тогда, когда его кольцо эндоморфизмов, рассматриваемое как модуль над собой, обладает этим свойством 4) для прямых сумм модулей со свойством замены справедлива теорема о существовании изоморфных продолжений разложений.

Проблема 51. Охарактеризовать сепарабельные p-группы с помощью инвариантов.

Проблема 52. Определить мощность множества неизоморфных сепарабельных p-групп мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$.

Проблема 53. Построить достаточно большие системы p-групп, в которых все гомоморфизмы одних членов системы в другие являются малыми.

Проблема 54. Является ли периодически полной сепарабельная p-группа A, которая содержит такую периодически полную подгруппу G, что A/G — периодически полная группа?

Проблема 55 (Пирс [1]). Существуют ли в основном неразложимые p-группы сколь угодно большого финального ранга? [p-группа называется *в основном неразложимой*, если в любом ее прямом разложении одно из слагаемых ограниченное.]

Проблема 56. Для каких кардинальных чисел $\mathfrak{m}$ существует p-группа, которая не является прямой суммой циклических групп, но в которой любая подгруппа мощности $< \mathfrak{m}$ — прямая сумма циклических групп?

Нунке [6] доказал существование таких p-групп для $\mathfrak{m} = \aleph_n$, где $n = 1, 2, \ldots$ [1]).

Проблема 57. Какие группы обладают свойством замены?

Согласно результату Уорфилда, группа A обладает свойством замены в точности тогда, когда этим свойством обладает кольцо $\mathbf{R} = \mathbf{E}(A)$, рассматриваемое как $\mathbf{R}$-модуль.

Проблема 58. Говорят, что группа A обладает *свойством подстановки*, если $M = A \oplus H = B \oplus K$, где $A \cong B$, влечет за собой $M = C \oplus H = C \oplus K$ для некоторой подгруппы C группы M. Какие группы обладают этим свойством?

Кроули [5] доказал это свойство для p-групп с конечными инвариантами Ульма — Капланского. Общее рассмотрение этого свойства можно найти в работе Фукса [Fuchs L., *Monatsh. Math.*, **75** (1971), 198—204].

---

[1]) О проблеме 56 см. также работу Хилла (Hill P., *Pacific J. Math.*, **42** (1972), № 1, 63—67); о проблемах 51, 52, 53, 55, 56 — работу Шелаха (Schellach P., *Isr. J. Math.*, **18** (1974), № 3, 243—256).— *Прим. перев.*

Глава XII

p-ГРУППЫ С ЭЛЕМЕНТАМИ БЕСКОНЕЧНОЙ ВЫСОТЫ

В предыдущей главе мы изучали p-группы без ненулевых элементов бесконечной высоты. В настоящей главе мы глубже проникнем в область p-групп общего вида.

В отличие от теории сепарабельных p-групп здесь делается упор на ульмовские факторы и инварианты Ульма — Капланского. Изложение сосредоточено вокруг двух основных вопросов:

1) Выяснить, какие вполне упорядоченные последовательности p-групп являются последовательностями Ульма.

2) Указать как можно более широкий класс p-групп, в котором все члены различимы при помощи инвариантов Ульма — Капланского.

Здесь получаются результаты, каких только можно пожелать: на оба вопроса найден исчерпывающий ответ.

Первый вопрос можно решить, используя свойства ульмовских факторов, установленные в теореме 37.6. Но доказательство получается длинным и скучным, поэтому, чтобы избежать повторения растянутых рассуждений, мы выведем основной результат (теорему 76.1) из более общей теоремы 105.3, касающейся произвольных групп. Особое внимание будет уделено случаю счетных p-групп.

По второму вопросу имеется очень интересный и глубокий материал. Этот вопрос можно рассматривать с различных точек зрения, что позволило нам выбрать наиболее прозрачное изложение. Отправной точкой служит, естественно, классический результат Ульма о счетных p-группах (теорема 77.3). Этот результат приводит к наилучшему завершению структурной теории счетных p-групп. Его дальнейшим развитием является теория прямых сумм счетных p-групп [в § 78], а кульминацией — доказательство того факта, что ответом на второй вопрос служит класс тотально проективных p-групп.

Естественно, основная наша задача — исследовать свойства групп этого класса. Этот замечательный класс будет охарактеризован семью различными способами, каждый из которых выявляет ту или иную интересную особенность этих групп [подробнее см. в теоремах 81.9, 82.3, 82.5 и 83.5]. Однако класс всех p-групп тотально проективными группами не исчерпывается, а о p-группах, не входящих в этот класс, известно немного.

§ 76. Теоремы существования для p-групп

Пусть A — редуцированная p-группа. Напомним следующие обозначения: $A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A$ — подгруппа, состоящая из всех элементов группы A, имеющих в ней бесконечную высоту, $A^{\sigma+1} = (A^\sigma)^1$ и $A^\rho = \bigcap_{\sigma<\rho} A^\sigma$, если ρ — предельное порядковое число. Тогда определена вполне упорядоченная последовательность подгрупп

$$A = A^0 \supset A^1 \supset \ldots \supset A^\sigma \supset \ldots \supset A^\tau = 0$$

для некоторого порядкового числа τ. Подгруппу A^σ мы называли *σ-й ульмовской подгруппой* группы A, а факторгруппу $A_\sigma = A^\sigma/A^{\sigma+1}$ *σ-м ульмовским фактором* группы A. Вполне упорядоченная последовательность

$$A_0, A_1, \ldots, A_\sigma, \ldots \quad (\sigma < \tau) \tag{1}$$

— это *последовательность Ульма* группы A, а τ — *ульмовский тип* группы A.

Заметим, что, согласно результатам из § 37, ульмовские факторы группы A должны быть сепарабельными p-группами, причем все они, за исключением, быть может, последней группы $A_{\tau-1}$, если она вообще существует, неограниченны. Некоторые другие свойства последовательности Ульма были установлены в теореме 37.6.

Естественно спросить, каковы необходимые и достаточные условия, при которых последовательность (1) служит последовательностью Ульма для некоторой p-группы A. Необходимые условия были перечислены в теореме 37.6 для произвольных групп A, а в теореме 105.3 мы докажем, что если эти условия выполнены, то всегда существует группа A, для которой заданная последовательность служит последовательностью Ульма. Для p-групп A эти условия можно немного упростить и доказать следующую теорему существования [B_σ — базисная подгруппа группы A_σ]:

Теорема 76.1 (Куликов [3], Фукс [2]). *Пусть даны вполне упорядоченная последовательность* (1) *p-групп A_σ ($\sigma < \tau$) и кардинальное число $\mathfrak{m}$. Редуцированная p-группа A мощности $\mathfrak{m}$ и ульмовского типа τ, последовательностью Ульма которой является* (1), *существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

а) *для любого $\sigma < \tau$ группа A_σ сепарабельна*;

б) $\sum\limits_{0\leqslant\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \prod\limits_{0\leqslant n<\min(\omega,\tau)} |A_n|$;

в) $r(B_{\sigma+1}) \leqslant \operatorname{fin} r(A_\sigma)$ *при* $\sigma+1<\tau$;

г) $\sum\limits_{\rho<\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant |A_\rho|^{\aleph_0}$ *при* $0\leqslant\rho<\tau$.

Эту теорему мы получаем как следствие теоремы 105.3. Все, что нам нужно сделать,— это показать, что для p-групп условие г) эквивалентно условию $\sum\limits_{\rho<\sigma<\tau} |B_\sigma| \leqslant |B_\rho|^{\aleph_0}$. Заметим, что следствие 34.4 влечет за собой $|A_\rho|^{\aleph_0} = |B_\rho|^{\aleph_0}$, и мы получаем

$$\sum_{\rho<\sigma<\tau} |B_\sigma| \leqslant \sum_{\rho<\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant \sum_{\rho<\sigma<\tau} |B_\sigma|^{\aleph_0} \leqslant \Big(\sum_{\rho<\sigma<\tau} |B_\sigma|\Big)^{\aleph_0},$$

где последнее неравенство вытекает из неравенства

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{m}_i^{\aleph_0} \leqslant \Big(\sum_{i\in I} \mathfrak{m}_i\Big)^{\aleph_0},$$

верного для любых кардинальных чисел $\mathfrak{m}_i$ и любого множества индексов I. Теперь нужная эквивалентность неравенств очевидна. ∎

Можно немного изменить поставленный вопрос и говорить об условиях на инварианты Ульма — Капланского группы A, а не на ее ульмовские факторы. Так как инварианты Ульма — Капланского дают меньшую информацию, чем ульмовские факторы, условия на инварианты Ульма — Капланского легко вывести из более сильной теоремы 76.1. Однако следует заметить, что ульмовский тип τ нужно заменить *длиной* группы A, которая определялась в § 37 как наименьшее порядковое число ρ, для которого $p^{\rho}A = 0$.

Важным частным случаем является случай счетных p-групп A. Тогда все A_σ — счетные сепарабельные p-группы, т. е. прямые суммы циклических групп по теореме Прюфера 17.3. Ульмовский тип τ группы A, конечно, должен быть счетным порядковым числом, и легко проверить [см. упр. 2], что условие в) теперь эквивалентно условию, что A_σ при $\sigma+1<\tau$ — неограниченные группы. Таким образом, мы получаем

Следствие 76.2 (Цыпин [1]). *Счетная редуцированная p-группа A ульмовского типа τ с последовательностью Ульма A_σ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$ существует тогда и только тогда, когда*

1) τ — *счетное порядковое число*;

2) *каждая группа A_σ — счетная прямая сумма циклических p-групп, причем при $\sigma+1<\tau$ группа A_σ неограниченная.*

Ввиду большого значения этой теоремы мы дадим для нее независимое доказательство. Необходимость условий 1) и 2) очевидна [единственное нетривиальное рассуждение проводится с помощью простой леммы 37.2], так что нужно только доказать достаточность этих условий.

Пусть дана последовательность A_σ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$ p-групп, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Используем трансфинитную индукцию по τ. Если $\tau = 1$, то эта последовательность состоит только из одного члена A_0, и $A = A_0$ — искомая группа. Предположим, что $\tau \geqslant 2$ и что утверждение справедливо для всех порядковых чисел, меньших τ. Рассмотрим несколько случаев.

Случай I. Существует порядковое число $\tau-2$ и $A_{\tau-1}=\langle a\rangle$ является циклической группой, скажем, порядка p^k. Предположим, что $A_{\tau-2}= \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle b_n\rangle$, где $o(b_n)=p^{k_n}$, и положим $A'_{\tau-2}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\langle c_n\rangle$, где $o(c_n)=p^{k+k_n}$. В силу предположения индукции существует счетная редуцированная p-группа C, последовательностью Ульма которой служит последовательность $A_0, A_1, \ldots, A'_{\tau-2}$. Обозначим через A факторгруппу группы C по подгруппе L, порожденной всеми элементами $p^{k_n}c_n - p^{k_m}c_m$ $(n, m=1, 2, \ldots)$. Пусть $p^{k_n}\bar{c}_n=\bar{c}\in A$, где черта означает, что взят смежный класс по подгруппе L. Тогда очевидно, что факторгруппа $A/\langle\bar{c}\rangle$ является счетной p-группой с последовательностью Ульма $A_0, A_1, \ldots, A_{\tau-2}$. Так как множество $\{k_n\}$ неограниченно и каждый элемент $\bar{c}_n$ лежит в $A^{\tau-2}$, то $\bar{c}\in A^{\tau-1}$. Легко показать см. хотя бы пример из § 35], что группа $\langle\bar{c}\rangle$ имеет порядок p^k

и $A^{\tau-1}=\langle\bar{c}\rangle$. Следовательно, группа A имеет тип τ и обладает нужными свойствами.

Случай II. Существует порядковое число $\tau-2$ и $A_{\tau-1}=\bigoplus_{i\in I}\langle a_i\rangle$, где I — счетное множество. Разложим каждую группу A_σ $(\sigma<\tau-1)$ в прямую сумму $A_\sigma=\bigoplus_{i\in I}A_{\sigma i}$ так, чтобы ни одна из групп $A_{\sigma i}$ не была ограниченной. В силу случая I для любого $i\in I$ существует такая счетная редуцированная p-группа G_i, что ее последовательностью Ульма служит $A_{0i}, \ldots, A_{\tau-2, i}, \langle a_i\rangle$. Из леммы 37.5 следует, что заданная последовательность является последовательностью Ульма группы $A=\bigoplus_{i\in I}G_i$.

Случай III. $\tau-1$ — предельное порядковое число и $A_{\tau-1}=\langle a\rangle$, где $o(a)=p^k$. Можно выбрать последовательность $\tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots$ $(i<\omega)$ порядковых чисел, стремящуюся к τ. Разложим каждую группу A_σ $(\sigma<\tau-1)$ в прямую сумму $A_\sigma=\bigoplus_{i=1}^{\infty}A_{\sigma i}$, где $A_{\tau_i i}=\langle b_i\rangle$ — циклические группы, $A_{\sigma i}=0$ при $\sigma>\tau_i$ и $A_{\sigma i}$ — неограниченные группы при $\sigma<\tau_i$. Без ограничения общности можно предполагать, что элементы b_i удовлетворяют такому условию: для любого порядкового числа $\rho<\tau-1$ и любого целого числа m существует такое i, что $\tau_i>\rho$ и $o(b_i)=p^{k_i}>p^m$. По предположению индукции для любого i существует счетная редуцированная p-группа G_i типа τ_i+1 с последовательностью Ульма $A_{0i}, \ldots, A_{\sigma i}, \ldots, \bar{A}_{\tau_i i}=\langle c_i\rangle$, где $o(c_i)=p^{k+k_i}$. Возьмем в качестве A факторгруппу группы $\bigoplus_{i=1}^{\infty}G_i$ по подгруппе, порожденной всеми элементами $p^{k_i}c_i-p^{k_j}c_j$ $(i, j=1, 2, \ldots)$. Так же как в случае I, получается, что группа A имеет заданную последовательность Ульма.

Случай IV. $\tau-1$ — предельное порядковое число и $A_{\tau-1}=\bigoplus_{i\in I}\langle a_i\rangle$. Этот случай может быть сведен к предыдущему тем же методом, что и в случае II.

Случай V. τ — предельное порядковое число. Представим каждую группу A_σ $(\sigma<\tau)$ в виде бесконечной прямой суммы $A_\sigma=A_{\sigma\sigma}\oplus\ldots$ $\ldots\oplus A_{\sigma\rho}\oplus\ldots$ $(\sigma\leqslant\rho<\tau)$, где каждое слагаемое $A_{\sigma\rho}$ — неограниченная группа. По предположению индукции для любого $\sigma<\tau$ существует счетная редуцированная p-группа G_σ с последовательностью Ульма $A_{0\sigma}, A_{1\sigma}, \ldots, A_{\sigma\sigma}$. Тогда группа $A=\bigoplus_{0\leqslant\sigma<\tau}G_\sigma$ имеет заданную последовательность Ульма. ∎

Теперь можно определить мощность множества неизоморфных p-групп мощности $\leqslant\mathfrak{n}$.

Теорема 76.3 (Куликов [3]). *Для любого простого числа p множество неизоморфных p-групп мощности, не большей, чем бесконечное кардинальное число $\mathfrak{n}$, имеет мощность $2^{\mathfrak{n}}$.*

В § 14 мы отметили, что мощность рассматриваемого множества групп не может быть больше $2^{\mathfrak{n}}$. Обратно, пусть τ — первое порядковое число мощности $\mathfrak{n}$, и пусть

$$G_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}, \quad G_2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_{2n}, \quad \text{где} \quad C_i = \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^i).$$

Из теоремы 76.1 следует, что существует редуцированная p-группа A мощности $\mathfrak{n}$ типа τ, последовательностью Ульма которой служит последовательность групп A_σ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$, где каждая из A_σ изоморфна либо группе G_1, либо группе G_2. Существует $2^{\mathfrak{n}}$ различных способов выбора последовательности Ульма для группы A, а различные выборы, очевидно, дают неизоморфные группы A. Таким образом, мощность рассматриваемого множества не меньше $2^{\mathfrak{n}}$. ∎

Сделаем еще одно заключительное замечание. Последнее доказательство можно немного изменить, беря каждый раз группу A_0 изоморфной группе $G_1 \oplus G_2$, а другие группы A_σ выбирая равными либо G_1, либо G_2. Тогда получится $2^{\mathfrak{n}}$ неизоморфных p-групп A мощности $\mathfrak{n}$ с тем дополнительным свойством, что их базисные подгруппы изоморфны группе $G_1 \oplus G_2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p^n)$ [ср. § 34, п. Е)]. Все эти группы A имеют финальный ранг $\mathfrak{n}$. [Эта усиленная форма теоремы 76.3 была нужна при доказательстве теоремы 47.6.]

Упражнения

1. Вывести из неравенства г) теоремы 76.1 неравенство

$$\sum_{0 \leqslant \sigma < \tau} |A_\sigma| \leqslant \prod_{0 \leqslant n < \min(\omega, \tau)} |A_n|.$$

2. Доказать, что из условия в) теоремы 76.1 следует неограниченность всех групп A_σ, где $\sigma + 1 < \tau$.

3. Привести пример редуцированной p-группы A типа ω и мощности $2^{\aleph_0}$, ульмовские факторы которой счетны.

4. Множество неизоморфных счетных редуцированных p-групп фиксированного счетного типа, не меньшего 1, имеет мощность $2^{\aleph_0}$.

5. (а) Если каждый элемент редуцированной p-группы A можно вложить в счетное прямое слагаемое группы A, то ульмовский тип группы A не превосходит ω_1 [где ω_1 — первое порядковое число мощности $\aleph_1$].

(б) Доказать существование p-группы A со свойством, указанным в п. (а), имеющей ульмовский тип, в точности равный ω_1. [*Указание*: $A = \bigoplus_{0 \leqslant \sigma < \omega_1} G_\sigma$, где G_σ — счетная группа типа σ.]

(в) Доказать аналогичные предложения для любого бесконечного кардинального числа $\aleph_\rho$ вместо $\aleph_0$.

6. Доказать, что всякое порядковое число служит ульмовским типом [длиной] некоторой редуцированной p-группы.

7. Существует такая [редуцированная] p-группа A мощности $2^{\mathfrak{n}}$, что всякая [редуцированная] p-группа мощности $\leqslant \mathfrak{n}$ изоморфна прямому слагаемому группы A.

8. Пусть G — сепарабельная p-группа финального ранга $\mathfrak{n}$. Оценить мощность множества таких неизоморфных редуцированных p-групп A, что $A_0 \cong G$. [*Указание*: см. следствие 34.5 и теорему 76.3.]

9*. Для заданной вполне упорядоченной последовательности кардинальных чисел $\mathfrak{m}_\sigma$ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$ найти необходимые и достаточные условия, при которых существует такая p-группа A длины τ, что при любом σ соответствующий инвариант Ульма — Капланского группы A равен $\mathfrak{m}_\sigma$.

§ 77. Теорема Ульма

Одна из основных задач теории p-групп — выяснить, насколько группы определяются своими последовательностями Ульма. Один из наиболее известных результатов теории абелевых групп — это теорема Ульма, утверждающая, что счетные редуцированные p-группы определяются своими последовательностями Ульма однозначно с точностью до изоморфизма. Данный параграф посвящен доказательству этой теоремы и некоторым ее следствиям.

Методы установления изоморфизма между счетными редуцированными p-группами с одинаковыми последовательностями Ульма существенно используют технику последовательных продолжений изоморфизмов между определенными подгруппами. По этой причине мы сначала изучим продолжения изоморфизмов между подгруппами.

Пусть G — подгруппа p-группы A. Элемент $a \in A \setminus G$ называется *собственным относительно* G, если для [обобщенной] высоты h^* [по простому числу p] справедливо неравенство

$$h^*(a) \geqslant h^*(b) \quad \text{для всех} \quad b \in a + G,$$

т. е. если элемент a имеет максимальную высоту в определяемом им смежном классе по подгруппе G. Таким образом, элемент $a \in A$ высоты σ является собственным относительно G тогда и только тогда, когда

$$a \notin p^{\sigma+1}A + G.$$

Легко видеть, что это условие эквивалентно следующему: $h^*(a)$ совпадает с высотой элемента $a+G$ в группе A/G. Заметим, что если элемент a является собственным относительно подгруппы G, то

$$h^*(a+g) = \min(h^*(a),\ h^*(g)) \quad \text{для всех} \quad g \in G.$$

Очевидно, что если G — конечная подгруппа группы A, то всякий смежный класс группы A по подгруппе G содержит элемент, собствен-

ный относительно G. Это утверждение верно и в случае, когда $G = p^\rho A$ [ср. лемму 37.1].

Пусть A — редуцированная p-группа, G — ее подгруппа. Для любого порядкового числа σ положим

$$G(\sigma) = (p^{\sigma+1}A + G) \cap p^\sigma A[p].$$

Ясно, что это подгруппа группы $p^\sigma A[p]$, содержащая $p^{\sigma+1}A[p]$. Из сделанного выше замечания видно, что *элемент a порядка p и высоты σ лежит в $G(\sigma)$ тогда и только тогда, когда он не является собственным относительно G.*

Кардинальное число

$$f_\sigma(A, G) = r(p^\sigma A[p]/G(\sigma))$$

однозначно определяется группой A и ее подгруппой G. Оно называется *σ-м инвариантом Ульма — Капланского группы A относительно подгруппы G* (Хилл [24]). Ясно, что $f_\sigma(A, G) \leqslant f_\sigma(A)$ для любой подгруппы G группы A и любого порядкового числа σ. Очевидно, $f_\sigma(A, 0) = f_\sigma(A)$.

Легко видеть, что если изоморфизм ψ между p-группами A и C переводит подгруппу G группы A в подгруппу H группы C, то $G(\sigma)$ обязательно отображается на $H(\sigma)$. Следовательно, для любого σ изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм

$$\psi(\sigma)\colon\ p^\sigma A[p]/G(\sigma) \to p^\sigma C[p]/H(\sigma).$$

В частности, мы имеем

$$f_\sigma(A, G) = f_\sigma(C, H) \text{ для любого } \sigma$$

Пусть опять A и C — это p-группы, а G и H — подгруппы групп A и C соответственно. Говорят, что изоморфизм $\varphi\colon G \to H$ *сохраняет высоту*, если

$$h^*(\varphi g) = h^*(g) \quad \text{для любого} \quad g \in G.$$

Следует подчеркнуть, что высоты всегда берутся в группах C и A соответственно.

Ясно, что ограничение всякого изоморфизма между группами A и C является изоморфизмом, сохраняющим высоту.

Основной этап доказательства теоремы Ульма мы выделим в следующую лемму, принадлежащую Капланскому и Макки [1]. Для облегчения дальнейших рассуждений эта лемма сформулирована в более сильной форме.

Лемма 77.1. *Пусть A и C — редуцированные p-группы, а φ — сохраняющий высоту изоморфизм между подгруппой G группы A и подгруппой H группы C. Предположим, что*

$$f_\sigma(A, G) \leqslant f_\sigma(C, H) \text{ для любого } \sigma \tag{1}$$

и

$$\alpha_\sigma\colon\ p^\sigma A[p]/G(\sigma) \to p^\sigma C[p]/H(\sigma)$$

— произвольные мономорфизмы для каждого σ.

Если элемент $a \in A$ является собственным относительно подгруппы G и $pa \in G$, то изоморфизм φ можно продолжить до сохраняющего высоту изоморфизма

$$\varphi^*: \langle G, a\rangle \to \langle H, c\rangle,$$

где c — такой элемент группы C, что при любом σ мономорфизм α_σ отображает $\langle G, a\rangle(\sigma)/G(\sigma)$ на $\langle H, c\rangle(\sigma)/H(\sigma)$.

Положив $h^*(a) = \sigma$, мы можем предположить, что элемент a выбран в определяемом им смежном классе по подгруппе G не только собственным относительно G, но и таким, что $h^*(pa) > \sigma + 1$, если только это вообще возможно. Мы будем различать два случая в соответствии с тем, возможно это или нет.

Случай I. Пусть $h^*(pa) = \sigma + 1$. Возьмем такой элемент $c \in C$ высоты σ, что $pc = \varphi(pa)$. Если $c \in H$, то $\varphi g = c$ для некоторого $g \in G$, $pg = \varphi^{-1}(pc) = pa$, поэтому $p(a - g) = 0$, причем $h^*(a - g) = \min(h^*(a), h^*(g)) = \sigma$, так как элемент a был собственным относительно подгруппы G. Следовательно, $a' = a - g$ — тоже элемент, собственный относительно подгруппы G. Но $h^*(pa') > \sigma + 1$, а это противоречит выбору элемента a. Таким образом, $c \notin H$. Если элемент c не является собственным относительно подгруппы H, т. е. $h^*(c + h) > \sigma$ для некоторого $h \in H$, где обязательно $h^*(h) = \sigma$, то $\sigma < h^*(c + h) < h^*(pc + ph) = h^*(pa + p\varphi^{-1}h)$. Отсюда для $a' = a + \varphi^{-1}h$ имеем $h^*(a') = \min(h^*(a), h^*(h)) = \sigma$ и $h^*(pa') > \sigma + 1$, что противоречит выбору элемента a. Следовательно, $c \notin H$ и c — элемент, собственный относительно подгруппы H.

Случай II. $h^*(pa) > \sigma + 1$. Пусть $pa = pb$, где $b \in p^{\sigma+1}A$. Тогда элемент $a - b \in A[p]$ имеет высоту σ и является собственным относительно подгруппы G, так как иначе $h^*(a - b + g) > \sigma$ для некоторого $g \in G$ и $h^*(a + g) > \sigma$ — противоречие. По сделанному ранее замечанию $a - b \notin G(\sigma)$, поэтому существует такой элемент $u \in p^\sigma C[p]$, что α_σ: $a - b + G(\sigma) \mapsto u + H(\sigma)$. Очевидно, элемент u является собственным относительно подгруппы H. Так как изоморфизм φ сохраняет высоту, можно найти такой элемент $d \in p^{\sigma+1}C$, что $pd = \varphi(pa) \in H$. Теперь $c = d + u$ — элемент, собственный относительно подгруппы H, и $h^*(c) = \sigma$, $pc = \varphi(pa) \in H$.

В обоих случаях продолжим изоморфизм φ до изоморфизма φ^*: $\langle G, a\rangle \to \langle H, c\rangle$, положив $\varphi^*(a) = c$. Чтобы проверить, что φ^* также сохраняет высоту, заметим, что для любого $g \in G$

$$h^*(a+g) = \min(h^*(a), h^*(g)) = \min(h^*(c), h^*(\varphi(g))) = h^*(c + \varphi(g)).$$

Чтобы проверить справедливость последнего утверждения леммы, отметим, что если $\rho < \sigma$, то из включения $a \in p^{\rho+1}A$ следует равенство $\langle G, a\rangle(\rho) = G(\rho)$, а если $\rho > \sigma$, то то же самое равенство вытекает из того факта, что элемент a является собственным относительно подгруппы G. Аналогичное равенство справедливо для подгруппы H

и элемента c. Если $\rho = \sigma$, то в случае I ни для каких элементов $g \in G$, $a' \in p^{\sigma+1}A$ не может выполняться $p(a - g + a') = 0$, поэтому снова $\langle G, a\rangle(\sigma) = G(\sigma)$ и, аналогично, $\langle H, c\rangle(\sigma) = H(\sigma)$. В случае II имеем $\langle G, a\rangle(\sigma) = \langle a - b\rangle \oplus G(\sigma)$ и $\langle H, c\rangle(\sigma) = \langle u\rangle \oplus H(\sigma)$, и выбор элемента u гарантирует, что α_σ индуцирует нужный изоморфизм. ∎

Естественно, если мономорфизмы α_σ заранее не заданы, то в случае II можно взять любой элемент $u \in p^\sigma C[p] \setminus H(\sigma)$.

Заметим, что последняя часть предыдущего доказательства показывает, что все инварианты Ульма — Капланского группы A относительно подгрупп G и $\langle G, a\rangle$, кроме, быть может, σ-го, совпадают, а σ-е инварианты могут оказаться связанными следующим образом: $f_\sigma(A, \langle G, a\rangle) + 1 = f_\sigma(A, G)$. Отсюда, очевидно, получается

Следствие 77.2. *В предположениях леммы* 77.1 *равенство в формуле* (1) *приводит к равенству*

$$f_\sigma(A, \langle G, a\rangle) = f_\sigma(C, \langle H, c\rangle)$$

для любого σ. ∎

Теперь можно показать, что справедлива основная

Теорема 77.3 (Ульм [1]). *Счетные редуцированные р-группы A и C изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ульмовский тип τ и для любого порядкового числа $\sigma < \tau$ их ульмовские факторы A_σ и C_σ изоморфны.*

Последнее имеет место в том и только в том случае, когда инварианты Ульма — Капланского групп A и C совпадают.

Так как A и C — счетные p-группы, то A_σ и C_σ — прямые суммы циклических p-групп. Заметим, что число циклических прямых слагаемых порядка p^n в разложениях групп A_σ и C_σ совпадает с $(\omega\sigma + n - 1)$-м инвариантом Ульма — Капланского групп A и C соответственно. Поэтому достаточно показать, что если у групп A и C совпадают соответствующие инварианты Ульма — Капланского, то эти группы должны быть изоморфны.

Элементы групп A и C можно упорядочить по типу ω:

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad C = \{c_1, \ldots, c_n, \ldots\}.$$

Предположим, что $0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n$ и $0 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n$ — конечные подгруппы групп A и C соответственно, такие, что для $i = 0, 1, \ldots, n$ существует сохраняющий высоту изоморфизм $\varphi_i: G_i \to H_i$ со свойством $\varphi_n \mid G_i = \varphi_i$. Если n — четное число, возьмем первый элемент a_k, не лежащий в G_n, и продолжим изоморфизм φ_n до сохраняющего высоту изоморфизма φ_{n+1} между подгруппой $G_{n+1} = \langle G_n, a_k\rangle$ и некоторой подгруппой H_{n+1} группы C, содержащей H_n. В силу леммы 77.1 это возможно, так как присоединения элемента a_k к конечной группе G_n можно добиться путем последовательного добавления элементов a, удовлетворяющих условиям леммы 77.1. Если n —

нечетное число, то выберем первый элемент c_i, не лежащий в H_n, и продолжим φ_n^{-1} до изоморфизма между подгруппой $H_{n+1} = \langle H_n, c_i \rangle$ и некоторой подгруппой G_{n+1} группы A. В силу следствия 77.2 на каждом шаге будет выполняться условие (1). Ясно, что изоморфизмы φ_n $(n = 0, 1, \ldots)$ в конце концов определяют изоморфизм между группами A и C. ∎

Из этого доказательства вытекает

Следствие 77.4 (Цыпин [1]). *Если A и C — счетные p-группы с одинаковыми инвариантами Ульма — Капланского, то всякий изоморфизм между $p^\rho A$ и $p^\rho C$ (для любого порядкового числа ρ) продолжается до изоморфизма между группами A и C.*

Хотя это утверждение непосредственно следует из более общей теоремы 83.4, дадим здесь независимое доказательство.

Нам нужно лишь проверить, что если в лемме 77.1 элемент a лежит в $p^\rho A$, то можно взять $c = \psi a \in p^\rho C$, где ψ: $p^\rho A \to p^\rho C$ — заданный изоморфизм. Заметим, что изоморфизм ψ сохраняет высоту: если элемент a имеет высоту σ в $p^\rho A$, то он имеет высоту $\rho + \sigma$ в группе A. Следовательно, нужно только проверить, что элемент ψa является собственным относительно подгруппы H. Если бы это было не так, т. е. если бы было $h^* (\psi a + h) > h^* (\psi a)$ для некоторого $h \in H$, то из $\psi a + h \in p^\rho C$ вытекало бы $h^* (a + \psi^{-1} h) = h^* (\psi a + h) > h^* (a)$ — противоречие. ∎

Теоремы 17.3, 76.2 и 77.3 Прюфера, Цыпина и Ульма соответственно дают полную классификацию счетных редуцированных p-групп. Можно сказать, что эти три теоремы составляют хорошую структурную теорию для этих групп.

Здесь можно сделать несколько замечаний об инвариантах.

Пусть группа A является p-группой ульмовского типа τ. Из ее инвариантов Ульма — Капланского $f_\sigma(A)$ можно составить матрицу

$$\mathbb{M}(A) = \begin{bmatrix} f_0(A) & f_1(A) \ldots & f_n(A) \ldots \\ f_\omega(A) & f_{\omega+1}(A) \ldots & f_{\omega+n}(A) \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{\omega\rho}(A) & f_{\omega\rho+1}(A) \ldots & f_{\omega\rho+n}(A) \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \tag{2}$$

строчки которой можно занумеровать с помощью порядковых чисел $\sigma < \tau$, а столбцы — с помощью неотрицательных целых чисел. Можно коротко сказать, что это $\tau \times \omega$-матрица. Если группа A счетна, то ее тип τ счетен и каждое кардинальное число $f_\sigma(A)$ есть или неотрицательное целое число, или $\aleph_0$. Неограниченность σ-го ульмовского фактора A_σ (где $\sigma + 1 < \tau$) эквивалентна тому, что в σ-й строке бесконечно много кардинальных чисел отлично от нуля. Таким образом с каждой счетной редуцированной p-группой A типа τ связывается $\tau \times \omega$-матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

1) τ — счетное порядковое число;
2) элементы матрицы — неотрицательные целые числа или $\aleph_0$;
3) каждая строка, кроме, быть может, последней, если она существует, содержит бесконечное число элементов, отличных от нуля.

Теперь теорему Ульма 77.3 можно интерпретировать как утверждение, что матрицы вида (2) составляют полные системы инвариантов для счетных редуцированных p-групп [т. е. две такие группы изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им матрицы равны]. Так как установить, равны ли две матрицы, элементы которых — кардинальные числа, легко, то наши матрицы представляют собой достаточно хорошие системы инвариантов. Теорема Цыпина 76.2 утверждает, что всякая $\tau \times \omega$-матрица со свойствами 1) — 3) соответствует счетной редуцированной p-группе. Поэтому рассматриваемые матрицы являются независимыми системами инвариантов.

Открытие указанного взаимно однозначного соответствия между счетными редуцированными p-группами и матрицами со свойствами 1) — 3), несомненно, является одним из наиболее значительных достижений в теории абелевых групп.

Конечно, мы можем изменить форму записи и расположить инварианты Ульма — Капланского $f_\sigma(A)$ группы A в виде вполне упорядоченной последовательности

$$f_0(A), \ldots, f_n(A), \ldots, f_\omega(A), \ldots, f_\sigma(A), \ldots \quad (\sigma < \tau),$$

где τ на этот раз обозначает длину группы A. Условия 1) и 2) здесь сохранятся, а условие 3) нужно будет заменить условием

3′) если $\sigma + \omega \leqslant \tau$, то бесконечно много кардинальных чисел $f_\sigma(A), \ldots$ $\ldots, f_{\sigma+n}(A), \ldots$ $(n < \omega)$ отлично от нуля.

В качестве приложения изложенной теории дадим доказательства следующих двух результатов.

Предложение 77.5. *Всякая бесконечная счетная редуцированная p-группа разлагается в прямую сумму бесконечного числа нетривиальных групп.*

Пусть группа A удовлетворяет заданным условиям, и пусть A_σ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$ — ее последовательность Ульма. В силу теоремы 17.2 достаточно рассмотреть случай, когда группа A неограничена. Используя теорему Прюфера 17.3, разложим каждую группу A_σ $(\sigma + 1 < \tau)$ в бесконечную прямую сумму неограниченных групп $G_{\sigma i}$, $A_\sigma = \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_{\sigma i}$. Если группа $A_{\tau-1}$ существует и является ограниченной, положим $G_{\tau-1,1} = A_{\tau-1}$ и $G_{\tau-1,i} = 0$ при $i \geqslant 2$. В силу теоремы Цыпина 76.2 для каждого i существует счетная редуцированная p-группа G_i, последовательностью Ульма которой служит последовательность групп $G_{\sigma i}$ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$. Теперь $\bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i$ — счетная редуцированная p-группа с той же последовательностью Ульма, что и группа A. Из теоремы 77.3 получаем, что $A \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i$. ∎

Предложение 77.6 (Бэр [1]). *Счетная редуцированная p-группа A обладает тем свойством, что любые два ее прямых разложения имеют изоморфные продолжения, тогда и только тогда, когда ульмовский тип группы A равен* 1.

Если ульмовский тип группы A равен 1, то нужное свойство группы A вытекает из следствия 18.2.

Если ульмовский тип группы A больше 1, то разложим ее ульмовские факторы $A_\sigma = G_\sigma \oplus H_\sigma$ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$ таким образом, чтобы G_σ и H_σ были неограниченными группами [если A_σ — неограниченная группа], не имеющими циклических прямых слагаемых общих порядков. Пусть G и H — счетные редуцированные p-группы с последовательностями Ульма G_σ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$ и H_σ $(0 \leqslant \sigma < \tau)$ соответственно. Пусть, далее, G' и H' — счетные редуцированные p-группы с последовательностями Ульма G_0, H_σ $(1 \leqslant \sigma < \tau)$ и H_0, G_σ $(1 \leqslant \sigma < \tau)$ соответственно. По теореме Ульма 77.3 имеем $A \cong G \oplus H \cong G' \oplus H'$. Эти прямые разложения не могут обладать изоморфными продолжениями, так как никакие два ненулевых циклических прямых слагаемых групп G и H' [G' и H] не могут быть изоморфными, а группы G и G' не изоморфны. ■

Приведем теперь примеры, показывающие, что для p-групп мощности $\geqslant \aleph_1$ теорема Ульма в общем случае уже не верна.

Заметим, что две эквивалентные формулировки теоремы Ульма [ульмовские факторы или инварианты Ульма — Капланского определяют счетную редуцированную p-группу с точностью до изоморфизма] уже не эквивалентны в случае p-групп бóльших мощностей. Причина, видимо, состоит в том, что в несчетном случае уже не верна теорема Прюфера. [Напомним, что периодически полная p-группа $\bar{B}$ и ее базисная подгруппа B имеют одинаковые инварианты Ульма — Капланского.] Таким образом, следующие примеры показывают, что справедливо более сильное утверждение: даже ульмовские факторы в общем случае не определяют несчетные p-группы.

Пример 1. Пусть A_n $(n < \omega)$ — последовательность неограниченных счетных сепарабельных p-групп. По теореме 76.1 существуют p-группы A и A' мощности $\aleph_0$ и $\aleph_1$ соответственно, последовательностью Ульма которых служит данная последовательность.

Пример 2. Пусть C — прямая сумма циклических p-групп и $|C| = \aleph_1$. Если A и A' — группы из примера 1, то обе группы $A \oplus C$ и $A' \oplus C$ имеют мощность $\aleph_1$ и одинаковые последовательности Ульма. Но эти группы не изоморфны, так как их первые ульмовские подгруппы имеют мощность $\aleph_0$ и $\aleph_1$ соответственно.

Пример 3 (Куликов [2]). Пусть A_0 — периодически полная группа с базисной подгруппой $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$, и пусть A_1 — прямая сумма $2^{\aleph_0}$ циклических групп порядка p. Возьмем две p-группы A и C с последовательностью Ульма A_0, A_1. Используем специальную конструкцию, которая будет дана в лемме 105.1, причем при определении группы A в формуле (5) никогда не будем полагать $pv_{j1} = 0$, а при определении группы C положим $pv_{j1} = 0$ для множества индексов j мощности континуума. Обе группы A и C имеют мощность $2^{\aleph_0}$ и одинаковые последовательности Ульма, но $|A[p]/A^1| = \aleph_0$, а $|C[p]/C^1| = 2^{\aleph_0}$, поэтому группы A и C не изоморфны.

Упражнения

1. Если G, H — подгруппы группы A и $G \subseteq H$, то $f_\sigma(A, G) \geqslant f_\sigma(A, H)$ для любого σ.

2. Показать, что для любого ρ справедливо равенство $f_\sigma(A, p^\rho A) = 0$ или $f_\sigma(A, p^\rho A) = f_\sigma(A)$ в зависимости от того, $\rho \leqslant \sigma$ или $\rho > \sigma$.

3. Пусть A и C — счетные p-группы. В терминах инвариантов Ульма — Капланского этих групп найти условия, при которых группа C изоморфна прямому слагаемому группы A.

4. Если A и C — счетные p-группы, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы, то $A \cong C$.

5. (Капланский [3]). Если A — счетная p-группа, а для группы C имеет место изоморфизм $A \oplus A \cong C \oplus C$, то $A \cong C$.

6. Говорят, что группа A обладает *свойством сокращения для счетных p-групп*, если для счетных p-групп G, H изоморфизм $A \oplus G \cong A \oplus H$ влечет за собой $G \cong H$. Показать, что счетная редуцированная p-группа A обладает этим свойством тогда и только тогда, когда все ее инварианты Ульма — Капланского конечны.

7. В терминах инвариантов Ульма — Капланского найти необходимые и достаточные условия, при которых счетная редуцированная p-группа A обладает свойством $A \oplus A \cong A$.

8. (а) Счетная редуцированная p-группа A имеет прямое слагаемое, являющееся неограниченной прямой суммой циклических групп, тогда и только тогда, когда она неограниченная.

(б) Дать полное обозрение прямых слагаемых группы примера Прюфера из § 35.

9. (а) Счетная редуцированная p-группа A ульмовского типа τ тогда и только тогда имеет прямое слагаемое ульмовского типа σ, когда $\sigma \leqslant \tau$.

(б) Счетная редуцированная p-группа A длины τ имеет прямое слагаемое длины σ тогда и только тогда, когда или σ — предельное порядковое число, причем $\sigma \leqslant \tau$, или $f_{\sigma-1}(A) \neq 0$.

10. Если A — счетная p-группа ульмовского типа τ, то

$$A = \bigoplus_{\sigma \leqslant \tau} G_\sigma,$$

где G_σ имеет ульмовский тип σ. Если τ — предельное порядковое число, то достаточно суммировать по всем $\sigma < \tau$.

11. (а) Для любого счетного порядкового числа τ существует такая счетная p-группа $G(\tau)$ ульмовского типа τ, что всякая счетная редуцированная p-группа, ульмовский тип которой не превосходит τ, изоморфна прямому слагаемому группы $G(\tau)$.

(б) Существует такая p-группа мощности $\aleph_1$ и ульмовского типа ω_1, что всякая счетная редуцированная p-группа изоморфна прямому слагаемому этой группы. [*Указание*: $\oplus G(\tau)$.]

12 (Ирвин и Уокер [2]). Пусть A — некоторая p-группа, а σ — порядковое число. Показать, что для любого порядкового числа $\rho < \sigma$ выполняется равенство $f_\rho(A) = f_\rho(H)$, где H — произвольная $p^\sigma A$-высокая подгруппа группы A.

13 (Хилл и Меджиббен [4]). Обобщить следствие 77.4 на случай, когда предполагаются счетными только группы $A/p^\rho A$ и $C/p^\rho C$.

§ 78. Прямые суммы счетных p-групп

Колеттис [1] заметил, что значительная часть теории счетных p-групп может быть перенесена на прямые суммы этих групп. В настоящем параграфе мы рассмотрим этот более широкий класс p-групп.

Ясно, что прямые суммы циклических p-групп принадлежат классу прямых сумм счетных p-групп. По теореме Прюфера 17.3 сепарабельная прямая сумма счетных p-групп должна быть прямой суммой циклических групп. В силу леммы 37.5 справедлива

Лемма 78.1. *Ульмовские факторы прямых сумм счетных p-групп являются прямыми суммами циклических групп.* ∎

Обратное неверно: существуют редуцировенные p-группы, все ульмовские факторы которых — прямые суммы циклических групп, но которые не являются прямыми суммами счетных групп [см. упр. 2].

Легко проверить, что ульмовские подгруппы A^{σ} прямой суммы A счетных p-групп также являются группами такого вида; таковы же подгруппы $p^{\sigma}A$.

Очевидно, что базисная подгруппа счетной редуцированной p-группы всегда имеет ту же мощность, что и сама группа. Следовательно, для базисной подгруппы B прямой суммы A счетных редуцированных p-групп выполняется равенство $|B| = |A|$. Заметив, что $|B| = \sum_{k<\omega} f_k(A)$, если $|B|$ бесконечно, для любой прямой суммы A счетных редуцированных p-групп получаем

$$|A| = \sum_{k<\omega} f_k(A),$$

если только группа A бесконечна.

Так как ульмовский тип счетной p-группы счетен, а ульмовский тип прямой суммы равен верхней грани ульмовских типов слагаемых, то справедлива

Лемма 78.2. *Порядковое число τ является ульмовским типом некоторой прямой суммы счетных p-групп в точности тогда, когда $\tau \leqslant \omega_1$.* ∎

Позднее в теореме 82.4 мы дадим критерий разложимости редуцированной p-группы в прямую сумму счетных p-групп. Наша ближайшая задача — получить структурную теорему, показав, что инварианты Ульма — Капланского составляют полную систему инвариантов для прямых сумм счетных p-групп.

Приведенное ниже доказательство теоремы 78.4 основывается на сделанном Ричменом и Уокером [3] замечании, что для распространения теоремы Ульма со случая счетных p-групп на случай их прямых сумм теория групп фактически не нужна. В самом деле, следующая простая теоретико-множественная лемма даст нам все необходимое для доказательства теоремы 78.4.

Лемма 78.3 (Ричмен и Уокер [3]). *Пусть* $\mathfrak{m}$ — *бесконечное кардинальное число,* X — *некоторое множество и* f_i, g_i $(i \in I)$ — *функции, определенные на множестве* X *и принимающие значения в классе кардинальных чисел, для которых*

а) $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) = \sum\limits_{i \in I} g_i(x)$ *при любом* $x \in X$;

б) $\sum\limits_{x \in X} [f_i(x) + g_i(x)] \leqslant \mathfrak{m}$ *при любом* $i \in I$.

Тогда существует такое разбиение $I = \bigcup\limits_{j \in J} I_j$, *что*

1) $|I_j| \leqslant \mathfrak{m}$ *для каждого* $j \in J$;

2) $\sum\limits_{i \in I_j} f_i(x) = \sum\limits_{i \in I_j} g_i(x)$ *для всякого* $j \in J$ *и любого* $x \in X$.

Нам удобно будет предполагать, что I — множество порядковых чисел, меньших первого порядкового числа ω_τ мощности $|I|$. Так как при $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) \leqslant \mathfrak{m}$ проверять нечего, предположим, что $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) > \mathfrak{m}$.

По условию а) существует такое подмножество L_1 множества I, что $f_0(x) \leqslant \sum\limits_{i \in L_1} g_i(x)$ для любого $x \in X$. В силу условия б) подмножество L_1 можно выбрать так, чтобы выполнялись условия $0 \in L_1$, $|L_1| \leqslant \mathfrak{m}$. Аналогично, существует такое подмножество L_2 множества I, что $L_1 \subseteq L_2$, $|L_2| \leqslant \mathfrak{m}$ и $\sum\limits_{i \in L_2} f_i(x) \geqslant \sum\limits_{i \in L_1} g_i(x)$ для всех $x \in X$. Существует, далее, такое подмножество $L_3 \subseteq I$, что $L_2 \subseteq L_3$, $|L_3| \leqslant \mathfrak{m}$ и $\sum\limits_{i \in L_2} f_i(x) \leqslant \leqslant \sum\limits_{i \in L_3} g_i(x)$ для всех $x \in X$ и т. д. Объединение $I_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ удовлетворяет условиям 1) и 2) при $j = 0$.

Так как $\sum\limits_{i \in I_0} f_i(x) \leqslant \mathfrak{m}$, а $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) > \mathfrak{m}$, то условие а) будет по-прежнему выполняться, если заменить I на $I \setminus I_0$. Начав с первого индекса в $I \setminus I_0$, повторим наш процесс трансфинитно и получим I_1 и т. д. Через ω_τ шагов мы получим нужное разбиение множества I. ∎

Теперь будет доказана

Теорема 78.4 (Коллеттис [1]). *Две прямые суммы счетных редуцированных p-групп изоморфны тогда и только тогда, когда у них совпадают соответствующие инварианты Ульма — Капланского.*

Пусть A и C — группы такого вида, скажем длины τ, причем $f_\sigma(A) = f_\sigma(C)$ для всех $\sigma < \tau$. За исключением конечного случая всегда $|A| = \sum\limits_{k < \omega} f_k(A) = \sum\limits_{k < \omega} f_k(C) = |C|$, откуда ясно, что если одна из групп A или C счетна, то другая тоже счетна, и изоморфизм $A \cong C$ следует из теоремы 77.3.

Если данные группы несчетны, то можно написать

$$A=\bigoplus_{i\in I} A_i \quad \text{и} \quad C=\bigoplus_{i\in I} C_i,$$

где A_i, C_i — счетные редуцированные p-группы и $|A|=|I|=|C|$. Используем лемму 78.3 для случая, когда $\mathfrak{m}=\aleph_0$, X — множество порядковых чисел $\sigma<\tau$, $f_i(\sigma)$ и $g_i(\sigma)$ — инварианты Ульма — Капланского групп A_i и C_i соответственно, имеющие номер σ. Очевидно, условия а) и б) выполнены. Взяв разбиение $I=\bigcup_{j\in J} I_j$, удовлетворяющее условиям 1) и 2), образуем группы $G_j=\bigoplus_{i\in I_j} A_i$ и $H_j=\bigoplus_{i\in I_j} C_i$. Ясно, что G_j и H_j — счетные p-группы с одинаковыми инвариантами Ульма — Капланского. Следовательно, $G_j\cong H_j$ при любом j. Так как $A=\bigoplus_{j\in J} G_j$ и $C=\bigoplus_{j\in J} H_j$, требуемый изоморфизм очевиден. ∎

Прямые слагаемые прямых сумм счетных p-групп сами являются группами такого вида — это сразу следует из предложения 9.10. Но, как показывает следующий пример, их подгруппы уже не обязаны быть прямыми суммами счетных p-групп.

Пример (Нунке [6]). Пусть A — группа из примера § 35 и $\overline{B}$ — периодическое пополнение группы $B=\bigoplus_{n<\omega} Z(p^n)$. Мы утверждаем, что

$$G=\operatorname{Tor}(A, \overline{B})\leq\bigoplus_{\mathfrak{c}} A \quad (\text{где } \mathfrak{c}=2^{\aleph_0}),$$

но G не будет прямой суммой счетных p-групп.

Существует мономорфизм $\alpha\colon \overline{B}\to\bigoplus_{\mathfrak{c}} Z(p^\infty)$, который в силу теоремы 63.1 индуцирует мономорфизм

$$\alpha_*\colon \operatorname{Tor}(A, \overline{B})\to\operatorname{Tor}(A, \bigoplus_{\mathfrak{c}} Z(p^\infty))\cong\bigoplus_{\mathfrak{c}}\operatorname{Tor}(A, Z(p^\infty))\cong\bigoplus_{\mathfrak{c}} A.$$

Из леммы 64.2 следует, что $p^\omega\operatorname{Tor}(A, \overline{B})=\operatorname{Tor}(p^\omega A, p^\omega\overline{B})=0$. Таким образом, если бы группа G была прямой суммой счетных p-групп, она была бы прямой суммой циклических групп. Из сервантно точной последовательности $0\to B\to\overline{B}\to\bigoplus_{\mathfrak{c}} Z(p^\infty)\to 0$ получаем точную последовательность $0\to C=\operatorname{Tor}(A, B)\to G\to\bigoplus_{\mathfrak{c}} A\to 0$. Здесь $|p^\omega(G/C)|=\mathfrak{c}$, тогда как если бы группа G была прямой суммой циклических групп, то ее счетную подгруппу C можно было бы вложить в счетное прямое слагаемое D группы G и группа $p^\omega(G/C)=p^\omega(D/C)$ была бы счетной. Таким образом, получено противоречие.

Обратимся теперь к проблеме существования. Основной вопрос: какие вполне упорядоченные последовательности

$$\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\sigma, \ldots \quad (\sigma<\tau)$$

кардинальных чисел могут быть инвариантами Ульма — Капланского прямой суммы счетных p-групп? В силу леммы 78.2 очевидным необходимым условием является неравенство $\tau\leqslant\omega_1$. Чтобы получить

полный ответ на поставленный вопрос, рассмотрим функции g, принимающие значения, являющиеся кардинальными числами, и определенные на множестве порядковых чисел, меньших τ, где τ — заданное порядковое число [сейчас можно считать, что оно не превосходит ω_1]. Функцию g назовем *τ-допустимой*, если выполнены следующие условия:

1) $\tau = \sup\{\sigma + 1 \mid g(\sigma) \neq 0\}$,
2) $\sum\limits_{\rho \geqslant \sigma+\omega} g(\rho) \leqslant \sum\limits_{n<\omega} g(\sigma+n)$ для всех σ, для которых $\sigma + \omega < \tau$.

Функция g, удовлетворяющая условию 1), называется функцией *длины* τ.

Нам понадобится следующая лемма [доказанная Э. Уокером].

Лемма 78.5. *Если τ — предельное порядковое число, то τ-допустимая функция является суммой допустимых функций, длины которых меньше τ.*

Пусть g есть τ-допустимая функция, где τ — предельное порядковое число. Для всех $\rho < \tau$ рассмотрим кардинальные числа $\mathfrak{m}_\rho = \sum\limits_{\rho \leqslant \sigma < \tau} g(\sigma)$. Среди них имеется наименьшее. Пусть λ — индекс первого наименьшего кардинального числа $\mathfrak{m}_\rho$, и пусть $J = \{\nu \mid \lambda \leqslant \nu < \tau\}$.

Для каждого предельного порядкового числа $\rho < \tau$ рассмотрим кардинальное число

$$\mathfrak{n}_\rho = \min_{k<\omega} \sum_{k \leqslant n < \omega} g(\rho + n).$$

Очевидно, $\mathfrak{n}_\rho \geqslant |J|$. Проверка того, что ограничение f_ρ функции g на интервале $[\rho, \rho+\omega)$ можно представить в виде

$$f_\rho = \sum_{\nu \in J} f_{\rho\nu},$$

где

$$\sum_{k \leqslant n < \omega} f_{\rho\nu}(\rho + n) \geqslant \mathfrak{n}_\rho \quad \text{для всех} \quad k < \omega,$$

является простым упражнением по арифметике кардинальных чисел. [Это эквивалентно тому, что прямую сумму циклических p-групп, имеющую финальный ранг $\mathfrak{n}$, можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{n}$ или меньшего числа слагаемых, каждое из которых имеет финальный ранг $\mathfrak{n}$.] Полагая $f_{\rho\nu}(\sigma) = 0$ при $\sigma < \rho$ или $\sigma \geqslant \rho + \omega$, определяем

$$h_\nu = \sum h_{\rho\nu} \quad \text{для любого} \quad \nu \in J.$$

Очевидно, $g=\sum_{\nu\in J} h_\nu$ и $\sum_{n<\omega} h_\nu(\sigma+n)\geqslant \sum_{\rho\geqslant\sigma+\omega} g(\rho)$ для всякого σ и любого ν. Наконец, пусть

$$g_\nu(\sigma)=\begin{cases} h_\nu(\sigma), & \text{если} \quad \sigma<\nu, \\ \sum_{\mu\leqslant\nu} h_\mu(\sigma), & \text{если} \quad \sigma=\nu, \\ 0, & \text{если} \quad \sigma>\nu. \end{cases}$$

Тогда g_ν имеет длину $\nu+1<\tau$ и $\sum_\nu g_\nu=g$. В силу неравенств

$$\sum_{n<\omega} g_\nu(\sigma+n)=\sum_{n<\omega} h_\nu(\sigma+n)\geqslant \sum_{\rho\geqslant\sigma+n} g(\rho)\geqslant \sum_{\rho\geqslant\sigma+n} g_\nu(\rho),$$

справедливых для всякого σ, для которого $\sigma+\omega<\nu+1$, получаем, что g_ν есть $(\nu+1)$-допустимая функция. ∎

Теперь теорему существования для прямых сумм счетных p-групп можно доказать без труда.

Теорема 78.6 (Колеттис [1]). *Пусть g — функция, определенная на множестве порядковых чисел, меньших τ, и принимающая значения, являющиеся кардинальными числами. Прямая сумма A счетных редуцированных p-групп, имеющая длину τ и обладающая свойством*

$$f_\sigma A=g(\sigma) \quad \textit{для всех} \quad \sigma<\tau,$$

существует тогда и только тогда, когда $\tau\leqslant\omega_1$ и g есть τ-допустимая функция.

Чтобы доказать необходимость, покажем, что $f_\sigma(A)$ является τ-допустимой функцией. Условие 1) очевидно. Чтобы проверить справедливость условия 2), заметим, что для всякого σ и любой прямой суммы A счетных редуцированных p-групп имеет место равенство $|p^\sigma A|=\sum_{n<\omega} f_{\sigma+n}(A)$, если группа $p^\sigma A$ бесконечна. С другой стороны, для всякого σ и любой p-группы A верно неравенство $\sum_{\sigma\leqslant\rho} f_\rho(A)\leqslant$ $\leqslant|p^\sigma A|$. Отсюда сразу следует условие 2).

Обратно, пусть g есть τ-допустимая функция, где $\tau\leqslant\omega_1$. Если τ — предельное порядковое число, то по лемме 78.5 найдутся τ_i-допустимые функции g_i, для которых $\tau_i<\tau$ и $\sum_{i\in I} g_i=g$. Если A_i — прямая сумма счетных редуцированных p-групп, причем ее инварианты Ульма — Капланского при $\sigma<\tau_i$ равны $g_i(\sigma)$, то, очевидно, для группы $A=\bigoplus_{i\in I} A_i$ при любом $\sigma<\tau$ справедливо равенство $f_\sigma(A)=$ $=g(\sigma)$. Если $\tau=\rho+n$, где ρ — предельное порядковое число, а n — натуральное число, то пусть группа C длины ρ будет такой прямой суммой счетных p-групп, что $f_\sigma(C)=g(\sigma)$ при $\sigma<\rho$. Чтобы

построить группу A, для которой

$$A/p^\rho A \cong C \quad \text{и} \quad p^\rho A \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \bigoplus_{g(\rho+k)} Z(p^{k+1}),$$

нам остается лишь выделить прямую сумму $g(\rho)+\ldots+g(\rho+n-1)$ счетных слагаемых C_i длины ρ из группы C [в силу условия 2) это возможно] и заменить эти слагаемые C_i группами A_i, для которых $A_i/p^\rho A_i \cong C_i$ и $p^\rho A_i \cong Z(p^{k+1})$ [в силу следствия 76.2 такие группы A_i существуют], причем

$$\bigoplus_i p^\rho A_i \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \bigoplus_{g(\rho+k)} Z(p^{k+1}).$$

Прямая сумма A всех групп A_i и не изменявшихся компонент группы C будет обладать требуемыми свойствами. ∎

Упражнения

1. Всякий ульмовский фактор прямой суммы счетных p-групп длины ω_1 имеет мощность не меньше $\aleph_1$.

2. Ульмовские факторы группы A' примера 1 из § 77 являются прямыми суммами циклических групп, но A' — не прямая сумма счетных p-групп. [*Указание*: ее базисная подгруппа счетна.]

3. Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$, где A_i — счетные редуцированные p-группы, а множество I несчетно. Показать, что для любого порядкового числа σ число слагаемых A_i длины, большей σ, является инвариантом группы A, если оно несчетно.

4. Для любого кардинального числа $\mathfrak{n} > \aleph_0$ существует прямая сумма A счетных p-групп, имеющая мощность $\mathfrak{n}$ и такая, что всякая прямая сумма счетных p-групп мощности $\mathfrak{n}$ изоморфна прямому слагаемому группы A. Группа A определена однозначно с точностью до изоморфизма.

5. Мощность множества неизоморфных прямых сумм счетных p-групп бесконечной мощности $\aleph_\sigma$ равна $(|\sigma|+\aleph_0)^{\aleph_1}$.

6. Если A и C — прямые суммы счетных p-групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы, то $A \cong C$.

7. Если A — прямая сумма счетных p-групп и $A \oplus A \cong C \oplus C$, то $A \cong C$.

8 (Колеттис [1], Шарль [6]). Пусть A — такая p-группа, что A^1 — счетная группа и $A/A^1 = A_0$ — прямая сумма циклических групп. Показать, что A — прямая сумма счетных p-групп. [*Указание*: существует счетная сервантная подгруппа C' группы A, содержащая A^1; вложить C' в подгруппу C так, чтобы группа C/A^1 служила для A_0 прямым слагаемым, и показать, что C — прямое слагаемое группы A.]

9 (Хилл [8]). Провести доказательство теоремы 78.4 следующим образом. Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$, $C = \bigoplus_{j\in J} C_j$ (A_i и C_j — счетные редуцированные p-группы), и пусть φ — сохраняющий высоту изоморфизм

между цоколями $A[p]$ и $C[p]$. Обозначим через $\sim$ наименьшее отношение эквивалентности на множестве J, для которого $j \sim j'$, если C_j и $C_{j'}$ пересекаются нетривиальным образом с одной и той же подгруппой $\varphi A_i[p]$. Показать, что классы эквивалентных между собой элементов счетны, сгруппировать соответствующим образом слагаемые C_j, применить φ^{-1} для получения группировки слагаемых A_i и проверить, что прямые суммы в соответствующих группах изоморфны.

§ 79. Хорошие подгруппы

Прежде чем начать изложение общей теории p-групп, которые можно охарактеризовать их инвариантами Ульма — Капланского, мы рассмотрим некоторые важные типы подгрупп. Этот и следующий параграфы посвящены их более или менее систематическому изучению.

Детальный анализ доказательства Капланского — Макки теоремы Ульма [см. теорему 77.3] привел Хилла к открытию важного типа подгрупп, обладающих теми из свойств конечных подгрупп, которые встречаются в доказательстве. Обилие таких подгрупп в p-группе (точный смысл этого выражения указан в § 82) будет гарантировать, что эта группа однозначно определяется своими инвариантами Ульма—Капланского.

Подгруппа N p-группы A называется *хорошей*, если всякий ненулевой смежный класс группы A по подгруппе N содержит элемент, собственный относительно подгруппы N. Другими словами, для любого смежного класса $a+N$ $(a \in A \setminus N)$ существует такой элемент $x \in N$, что

$$h_A^*(a+x) = h_{A/N}^*(a+N),$$

где индексы [которые мы можем дальше не писать, так как это не вызовет недоразумений] показывают, о высотах в какой группе идет речь.

Следующее простое замечание будет полезно при выяснении, является ли подгруппа хорошей.

Лемма 79.1. *Если N — такая подгруппа p-группы A, что любой смежный класс группы A по этой подгруппе, высота которого является предельным порядковым числом, содержит элемент, собственный относительно N, то N — хорошая подгруппа группы A.*

Всякий элемент смежного класса высоты 0 имеет высоту 0. Применим трансфинитную индукцию. Предположим, что смежные классы высоты, не превосходящей σ, содержат элементы, собственные относительно подгруппы N, и пусть $h^*(a+N) = \sigma+1$. Тогда $pb+N = a+N$ для некоторого $b \in A$, такого, что $h^*(b+N) = \sigma$, причем можно предположить, что $h^*(b) = \sigma$. Тогда $h^*(pb) \geqslant \sigma+1$, а так как строгое неравенство невозможно, то элемент pb собственный относительно N. На предельных местах все получается по условию. ■

Хорошие подгруппы характеризуются в следующей лемме.

Лемма 79.2 (Хилл [24]). *Подгруппа N p-группы A является хорошей тогда и только тогда, когда*

$$p^\sigma (A/N) = (p^\sigma A + N)/N \quad \text{для любого порядкового числа } \sigma. \tag{1}$$

Заметим, что $p^\sigma (A/N)$ — это множество всех элементов из A/N, высоты которых не меньше σ, а $(p^\sigma A + N)/N$ — образ подгруппы $p^\sigma A$ при каноническом отображении $A \to A/N$. Следовательно, для любой подгруппы N группы A включение $\supseteq$ очевидно. Подгруппа N является хорошей в группе A тогда и только тогда, когда каждый смежный класс из $p^\sigma (A/N)$ имеет в группе A представителя, высота которого также не меньше σ. Таким образом, обратное включение имеет место в том и только в том случае, когда N — хорошая подгруппа. ∎

Другими словами, лемма 79.2 утверждает, что N является хорошей подгруппой в A тогда и только тогда, когда для точной последовательности $0 \to N \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} C \to 0$ [где α — вложение] и любого порядкового числа σ отображение $p^\sigma A \to p^\sigma C$, индуцированное отображением β, сюръективно.

Чтобы исследовать это новое понятие, мы отметим приводимые ниже свойства; их доказательство не представляет труда.

а) Прямые слагаемые являются хорошими подгруппами.

б) Конечные расширения хороших подгрупп являются хорошими подгруппами.

в) Подгруппы группы A, замкнутые в ее p-адической топологии, являются хорошими. [Заметим, что подгруппа N замкнута в p-адической топологии тогда и только тогда, когда все смежные классы $(\neq N)$ по подгруппе N имеют конечную высоту.]

г) Пусть N_i — подгруппа группы A_i, $i \in I$. Тогда $\bigoplus_{i \in I} N_i$ является хорошей подгруппой группы $\bigoplus_{i \in I} A_i$ в том и только в том случае, когда каждое слагаемое N_i — хорошая подгруппа группы A_i.

д) Для любого порядкового числа σ подгруппа $p^\sigma A$ является хорошей в A [см. лемму 37.1].

е) Хорошая подгруппа N группы A может не быть хорошей в подгруппе группы A, содержащей N. [Заметим, что в делимой группе всякая подгруппа хорошая.]

ж) Свойство быть хорошей подгруппой не транзитивно [см. упр. 9], но справедливо следующее: подгруппа N группы $p^\sigma A$ является хорошей в $p^\sigma A$ тогда и только тогда, когда она хорошая в A. Это сразу следует из очевидного соотношения $h^*_A (a) = \sigma + h^*_{p^\sigma A} (a)$ для всех $a \in p^\sigma A$. Кроме того, если N — хорошая подгруппа группы A, то $N \cap p^\sigma A$ — хорошая подгруппа группы $p^\sigma A$.

Следующая лемма дает нам часто используемые сведения о хороших подгруппах.

Лемма 79.3. *Пусть* N *и* M — *подгруппы p-группы* A, *причем* $N \subseteq M \subseteq A$. *Тогда*

1) *если* M — *хорошая подгруппа группы* A, *то* M/N — *хорошая подгруппа группы* A/N;

2) *если* N — *хорошая подгруппа группы* A *и* M/N — *хорошая подгруппа группы* A/N, *то* M — *хорошая подгруппа группы* A.

Чтобы проверить справедливость утверждения 1), предположим, что $h^*(a + M/N) = \sigma$. Проведем индукцию по σ. Учитывая лемму 79.1, предположим, что σ — предельное порядковое число и что все смежные классы по подгруппе M/N высоты меньше σ содержат смежные классы по подгруппе N, собственные относительно M/N. Тогда для любого порядкового числа $\rho < \sigma$ существует такой элемент $x_\rho \in M$, что $h^*(a + x_\rho + N) > \rho$. Поэтому $h^*(a + M) \geqslant \sigma$, а так как обратное неравенство очевидно, то $h^*(a + M) = \sigma$. Поскольку по предположению M — хорошая подгруппа группы A, то $h^*(a + x) = \sigma$ для некоторого $x \in M$. Отсюда следует, что высота $h^*(a + x + N)$ равна σ, так как больше σ она получиться не может.

При предположениях п. 2) из $h^*(a + M) = \sigma$ следует, что существуют $y \in M$, для которого $h^*(a + y + N) = \sigma$, и $x \in N$, для которого $h^*(a + y + x) = \sigma$. ∎

Из леммы 79.3 получаем

з) Если N — хорошая подгруппа группы A, то при естественном соответствии между подгруппами группы A, содержащими подгруппу N, и подгруппами группы A/N хорошие подгруппы соответствуют хорошим.

Упражнения

1. Если M, N — подгруппы группы A и $a \in A$ — элемент, собственный и относительно M, и относительно N, то a — элемент, собственный относительно $M \cap N$.

2. (а) Если N — хорошая подгруппа редуцированной p-группы A, то A/N — редуцированная группа.

(б) Базисная подгруппа p-группы A является хорошей в том и только в том случае, когда она — редуцированная часть группы A.

3. (а) Подгруппа сепарабельной p-группы является хорошей тогда и только тогда, когда она замкнута в p-адической топологии.

(б) В периодически полной p-группе сервантная подгруппа является хорошей в том и только в том случае, когда она выделяется в ней прямым слагаемым.

4. Сервантная подгруппа может не быть хорошей.

5. Все подгруппы p-группы A являются хорошими тогда и только тогда, когда A — прямая сумма ограниченной группы и делимой группы.

6. Объединение возрастающей последовательности хороших подгрупп [прямых слагаемых] может не быть хорошей подгруппой. [*Указание*: упр. 2, п. (б).]

7. (а) Пусть A — группа из примера § 35. Показать, что подгруппа $A[p]$ не является хорошей. [*Указание*: рассмотреть смежный класс $a_1 + A[p]$.]

(б) Вполне характеристические подгруппы могут не быть хорошими.

8. Привести пример, где $N \subset M \subset A$, M/N — хорошая подгруппа группы A/N, но M не является хорошей подгруппой группы A.

9. Пусть B — неограниченная прямая сумма циклических p-групп и $\bar{B}$ — ее периодическое пополнение. Показать, что

(а) $\bar{B}[p]$ — хорошая подгруппа группы $\bar{B}$;

(б) $B[p]$ — хорошая подгруппа группы $\bar{B}[p]$, но не группы $\bar{B}$. Вывести отсюда, что свойство быть хорошей подгруппой не транзитивно.

10 (Хилл [24]). Пусть σ — произвольное порядковое число. Для того чтобы подгруппа N группы A была хорошей, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $N \cap p^\sigma A$ была хорошей в $p^\sigma A$ и подгруппа $(N + p^\sigma A)/p^\sigma A$ была хорошей в $A/p^\sigma A$.

11. Расширения p-группы A при помощи p-группы C, в которых A — хорошая подгруппа, образуют подгруппу в $\operatorname{Ext}(C, A)$. [*Указание*: рассмотреть сумму расширений в смысле Бэра.]

§ 80. Изотипные и сбалансированные подгруппы

Изотипные подгруппы ввел в рассмотрение Куликов [3]. Понятие изотипности уточняет понятие сервантности в том же самом направлении, в каком понятие обобщенной высоты улучшает понятие высоты.

Подгруппа C p-группы A называется *изотипной*, если

$$p^\sigma C = C \cap p^\sigma A \text{ для любого порядкового числа } \sigma.$$

Очевидно, изотипные подгруппы являются сервантными, а сепарабельные подгруппы изотипны тогда и только тогда, когда они сервантны. В частности, базисные подгруппы всегда изотипны. Заметим, что подгруппа C изотипна в группе A в том и только в том случае, когда из точности последовательности $0 \to C \to A \to A/C \to 0$ следует точность индуцированной последовательности

$$0 \to p^\sigma C \to p^\sigma A \to p^\sigma (A/C)$$

при любом порядковом числе σ.

Начнем с нескольких замечаний, касающихся изотипных подгрупп.

А) Подгруппа C группы A изотипна тогда и только тогда, когда обобщенные высоты ее элементов одинаковы в группах C и A.

Б) Подгруппа C изотипна в группе A тогда и только тогда, когда $p^\sigma C$ — сервантная подгруппа группы $p^\sigma A$ при любом σ. В частности, прямые слагаемые изотипны.

В) Подгруппа C изотипна в группе A тогда и только тогда, когда

$$p^{\sigma}C\,[p] = C \cap p^{\sigma}A\,[p] \quad \text{при любом } \sigma,$$

т. е. обобщенные высоты элементов цоколя подгруппы C одинаковы в C и в A. Чтобы это доказать, можно провести такие же рассуждения, как в § 26, п. з).

Г) Если C — изотипная подгруппа группы A, то $f_{\sigma}(C) \leqslant f_{\sigma}(A)$ для любого порядкового числа σ.

Д) Изотипная подгруппа C группы A изотипна в любой подгруппе группы A, содержащей C.

Е) Если $C \subseteq B \subseteq A$ и C — изотипная подгруппа группы B, а B — изотипная подгруппа группы A, то подгруппа C изотипна в A.

Ж) Если C — сервантная подгруппа группы A и $(A/C)^1 = 0$, то подгруппа C изотипна в A. [Заметим, что $A^1 \subseteq C$.]

З) Если подгруппа C изотипна в A, то подгруппа $C/p^{\sigma}C$ изотипна в $A/p^{\sigma}C$ для каждого порядкового числа σ. Если считать группу $C/p^{\sigma}C$ естественным образом вложенной в группу $A/p^{\sigma}A$, то подгруппа $C/p^{\sigma}C$ будет изотипной в $A/p^{\sigma}A$. В самом деле, это сразу следует из леммы 37.1.

И) Объединение возрастающей последовательности изотипных подгрупп также является изотипной подгруппой. Следовательно, изотипность — индуктивное свойство.

Следующий результат [обобщающий теорему 27.7] дает простой способ построения нетривиальных изотипных подгрупп.

Предложение 80.1 (Ирвин и Уокер [2]). *$p^{\rho}A$-высокая подгруппа изотипна при любом порядковом числе* ρ.

Пусть C есть $p^{\rho}A$-высокая подгруппа группы A. Пользуясь трансфинитной индукцией, докажем включение $C \cap p^{\sigma}A \subseteq p^{\sigma}C$. Для $\sigma = 0$ это включение очевидно, и оно верно для предельного порядкового числа σ, если верно для всех порядковых чисел, меньших σ. Таким образом, остается только установить, что если это включение имеет место для некоторого σ, то оно справедливо и для $\sigma + 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma < \rho$. Пусть $c \in C \cap p^{\sigma+1}A$, т. е. $pa = c$ для некоторого $a \in p^{\sigma}A$. Лемма 9.8 показывает, что $a \in C \oplus p^{\rho}A$, т. е. $a = c' + a'$ для некоторых $c' \in C$ и $a' \in p^{\rho}A$. Так как $pc' + pa' = pa \in C$, то $pa' = 0$, $pc' = c$. Из $\sigma < \rho$ теперь следует, что $c' = a - a' \in C \cap p^{\sigma}A = p^{\sigma}C$, откуда $c \in p^{\sigma+1}C$, что и требовалось. ∎

Объединим теперь понятия хорошей и изотипной подгруппы.

Назовем подгруппу B, лежащую в p-группе A, *сбалансированной*, если она одновременно является хорошей и изотипной. Ясно, что такое *сбалансированно точная* последовательность. Ввиду сделанных

ранее замечаний почти очевидно, что определение сбалансированной подгруппы можно переформулировать на языке точных последовательностей: подгруппа B является сбалансированной подгруппой группы A тогда и только тогда, когда из точности последовательности

$$0 \to B \to A \xrightarrow{\alpha} C \to 0 \tag{1}$$

вытекает точность индуцированной последовательности

$$0 \to p^\sigma B \to p^\sigma A \to p^\sigma C \to 0 \tag{2}$$

для любого порядкового числа σ. Таким образом, мы имеем следующую коммутативную диаграмму, где все столбцы и первые две строки точны:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & p^\sigma B & \to & p^\sigma A & \to & p^\sigma C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B & \to & A & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B/p^\sigma B & \to & A/p^\sigma A & \to & C/p^\sigma C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{3}$$

В силу 3×3-леммы точна третья строка

$$0 \to B/p^\sigma B \to A/p^\sigma A \to C/p^\sigma C \to 0. \tag{4}$$

В действительности точность последовательности (4) эквивалентна точности последовательности (2).

Из сказанного легко следует, что если B — сбалансированная подгруппа группы A, то $p^\sigma B$ — сбалансированная подгруппа группы $p^\sigma A$, а $B/p^\sigma B$ — сбалансированная подгруппа группы $A/p^\sigma A$ при любом σ.

Чтобы лучше разобраться во введенном понятии, прежде чем начать рассмотрение сбалансированных подгрупп, отметим, что если попытаться проверить точность последовательности (2) при помощи трансфинитной индукции, то сразу можно заметить, что

1) для получения точности на месте $p^\sigma B$ не нужно делать никаких предположений относительно подгруппы B;

2) для получения точности на месте $p^\sigma A$ тот факт, что B — изотипная подгруппа, приходится использовать только при переходе от $\sigma - 1$ к σ;

3) для получения точности на месте $p^\sigma C$ предположение, что B — хорошая подгруппа группы A, нужно только при переходе от меньших порядковых чисел к предельному порядковому числу σ.

Короче говоря, изотипность нужна для получения точности последовательности при непредельных порядковых числах σ, а свойство быть хорошей подгруппой — при предельных.

Пример 1. Нетривиальным примером сбалансированной подгруппы служит следующий пример. Пусть $\overline{B}$ — неограниченная периодически полная p-группа и $0 \to C \to A \to \overline{B} \to 0$ — сервантно проективная резольвента груп-

пы $\overline{B}$. Тогда группа C замкнута в p-адической топологии группы A, поэтому она служит хорошей подгруппой группы A. Кроме того, в силу п. Ж) она и изотипна. Следовательно, C — сбалансированная подгруппа, но не прямое слагаемое группы A.

Пример 2. Пусть C — группа примера 3 из § 77, а X — прямая сумма континуального множества групп, изоморфных группе A из примера § 35. Для каждого $c \in C[p]$ возьмем такой гомоморфизм φ_c группы A_c, изоморфной A, в группу C, что некоторый элемент $a_c \in A_c$ высоты $h^*(c)$ отображается на c. Таким способом мы получим эпиморфизм $\varphi\colon X \to C$, ядро которого — сбалансированная подгруппа [чтобы в этом убедиться, нужно поступить так же, как при доказательстве леммы 30.1]. Это ядро — не прямое слагаемое, так как C — не прямая сумма счетных p-групп.

Из рассуждений § 81 и 82 будет следовать, что всякая не являющаяся тотально проективной p-группа C может быть вложена в нерасщепляющуюся точную последовательность $0 \to B \to A \to C \to 0$, где A — тотально проективная группа, а B — ее сбалансированная подгруппа. Это оправдывает утверждение о многочисленности примеров сбалансированных подгрупп.

Перечислим теперь некоторые полезные свойства сбалансированных подгрупп.

а) Прямые слагаемые всегда являются сбалансированными подгруппами.

б) *Если B — сбалансированная подгруппа группы A и $B \subset G \subset A$, то B — сбалансированная подгруппа группы G.*

В силу п. Д) достаточно проверить, что B — хорошая подгруппа группы G. Пусть $g \in G$, $h^*_{G/B}(g + B) = \sigma$ для некоторого предельного порядкового числа σ и смежные классы группы G по подгруппе B, высота которых меньше σ, содержат элементы группы G, собственные относительно B. Тогда для любого $\rho < \sigma$ существует такое $b_\rho \in B$, что $g + b_\rho \in p^\rho G$. Если для элемента $b \in B$ выполнено $g + b \in p^\rho A$, то $b - b_\rho \in B \cap p^\rho A = p^\rho B$ и, таким образом, $g + b = (g + b_\rho) + (b - b_\rho) \in p^\rho G$, откуда $h^*_G(g + b) = \sigma$.

в) *Если B — сбалансированная подгруппа группы A и $C \subset B$, то B/C — сбалансированная подгруппа группы A/C.*

В силу леммы 79.3 нужно только показать, что B/C — изотипная подгруппа группы A/C. Если $b + C \in p^\sigma(A/C)$ при некотором $b \in B$, то существуют элементы $a \in p^\sigma A$ и $c \in C$, для которых $b + c = a \in B \cap p^\sigma A = p^\sigma B$. Следовательно, $b + C \in p^\sigma B + C \subseteq p^\sigma(B/C)$, и подгруппа B/C изотипна в A/C.

г) *Если $C \subset B \subset A$, где C — сбалансированная подгруппа группы A, а B/C — сбалансированная подгруппа группы A/C, то B — сбалансированная подгруппа группы A.*

Чтобы проверить изотипность, возьмем $b \in B \cap p^\sigma A$. Тогда $b + C \in B/C \cap p^\sigma(A/C) = p^\sigma(B/C)$, откуда $b - b_1 \in C$ для некоторого $b_1 \in p^\sigma B$. Поэтому $b - b_1 \in C \cap p^\sigma A = p^\sigma C$ и $b \in p^\sigma B$.

д) *Если $C \subset B \subset A$, где C — сбалансированная подгруппа группы B, а B — сбалансированная подгруппа группы A, то C — сбалансированная подгруппа группы A.*

В силу E) достаточно доказать, что C — хорошая подгруппа группы A. Пусть для элемента $a \in A$ выполнено равенство $h^* (a + C) = \sigma$. Если $a \in B$, то из п. в) следует, что элемент $a + C$ имеет в группе B/C высоту σ. Поэтому $h^* (a + c) = \sigma$ при некотором $c \in C$. Если $a \notin B$, то $h^* (a + B) \geqslant \sigma$ и $h^* (a + b) = h^* (a + B)$ при некотором $b \in B$. Очевидно, что $h^* (-a - b + a + C) \geqslant \sigma$, откуда $h^* (-b + c) \geqslant \sigma$ и $h^* (a + c) = h^* (a + b - b + c) \geqslant \sigma$ для некоторого $c \in C$. Следовательно, $h^* (a + c) = \sigma$, и все доказано.

В следующем предложении собраны наиболее часто используемые характеризации сбалансированных подгрупп.

Предложение 80.2. *Для точной последовательности* (1) *эквивалентны следующие условия*:

1) B *— сбалансированная подгруппа группы* A;
2) *для любого порядкового числа* σ *последовательность* (2) *точна*;
3) *для любого порядкового числа* σ *последовательность* (4) *точна*;
4) $\alpha (p^\sigma A [p]) = p^\sigma C [p]$ *для любого* σ.

Эквивалентность условий 1) — 3) уже была отмечена выше. Поэтому предположим, что выполнено условие 2), и возьмем элемент $c \in \in p^\sigma C [p]$. Существует элемент $a \in p^\sigma A$, для которого $\alpha a = c$. Здесь $pa \in p^{\sigma+1}A \cap B = p^{\sigma+1}B$, поэтому $pb = pa$ для некоторого $b \in p^\sigma B$. Ясно, что элемент $a - b \in p^\sigma A [p]$ при отображении α переходит в c. Следовательно, $p^\sigma C [p] \subseteq \alpha (p^\sigma A [p])$. Обратное включение очевидно.

Пусть выполнено условие 4). Тогда проверим прежде всего, что $p^\sigma C [p^k] \subseteq \alpha (p^\sigma A)]$ при $k = 1, 2, \ldots$. При $k = 1$ это следует из условия 4). Поэтому предположим, что нужное включение имеет место для любого σ и для $k - 1$. Если элемент $c \in p^\sigma C$ имеет порядок p^k $(k > 1)$, то существует такой элемент $x \in A$, что $\alpha x = c$, и по предположению индукции для некоторого $y \in p^{\sigma+1}A$ выполнено $\alpha y = = pc \in p^{\sigma+1}C [p^{k-1}]$. Выберем такой элемент $a_0 \in p^\sigma A$, что $pa_0 = y$, и заметим, что $\alpha (x - a_0) = c - \alpha a_0 \in p^\sigma C [p]$. Следовательно, $c - \alpha a_0 = \alpha a_1$ для некоторого $a_1 \in p^\sigma A$ и $c = \alpha a$, где $a = a_0 + a_1 \in \in p^\sigma A$. Отсюда вытекает, что последовательность (2) точна в члене $p^\sigma C$.

Для завершения доказательства остается проверить, что $B \cap p^\sigma A = = p^\sigma B$. При $\sigma = 0$ это верно. Предположим, что это верно при некотором σ, и докажем для $\sigma + 1$. Для этого возьмем элемент $b \in B \cap p^{\sigma+1}A$ и элемент $a_0 \in p^\sigma A$, для которых $pa_0 = b$. Так как $\alpha a_0 \in p^\sigma C [p]$, то можно найти такой элемент $a_1 \in p^\sigma A [p]$, что $\alpha a_1 = \alpha a_0$. Отсюда $a = a_0 - a_1 \in B \cap p^\sigma A = p^\sigma B$, откуда $b = pa \in p^{\sigma+1}B$. Предельный шаг индукции проводится очевидным образом. ∎

Следующая лемма — одна из основных ступеней доказательства важной теоремы 81.9.

Лемма 80.3. *Пусть дана коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \to & G & & \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \to & B & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & C & \to & 0 \end{array} \qquad (5)$$

с точными строками, где B — сбалансированная подгруппа группы A, и пусть ψ не уменьшает высоты элементов из N, взятые в G. Если элемент $g \in G$ является собственным относительно подгруппы N и $pg \in N$, то ψ можно продолжить до такого отображения

$$\psi^*: \langle N, g \rangle \to A,$$

что $\alpha\psi^* g = \varphi g$ и ψ^* не уменьшает высоты.

Если $h^*(g) = \sigma$, то для некоторого $a \in p^\sigma A$ выполнено $\alpha a = \varphi g$. Очевидно, $pa - \psi(pg) \in B \cap p^{\sigma+1}A = p^{\sigma+1}B$. Следовательно, существует такой элемент $b \in p^\sigma B$, что $pb = pa - \psi(pg)$. Положим $\psi^* g = a - b \in A$. Легко видеть, что это порождает гомоморфизм группы $\langle N, g \rangle$ в группу A, для которого $\alpha\psi^* g = \alpha a = \varphi g$. Неравенство $h^*(a - b) \geqslant \sigma = h^*(g)$ очевидно, и чтобы проверить, что ψ^* не уменьшает высоты, достаточно показать, что $h^*(g + x) \leqslant h^*(a - b + \psi x)$ для всех $x \in N$. Так как элемент g был собственным относительно N, то $h^*(g + x) = \min(h^*(g), h^*(x))$. С другой стороны, $h^*(a - b + \psi x) \geqslant \min(h^*(a - b), h^*(\psi x)) \geqslant \min(\sigma, h^*(x))$, что и завершает доказательство. ∎

Если N — хорошая подгруппа группы G конечного [или счетного] индекса и (5) — диаграмма из леммы 80.3, то повторное применение этой леммы дает продолжение $\bar{\psi}: G \to A$ гомоморфизма ψ, для которого $\alpha\bar{\psi} = \varphi$.

Упражнения

1 (Куликов [3]). Подгруппа C группы A изотипна в A тогда и только тогда, когда для некоторого порядкового числа ρ подгруппа $p^\rho C$ изотипна в $p^\rho A$ и подгруппа $C/p^\rho C$ изотипна в $A/p^\rho C$.

2. Подгруппа C группы A изотипна в A тогда и только тогда, когда $p^{\sigma+1}C = p^\sigma C \cap p^{\sigma+1}A$ для любого порядкового числа σ.

3 (Ирвин и Уокер [2]). Любую подгруппу p-группы A, высоты элементов которой не превышают σ, можно вложить в изотипную подгруппу группы A, высоты элементов которой также не превышают σ.

4. p-группа A длины τ обладает изотипной подгруппой длины $\sigma \leqslant \tau$ тогда и только тогда, когда или σ — предельное порядковое число, или $f_{\sigma-1}(A) \neq 0$.

5. Пусть p-группа A имеет длину не больше ω_1. Показать, что всякую счетную подгруппу группы A можно вложить в счетную изотипную подгруппу. [*Указание*: сделать как в предложении 26.2.]

6. Пусть A — группа с образующими $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ и определяющими соотношениями

$$pa_0 = b_0,\ pb_0 = 0,\ p^n a_n = a_0,\ p^n b_n = b_0 \text{ для любого } n.$$

Показать, что подгруппа $B = \langle b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots \rangle$ сервантна, но не изотипна в A.

7. (Ирвин и Уокер [2]). Пусть A — такая p-группа, что $|p^{\omega_1}A| = \aleph_0$. Доказать, что в группе A имеется сервантная, но не изотипная подгруппа, содержащая $p^{\omega_1}A$.

8. Если B — сбалансированная подгруппа группы A и последовательность (1) точна, то точна индуцированная последовательность $0 \to D_B \to D_A \to D_C \to 0$ максимальных делимых подгрупп.

9. Базисная подгруппа p-группы является сбалансированной тогда и только тогда, когда она выделяется в этой группе прямым слагаемым.

10. Если B — сбалансированная подгруппа группы A и $\langle a + B\rangle$ — циклическое прямое слагаемое группы A/B, то $\langle B, a\rangle$ — сбалансированная подгруппа группы A.

11. (а) Сбалансированная подгруппа группы A, имеющая счетный индекс, выделяется прямым слагаемым. [*Указание*: применить замечание, сделанное после леммы 80.3, к случаю, когда $N = 0$, $C = G$, $\varphi = 1_C$.]

(б) Подгруппа счетной p-группы является сбалансированной в том и только в том случае, когда она выделяется в этой группе прямым слагаемым.

12. Пусть N — хорошая подгруппа p-группы G, а ψ — гомоморфизм группы N в p-группу A, не уменьшающий высоты, взятые в группе G. Если $N \subset M \subseteq G$ и M/N — счетная группа, то ψ можно продолжить до гомоморфизма группы M в A, также не уменьшающего высоты. [*Указание*: последовательное продолжение; если $|M : N| = p$, продолжать, как в лемме 80.3.]

13. Если B — сбалансированная подгруппа группы G, то $\mathrm{Tor}(B, X)$ — сбалансированная подгруппа группы $\mathrm{Tor}(G, X)$ для любой группы X. [*Указание*: использовать теорему 63.2 и лемму 64.2.]

§ 81. p-группы с хорошими композиционными рядами

Неоднократно делались попытки распространить теорему Ульма на случай различных p-групп, не обязательно равных прямым суммам счетных p-групп. Очевидно, очень естественно возникает такая проблема: найти наиболее широкий класс p-групп, в котором отдельные группы различаются с помощью их инвариантов Ульма — Капланского. В этом направлении в последние годы появилось большое количество работ. В результате в нашем распоряжении оказывается богатая теория и, главное, указанная выше проблема полностью решена.

К теории можно подойти с разных сторон, и каждая из них выделяет некоторый специфический аспект рассматриваемого класса групп. Наша отправная точка близка к выбранной Хиллом. Затем мы получаем различные эквивалентные характеризации класса и в конце доказываем обобщенную теорему Ульма.

Если исследовать детали доказательства теоремы Ульма 77.3, то легко заметить, что основным в нем (хотя и не вполне достаточным для доказательства) был тот факт, что всякое сохраняющее высоту изоморфное отображение конечной подгруппы можно продолжить на ступень дальше и в конце концов достичь всей группы. Как мы знаем из леммы 77.1, этим свойством продолжаемости

обладают все хорошие подгруппы. Учитывая это, мы сосредоточим внимание на группах, которые можно достичь посредством подобного же, но, быть может, трансфинитного процесса при помощи хороших подгрупп.

Пусть A — некоторая p-группа и

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\lambda \subset \ldots \subset N_\mu = A \qquad (1)$$

— вполне упорядоченная строго возрастающая цепочка подгрупп группы A, обладающая такими свойствами:

а) $N_0 = 0$, $N_\mu = A$;
б) каждая подгруппа N_λ — хорошая подгруппа группы A;
в) $|N_{\lambda+1} : N_\lambda| = p$ для любого $\lambda < \mu$;
г) $N_\lambda = \bigcup\limits_{\varkappa<\lambda} N_\varkappa$, если λ — предельное порядковое число.

Такая цепочка будет называться *хорошим композиционным рядом* группы A.

Покажем, что счетные p-группы и их прямые суммы принадлежат классу групп, обладающих хорошими композиционными рядами.

Лемма 81.1. *Прямые суммы счетных p-групп обладают хорошими композиционными рядами.*

Если немного подумать, это почти очевидно, но провести доказательство во всех его деталях не так просто.

Пусть сначала A — счетная p-группа. Тогда группу A, очевидно, можно получить как объединение возрастающей последовательности типа ω ее конечных подгрупп. Вставив, если нужно, подгруппы между соседними членами, получаем возрастающую цепочку подгрупп $0 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \ldots \subset A$, где $\bigcup\limits_{k<\omega} N_k = N_\omega = A$ и N_k имеет индекс p в N_{k+1} при любом k. Так как конечные подгруппы являются хорошими, это действительно хороший композиционный ряд группы A.

Если A — прямая сумма счетных p-групп, то вполне упорядочим множество индексов и напишем $A = \bigoplus\limits_{\sigma<\tau} A_\sigma$, где A_σ — счетные группы, а τ — некоторое порядковое число. Если $0 = N_{\sigma 0} \subset N_{\sigma 1} \subset \ldots \subset N_{\sigma\omega} = A_\sigma$ — хороший композиционный ряд группы A_σ, то

$$0 = N_{00} \subset N_{01} \subset \ldots \subset A_0 \subset A_0 \oplus N_{11} \subset \ldots \subset A_0 \oplus A_1 \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \bigoplus_{\rho<\sigma} A_\rho \oplus N_{\sigma k} \subset \ldots \subset \bigoplus_{\sigma<\tau} A_\sigma = A$$

— хороший композиционный ряд группы A. ∎

Будет удобно перечислить следующие утверждения, которые или проверяются непосредственно, или вытекают из доказательства леммы 81.1.

А) Если B — сбалансированная подгруппа группы A и группы B и A/B обладают хорошими композиционными рядами, то A также

обладает хорошим композиционным рядом. То же утверждение верно, если $B = p^\sigma A$ для некоторого порядкового числа σ.

Б) Чтобы группа A имела хороший композиционный ряд, достаточно существования вполне упорядоченной возрастающей цепочки подгрупп (1) со свойствами а), б) и г), в которой вместо свойства в) выполняется требование, чтобы группы $N_{\lambda+1}/N_\lambda$ были счетными. Это простое следствие из п. б) § 79.

В) Прямые суммы p-групп, обладающих хорошими композиционными рядами, также обладают хорошими композиционными рядами.

Тщательный анализ может убедить читателя в том, что определение хорошего композиционного ряда было сформулировано в несколько более сильной форме, чем требуется для доказательства следующих теорем. На самом деле свойство б) можно заменить требованием, чтобы лишь смежные классы $a + N_\lambda$, где $a \in N_{\lambda+1} \setminus N_\lambda$, содержали элементы, собственные относительно N_λ, для каждого λ [более того, достаточно это предполагать ровно для одного из $p - 1$ смежных классов].

Следующая теорема и ее следствия выявляют замечательные свойства p-групп, обладающих хорошими композиционными рядами.

Теорема 81.2. *Пусть A и C — редуцированные p-группы, и пусть φ — сохраняющий высоту изоморфизм между хорошей подгруппой G группы A и подгруппой H группы C. Предположим, далее, что*

α) группа A/G обладает хорошим композиционным рядом;

β) относительные инварианты Ульма — Капланского удовлетворяют условию $f_\sigma(A, G) \leqslant f_\sigma(C, H)$ для любого σ.

Тогда изоморфизм φ можно продолжить до сохраняющего высоту изоморфного отображения φ^* группы A в C.

Для каждого σ выберем произвольный мономорфизм α_σ: $p^\sigma A[p]/G(\sigma) \to p^\sigma C[p]/H(\sigma)$. Выберем также хороший композиционный ряд, соединяющий подгруппу G с группой A:

$$G = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\lambda \subset \ldots \subset N_\mu = A.$$

Рассмотрим множество всех таких пар $(N_\lambda, \varphi_\lambda)$, что

1) φ_λ — сохраняющий высоту изоморфизм между N_λ и некоторой подгруппой M_λ группы C;

2) ограничение φ_λ на G совпадает с φ;

3) α_σ индуцирует изоморфизм $N_\lambda(\sigma)/G(\sigma) \to M_\lambda(\sigma)/H(\sigma)$ при любом σ.

Это множество очевидным образом частично упорядочено. В силу леммы Цорна в нем существует максимальная пара (N_ν, φ_ν). Из условия 3) следует, что $f_\sigma(A, N_\nu) \leqslant f_\sigma(C, M_\nu)$ для каждого σ. В силу условия 1) мы теперь находимся в обстановке леммы 77.1, и φ_ν можно продолжить до сохраняющего высоту изоморфизма $\varphi_{\nu+1}$ между подгруппой $N_{\nu+1}$ и подгруппой $M_{\nu+1}$ группы C, для которой условие 3) по-прежнему выполняется. Но это противоречит максимальности пары (N_ν, φ_ν), если не выполнено $N_\nu = A$. ∎

Следствие 81.3. *Пусть A — редуцированная p-группа, обладающая хорошим композиционным рядом. Группа A изоморфна изотипной подгруппе p-группы C в том и только в том случае, когда*

$$f_\sigma(A) \leqslant f_\sigma(C) \text{ при любом } \sigma.$$

Необходимость этого условия вытекает из п. Г) § 80. Чтобы доказать его достаточность, просто применим теорему 81.2, положив $G = 0 = H$. Тогда получится изоморфное вложение группы A в C, сохраняющее обобщенные высоты. ∎

Следствие 81.4. *Пусть A и C — некоторые p-группы, а η — гомоморфизм хорошей подгруппы G группы A в C, не уменьшающий высоты. Если факторгруппа A/G обладает хорошим композиционным рядом, то η можно продолжить до гомоморфизма η^*: $A \to C$, который также не уменьшает высоты.*

Заметим, что η индуцирует сохраняющий высоты автоморфизм φ: $G \oplus C \to G \oplus C$, где $(g, c) \mapsto (g, c + \eta g)$. Так как $G \oplus C$ — хорошая подгруппа группы $A \oplus C$ и группа $(A \oplus C)/(G \oplus C)$ обладает хорошим композиционным рядом, то можно применить теорему 81.2, и получится сохраняющее высоты изоморфное отображение φ^* группы $A \oplus C$ в [более того, на] себя. Теперь последовательное выполнение естественного вложения $A \to A \oplus C$, автоморфизма φ^* и естественной проекции $A \oplus C \to C$ даст нужное отображение η^*. ∎

Существует более сильная форма условия существования хороших композиционных рядов. Мы скажем, что p-группа A обладает *хорошей системой* [Хилл [17] называет это условие *третьей аксиомой счетности*], если в A существует такая система $\mathbf{N}$ хороших подгрупп, что

а′) $0 \in \mathbf{N}$;

б′) если $\{N_i\}_{i \in I}$ — произвольное подмножество из $\mathbf{N}$, то $\sum_{i \in I} N_i \in \mathbf{N}$;

в′) для любой подгруппы $N \in \mathbf{N}$ и счетного подмножества X группы A существует такая подгруппа $M \in \mathbf{N}$, что

$$\langle N, X\rangle \subseteq M \quad \text{и} \quad |M/N| \leqslant \aleph_0.$$

Простое упражнение в трансфинитной арифметике — проверить существование хороших композиционных рядов в группах, обладающих хорошими системами. Как ни странно, все группы, обладающие хорошими композиционными рядами, обладают также хорошими системами; этот факт непросто доказать, но он будет следовать из теоремы 81.9.

Если A — счетная p-группа, то $\{0, A\}$ — хорошая система в группе A. Если A — прямая сумма счетных p-групп A_i $(i \in I)$, то подгруппы $N_J = \bigoplus_{i \in J} A_i$, где J пробегает все подмножества множества I, образуют хорошую систему в A.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 81.5 (Хилл [24]). *Класс групп, обладающих хорошими системами, замкнут относительно прямых сумм и прямых слагаемых.*

Пусть $\mathbf{N}_i$ — система хороших подгрупп в группе A_i ($i \in I$), обладающая свойствами а′) — в′), и пусть $\mathbf{N}$ — множество всех подгрупп N группы $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, имеющих вид $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$, где $N_i \in \mathbf{N}_i$. В силу п. г) из § 79 каждая подгруппа N хорошая в A. Свойства а′) и б′) в $\mathbf{N}$ выполняются тривиальным образом. Пусть X — счетное подмножество группы A, и пусть $N \in \mathbf{N}$. Существует такое счетное подмножество J множества I, что $X \subseteq \bigoplus_{i \in J} A_i$ и для каждого $i \in J$ существует такая подгруппа $M_i \in \mathbf{N}_i$, что $N_i \subseteq M_i$, M_i/N_i — счетная группа и M_i содержит проекцию множества X в A_i. Полагая $M_i = N_i$ при $i \in I \setminus J$ и беря $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, получим подгруппу, о которой говорится в свойстве в′).

Далее, пусть $A = B \oplus C$, и пусть $\mathbf{N}$ — система хороших подгрупп группы A со свойствами а′) — в′). Обозначим через $\mathbf{N}'$ множество всех подгрупп $N' \subseteq B$, для которых при некотором $N \in \mathbf{N}$ справедливо $N = N' \oplus (N \cap C)$. Снова по п. г) из § 79 N' — хорошая подгруппа в B. Почти очевидно, что множество $\mathbf{N}'$ обладает свойствами а′) и б′). Пусть X — счетное подмножество группы B и $N' \in \mathbf{N}'$. Предположим, что для группы $N \in \mathbf{N}$ выполнено $N = N' \oplus (N \cap C)$. Выберем $N_1 \in \mathbf{N}$ таким, чтобы было $\langle N, X \rangle \subseteq N_1$ и $|N_1/N| \leqslant \aleph_0$. Существуют такие подгруппы B_1, C_1, что $N' \subseteq B_1 \subseteq B$ и $N \cap C \subseteq C_1 \subseteq C$, причем $|B_1/N'| \leqslant \aleph_0$ и $|C_1/(N \cap C)| \leqslant \aleph_0$, а $N_1 \subseteq B_1 \oplus C_1$. Можно найти такую группу $N_2 \in \mathbf{N}$, что $\langle N, B_1 \rangle \subseteq N_2$ и $|N_2/N| \leqslant \aleph_0$. Продолжая таким же образом, мы получим, что существуют последовательности подгрупп $N_n \in \mathbf{N}$, $B_n \subseteq B$, $C_n \subseteq C$ ($n = 1, 2, \ldots$) со следующими свойствами:

$$N_n \subseteq B_n \oplus C_n, \quad \langle N, B_n \rangle \subseteq N_{n+1} \quad \text{и} \quad |N_n/N| \leqslant \aleph_0.$$

Очевидно, что если $M = \bigcup_{n<\omega} N_n \in \mathbf{N}$, то $M = (M \cap B) \oplus (M \cap C)$, откуда $M \cap B \in \mathbf{N}'$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что $\langle N', X \rangle \subseteq M \cap B$ и $|(M \cap B)/N'| \leqslant |M/N| \leqslant \aleph_0$. ∎

До сих пор у нас нет примеров p-групп, обладающих хорошими системами и отличных от прямых сумм счетных p-групп; в самом деле, лемма 81.5 новых примеров не дает. Чтобы убедиться в том, что гораздо более широкий класс p-групп обладает хорошими системами и что длины таких групп не ограничены в совокупности никаким порядковым числом, мы будем строить группы по индукции. Как мы увидим, эти группы будут играть существенную роль в развиваемой теории.

Начав с группы $H_0 = 0$, мы для каждого порядкового числа σ построим такую p-группу H_σ, что

1) H_σ имеет длину σ;

2) $p^\sigma H_{\sigma+1}$ — циклическая группа порядка p и $H_{\sigma+1}/p^\sigma H_{\sigma+1} \cong H_\sigma$;

3) $H_\sigma = \bigoplus_{\rho<\sigma} H_\rho$, если σ — предельное порядковое число;

4) каждый инвариант Ульма — Капланского группы H_σ не больше $|\sigma|$.

Так как $H_0 = 0$, из условия 2) следует, что H_n — циклическая группа порядка p^n при любом целом $n > 0$. Кроме того, условие 3) показывает, что $H_\omega = \bigoplus_{n<\omega} H_n$. Вообще из условия 3) видно, как получить группу H_σ для предельного порядкового числа σ, если уже определены все группы H_ρ при $\rho < \sigma$.

Чтобы определить группы H_σ для непредельных порядковых чисел σ, нам нужно будет рассмотреть два случая в зависимости от того, следует σ непосредственно за предельным порядковым числом или нет. Предположим сначала, что группа $H_{\sigma+1}$ известна. Тогда построить группу $H_{\sigma+2}$ легко. Пусть C — циклическая группа порядка p^2 и γ — эпиморфное отображение группы C на циклическую группу C' порядка p. Индуцированное отображение γ_*: $\operatorname{Ext}(H_\sigma, C) \to \operatorname{Ext}(H_\sigma, C')$ является эпиморфизмом, поэтому существует p-группа $H_{\sigma+2}$, делающая диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to C & \longrightarrow & H_{\sigma+2} & \to & H_\sigma & \to & 0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha & & \| & & \\ 0 \to C' = p^\sigma H_{\sigma+1} & \to & H_{\sigma+1} & \to & H_\sigma & \to & 0 \end{array} \tag{2}$$

коммутативной, а ее первую строку точной. Здесь $p^\sigma H_\sigma = 0$ влечет за собой $p^\sigma H_{\sigma+2} \subseteq C$. Но из $p^\sigma H_{\sigma+2} \subseteq pC$ следовало бы $p^\sigma H_{\sigma+1} = 0$, что невозможно. Значит, группа $H_{\sigma+2}$ удовлетворяет условиям 1) и 2).

Остается определить $H_{\sigma+1}$ для предельного порядкового числа σ. Заметим, что $H_\sigma \cong \bigoplus_{\rho<\sigma} (H_{\rho+1}/p^\rho H_{\rho+1})$, где все группы $p^\rho H_{\rho+1}$ циклические порядка p. Поэтому, используя кодиагональное отображение ∇: $\bigoplus_\rho p^\rho H_{\rho+1} \to C'$, можно определить $H_{\sigma+1}$, используя универсальный квадрат, и получить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \bigoplus_{\rho<\sigma} p^\rho H_{\rho+1} & \to & \bigoplus_{\rho<\sigma} H_{\rho+1} & \to & H_\sigma & \to & 0 \\ \downarrow \nabla & & \downarrow & & \| & & \\ 0 \longrightarrow C' & \longrightarrow & H_{\sigma+1} & \to & H_\sigma & \to & 0 \end{array} \tag{3}$$

с точными строками. Так как ∇ — эпиморфизм, $C' \subseteq p^\sigma H_{\sigma+1}$. Обратное включение вытекает из равенства $p^\sigma H_\sigma = 0$. Следовательно, группа $H_{\sigma+1}$ удовлетворяет условиям 1) и 2).

Условие 4) легко получается из определения, если просто использовать трансфинитную индукцию.

Замечание. Для ориентации читателя отметим сразу, что определенная выше группа $H_{\sigma+2}$ зависит от выбора эпиморфизма γ. Но различные выборы γ ведут к изоморфным группам $H_{\sigma+2}$, так как другой выбор γ попросту означает, что до γ был применен автоморфизм группы C, который [так как он является

умножением на целое число, взаимно простое с p], очевидно, продолжается до изоморфизма между двумя группами $H_{\sigma+2}$. Те же замечания применимы к построению группы $H_{\sigma+1}$ в диаграмме (3). Следовательно, *полученные выше группы* H_σ *определены однозначно с точностью до изоморфизма.*

Легко заметить, что группа $H_{\omega+1}$ нам давно знакома. В самом деле, эта группа изоморфна группе A примера Прюфера из § 35 [это простейший пример несепарабельной редуцированной p-группы]. В силу этого определенную выше группу H_σ будем в дальнейшем называть (*обобщенной*) *группой Прюфера длины* σ. Нунке [7] первым обратил внимание на важность таких групп.

Теперь мы можем проверить, что такие группы содержат хорошие системы.

Лемма 81.6. *Обобщенные группы Прюфера обладают хорошими системами.*

Докажем это с помощью трансфинитной индукции. В предельном случае утверждение очевидно в силу леммы 81.5, так как тогда H_σ — прямая сумма групп H_ρ, где $\rho < \sigma$. Если H_σ обладает системой $\mathbf{N}$ хороших подгрупп со свойствами а′) — в′), то прообразы подгрупп из $\mathbf{N}$ при эпиморфизме $H_{\sigma+1} \to H_\sigma$, ядро $p^\sigma H_{\sigma+1}$ которого — хорошая подгруппа группы $H_{\sigma+1}$, дают систему подгрупп группы $H_{\sigma+1}$ нужного типа. ∎

В следующих двух результатах выявляются важные свойства групп Прюфера H_σ.

Лемма 81.7 (Нунке [7]). *Если A — некоторая p-группа и $a \in p^\sigma A\,[p^n]$, то существует гомоморфизм*

$$\varphi\colon H_{\sigma+n} \to A, \quad \textit{такой, что} \quad \varphi h = a,$$

где h — образующий элемент группы $p^\sigma H_{\sigma+n}$.

Соответствие $h \mapsto a$ определяет гомоморфизм $\eta\colon p^\sigma H_{\sigma+n} \to \langle a \rangle$, не уменьшающий высоты. Так как $p^\sigma H_{\sigma+n}$ — хорошая подгруппа группы $H_{\sigma+n}$, факторгруппа по которой обладает хорошим композиционным рядом, то по следствию 81.4 гомоморфизм η продолжается до требуемого гомоморфизма φ. ∎

Лемма 81.8. *Пусть A — редуцированная p-группа длины τ. Существуют прямая сумма H обобщенных групп Прюфера длины не больше τ и эпиморфизм $\varphi\colon H \to A$, ядро которого — сбалансированная подгруппа группы H.*

Для любого ненулевого элемента $a \in p^\sigma A\,[p^n]$ $(\sigma + n < \tau)$ выберем обобщенную группу Прюфера $H_a \cong H_{\sigma+n}$ и гомоморфизм $\varphi_a\colon H_a \to A$ в соответствии с леммой 81.7. Положив $H = \bigoplus_{a \in A} H_a$, получаем эпиморфное отображение $\varphi = \nabla (\oplus \varphi_a)$ группы H на A. Очевидно, $\varphi\,(p^\sigma H\,[p]) = p^\sigma A\,[p]$ при любом σ, поэтому из предложения 80.2 следует, что $\operatorname{Ker} \varphi$ — сбалансированная подгруппа группы H. ∎

Теперь легко доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 81.9. *Следующие условия, накладываемые на редуцированную p-группу A, эквивалентны:*

α) *группа A обладает хорошей системой;*

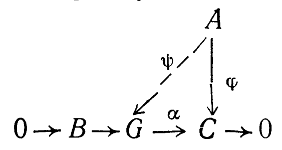
β) *группа A обладает хорошим композиционным рядом;*

γ) *группа A проективна относительно всех сбалансированно точных последовательностей p-групп* $0 \to B \to G \to C \to 0$;

δ) *группа A — прямое слагаемое прямой суммы обобщенных групп Прюфера.*

Мы уже отмечали, что импликация α) ⇒ β) тривиальна.

Предполагая выполненным условие β), докажем, что имеет место условие γ). Рассмотрим диаграмму



где B — сбалансированная подгруппа группы G, и выберем в группе A хороший композиционный ряд (1). Отображение ψ можно определить последовательно для групп N_λ с помощью трансфинитного процесса: на предельных местах будем брать объединение, а при переходе от N_λ к $N_{\lambda+1}$ будем просто ссылаться на лемму 80.3.

Предположим теперь, что выполнено условие γ), и докажем, что выполнено условие δ). Из леммы 81.8 мы знаем, что для всякой p-группы A существуют прямая сумма H обобщенных групп Прюфера и сбалансированно точная последовательность $0 \to B \to H \xrightarrow{\varphi} A \to 0$. Применяя условие γ), получаем, что $\varphi\psi = 1_A$ для соответствующего гомоморфизма ψ: $A \to H$. Следовательно, группа A изоморфна прямому слагаемому группы H.

Наконец, выведем условие α) из условия δ). Теперь утверждение вытекает из лемм 81.5 и 81.6. ∎

С помощью трансфинитной индукции можно непосредственно убедиться в том, что ульмовские факторы обобщенных групп Прюфера являются прямыми суммами циклических групп. Так как это свойство наследуется прямыми суммами и прямыми слагаемыми, то сразу получается

Предложение 81.10. *Все ульмовские факторы p-группы A, удовлетворяющей одному из условий [а значит, и всем условиям] теоремы 81.9, являются прямыми суммами циклических групп.* ∎

Что касается структурной теоремы для групп, о которых идет речь в теореме 81.9, то здесь мы отсылаем читателя к теореме 83.3.

Естественно задать вопрос: *какие редуцированные p-группы инъективны относительно класса сбалансированно точных последовательностей p-групп*? Неожиданным образом этот вопрос не приводит к новому классу групп: здесь получается класс периодически полных p-групп [Гриффит [9]].

Чтобы это доказать, заметим, что все сервантно точные последовательности p-групп $0 \to A \to G \to C \to 0$, где $C^1 = 0$, должны быть сбалансированно точными. Поэтому, если группа A инъективна относительно всех сбалансированно точных последовательностей p-групп, то $\operatorname{Pext}(C, A) = 0$ для всех сепарабельных p-групп C. Если взять $C = \overline{B}$, то получится, что A—периодически полная группа, как было показано в § 68 [см. замечание].

Упражнения

1*. (а) Используя теорему 82.4, показать, что неограниченная периодически полная p-группа не может обладать хорошим композиционным рядом.

(б) Периодическая часть прямого произведения бесконечного числа неограниченных редуцированных p-групп, обладающих хорошими композиционными рядами, никогда не обладает таким рядом.

2. Пусть A — некоторая p-группа, n — натуральное число. Доказать, что подгруппа p^nA обладает хорошим композиционным рядом в точности тогда, когда хорошим композиционным рядом обладает группа A.

3. Пусть p-группа A обладает хорошей системой. Если B — конечная подгруппа, а C — подгруппа конечного индекса группы A, то группы A/B и C обладают хорошими системами.

4. (а) Для любого бесконечного порядкового числа σ обобщенная группа Прюфера H_σ длины σ имеет мощность $|\sigma|$.

(б) Показать, что $f_\rho(H_\sigma) \neq 0$ для всех $\rho < \sigma$.

5. Доказать, что группы Прюфера H_σ определяются с точностью до изоморфизма свойствами 2) и 3).

6. Пусть σ — изолированное порядковое число. Любое прямое слагаемое прямой суммы обобщенных групп Прюфера, имеющих длины не больше ω_σ, является прямой суммой групп, мощности которых меньше $\aleph_\sigma$. [*Указание*: использовать предложение 9.10.]

7. (а) Для любого порядкового числа σ существует такое расширение G_σ группы Z при помощи группы H_σ, что

$$p^\sigma G_\sigma \cong Z \quad \text{и} \quad G_\sigma/p^{\sigma+n}G_\sigma \cong H_{\sigma+n} \quad \text{для каждого целого} \quad n \geqslant 0.$$

(б) Показать, что $G_{\sigma+n} \cong G_\sigma$ для любого порядкового числа σ и целого числа n.

8 (Нунке [5]). Если G_σ — группа из упр. 7, то для любой группы A

$$\operatorname{Hom}(G_\sigma, A) \cong p^\sigma A.$$

9. Для любой p-группы A и любого порядкового числа $\sigma \geqslant \omega$ существует эпиморфизм ∂: $\operatorname{Tor}(H_\sigma, A) \to A$. [*Указание*: применить теорему 63.1 к точной последовательности $0 \to Z \to G_\sigma \to H_\sigma \to 0$ и заметить, что $G_\sigma \otimes A \to H_\sigma \otimes A$ — изоморфизм.]

10. Доказать справедливость следствия 81.4, опираясь не на теорему 81.2, а на лемму 80.3.

11. (а) Показать, что p-группа обладает хорошим композиционным рядом [хорошей системой] в том и только в том случае, когда им [ею] обладает ее редуцированная часть.

(б) Делимые p-группы проективны относительно всех сбалансированно точных последовательностей p-групп.

(в) Распространить теорему 81.9 на случай нередуцированных p-групп.

12 (Уорфилд). Короткая точная последовательность p-групп, относительно которой проективны все группы, описываемые теоремой 81.9, является сбалансированно точной.

13. Показать, что если редуцированная p-группа A содержит подгруппу C, обладающую хорошей системой и такую, что $A/C = Z(p^\infty)$, то группа A также обладает хорошей системой.

§ 82. Тотально проективные p-группы

Важнейший тип p-групп был выявлен Нунке [5] при гомологических рассмотрениях. Несколькими годами позже Хилл заметил, что эти p-группы различаются с помощью своих инвариантов Ульма — Капланского и составляют наиболее широкий класс групп с этим свойством.

Пусть σ — порядковое число. Тогда p-группа A называется *p^σ-проективной*, если

$$p^\sigma \operatorname{Ext}(A, C) = 0 \text{ для любой группы } C.$$

Редуцированная p-группа A называется *тотально проективной*, если

$$p^\sigma \operatorname{Ext}(A/p^\sigma A, C) = 0 \quad \text{для любого порядкового числа } \sigma \text{ и любой группы } C.$$

Другими словами, группа A тотально проективна тогда и только тогда, когда $A/p^\sigma A$ является p^σ-проективной группой для любого порядкового числа σ.

Для удобства использования выпишем здесь некоторые замечания, которые непосредственно следуют из определений.

A) Класс p^σ-проективных [тотально проективных] p-групп замкнут относительно взятия любых прямых сумм и прямых слагаемых.

Б) Тотально проективная p-группа, длина которой не больше σ, является p^σ-проективной.

В) p-группа A является p^n-проективной, где n — неотрицательное целое число, тогда и только тогда, когда $p^nA = 0$ [ср. п. Г) из § 52].

Г) Прямые суммы циклических p-групп тотально проективны и p^ω-проективны [ср. с теоремой 53.3].

Д) Если группа A тотально проективна, то группа $A/p^\rho A$ также тотально проективна для любого порядкового числа ρ.

Наша основная цель — изучить тотально проективные p-группы. Чтобы ее достичь, нужно иметь больше сведений о p^σ-проективных

и тотально проективных p-группах. Многое мы сможем извлечь из следующих двух лемм.

Лемма 82.1 (Нунке [5], Ирвин, Уокер К. и Уокер Э. [1]). *Если S — такой подцоколь p-группы A, что A/S есть p^σ-проективная группа, то группа A является $p^{\sigma+1}$-проективной.*

В силу п. В) это верно для конечных порядковых чисел σ, поэтому предположим, что $\sigma \geqslant \omega$. По теореме 51.3 для любой группы C получаем точную последовательность

$$\operatorname{Hom}(S, C) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ext}(A/S, C) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ext}(A, C) \to \operatorname{Ext}(S, C) \to 0.$$

Здесь $p \operatorname{Ext}(S, C) = 0$ влечет за собой $p \operatorname{Ext}(A, C) \subseteq \operatorname{Im}\psi$. Нам нужно только проверить, что $p^{\sigma+1} \operatorname{Im}\psi = 0$, так как тогда $p^{\sigma+1} \operatorname{Ext}(A, C) = 0$ [заметим, что $1 + \sigma = \sigma$, поскольку $\sigma \geqslant \omega$].

Более общо, мы покажем, что если T — подцоколь p-группы E, для которой $p^\sigma E = 0$, то $p^{\sigma+1}(E/T) = 0$. [Мы можем применить это к случаю, когда $T = \operatorname{Im}\varphi$ и $E = \operatorname{Ext}(A/S, C)$.] Очевидно, что $p^\sigma(E/T) \subseteq E[p]/T$, откуда $p^{\sigma+1}(E/T) = 0$, а это и требовалось. ∎

С помощью таких же рассуждений можно установить следующий факт, касающийся тотальной проективности.

Лемма 82.2 (Нунке [5]). *Если A — такая p-группа, что $p^{\sigma+1}A = 0$ и $A/p^\sigma A$ тотально проективна, то A тотально проективна.* ∎

Теперь можно сделать следующее замечание.

E) Для тотальной проективности p-группы A достаточно, чтобы для всех предельных порядковых чисел σ и всех групп C выполнялось равенство $p^\sigma \operatorname{Ext}(A/p^\sigma A, C) = 0$. Действительно, из леммы 82.2 можно вывести, что условие $p^\sigma \operatorname{Ext}(A/p^\sigma A, C) = 0$ для всех групп C влечет за собой условие $p^{\sigma+1} \operatorname{Ext}(A/p^{\sigma+1}A, C) = 0$ для всех C.

Теперь можно точно установить, что представляют собой тотально проективные p-группы.

Теорема 82.3 (Хилл [24]). *p-группа тотально проективна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из эквивалентных между собой условий теоремы* 81.9.

Наша первая задача — показать, что прямое слагаемое прямой суммы обобщенных групп Прюфера тотально проективно. В силу п. A) достаточно установить тотальную проективность обобщенной группы Прюфера H_σ. Проведем индукцию по σ. Переход от σ к $\sigma + 1$ тривиален в силу леммы 82.2. Для предельных порядковых чисел σ, когда H_σ — прямая сумма всех H_ρ, где $\rho < \sigma$, утверждение также тривиально в силу п. A).

Обратно, пусть группа A тотально проективна. Мы хотим проверить, что она обладает одним из эквивалентных свойств, перечисленных в теореме 81.9. Снова используем индукцию, на этот раз по дли-

не σ группы A. Если σ — натуральное число n, то $p^n A = 0$, A — ограниченная группа и, таким образом, прямая сумма циклических p-групп, а значит, A принадлежит классу групп, о котором говорится в теореме 81.9.

Пусть утверждение уже доказано для тотально проективных p-групп длины не больше σ, и пусть A — тотально проективная p-группа длины $\sigma + 1$. По предположению индукции группа $A/p^\sigma A$ имеет хороший композиционный ряд, и этим же свойством обладает элементарная p-группа $p^\sigma A$. Следовательно, группа A удовлетворяет условию β), а значит, и всем условиям теоремы 81.9.

Наконец, предположим, что σ — предельное порядковое число и что утверждение верно для всех порядковых чисел, меньших σ. Пусть A — тотально проективная p-группа длины σ. Нам нужно только показать, что сбалансированно точная последовательность E: $0 \to B \to G \to A \to 0$ обязательно расщепляется. Как было отмечено в § 80, для любого $\rho < \sigma$ последовательность $0 \to B/p^\rho B \to G/p^\rho G \to A/p^\rho A \to 0$ точна и диаграмма (3) коммутативна. Исходя из ее верхней и нижней строк и естественных отображений φ и ψ, получаем диаграмму

$$\begin{array}{lccccccc}
E\colon & 0 \to & B & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & A & \to 0 \\
& & \varphi\downarrow & & \downarrow\lambda & & \| & \\
E_\rho\psi\colon & 0 \to & B/p^\rho B & \xrightarrow{\gamma} & H & \xrightarrow{\delta} & A & \to 0 \\
& & \| & & \downarrow\mu & & \downarrow\psi & \\
E_\rho\colon & 0 \to & B/p^\rho B & \xrightarrow{\varepsilon} & G/p^\rho G & \xrightarrow{\xi} & A/p^\rho A & \to 0
\end{array}$$

где средняя строка определяется как $E_\rho\psi$, откуда следует, что два нижних квадрата коммутативны. Так как H получается с помощью коуниверсального квадрата, а композиция естественного отображения ν: $G \to G/p^\rho G$ и отображения ξ совпадает с отображением $\psi\beta$, то существует однозначно определенное отображение λ: $G \to H$, для которого $\nu = \mu\lambda$ и $\delta\lambda = \beta$. Для доказательства коммутативности диаграммы остается только проверить, что $\gamma\varphi = \lambda\alpha$. Но равенства $\mu\gamma\varphi = \varepsilon\varphi = \nu\alpha = \mu\lambda\alpha$ и $\delta\gamma\varphi = 0 = \beta\alpha = \delta\lambda\alpha$ показывают, что $\gamma\varphi$ и $\lambda\alpha$ — это отображения группы B в H, такие, что в композиции с отображениями μ и δ соответственно они дают одно и то же отображение. Так как H получалось с помощью коуниверсального квадрата, то $\gamma\varphi = \lambda\alpha$, что и требовалось.

Из замечания, сделанного в § 80, следует, что $B/p^\rho B$ — сбалансированная подгруппа группы $G/p^\rho G$. Поэтому в силу предположения индукции последовательность E_ρ должна расщепляться. Следовательно, средняя строка тоже расщепляется, и в силу точности последовательности

$$\mathrm{Ext}(A, p^\rho B) \xrightarrow{\varkappa_*} \mathrm{Ext}(A, B) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Ext}(A, B/p^\rho B)$$

мы получаем, что $E \in \operatorname{Im} \varkappa_*$, где $\varkappa$: $p^\rho B \to B$ — вложение. Воспользовавшись очевидным аналогом предложения 56.1, приходим к включению $\operatorname{Im} \varkappa_* \subseteq p^\rho \operatorname{Ext}(A, B)$, поэтому $E \in \bigcap_{\rho<\sigma} p^\rho \operatorname{Ext}(A, B) = p^\sigma \operatorname{Ext}(A, B)$. Последняя группа нулевая, поэтому последовательность E расщепляется. ∎

Используя теорему 82.3, мы можем получить важную информацию о том, как тотально проективные p-группы связаны с прямыми суммами счетных p-групп.

Теорема 82.4 (Нунке [7]). *Редуцированная p-группа является прямой суммой счетных p-групп тогда и только тогда, когда она — тотально проективная p-группа длины не больше* ω_1.

Из леммы 81.1, теоремы 81.9 и теоремы 82.3 ясно, что прямая сумма счетных p-групп тотально проективна; ее длина не должна превышать ω_1. Обратно, теоремы 82.3 и 81.9 показывают, что тотально проективная p-группа A длины не больше ω_1 выделяется прямым слагаемым в некоторой прямой сумме обобщенных групп Прюфера длины меньше ω_1. Эти обобщенные группы Прюфера счетны, поэтому в силу предложения 9.10 группа A — прямая сумма счетных p-групп. ∎

В свете теоремы 82.4 мы действительно можем рассматривать тотально проективные p-группы как обобщение прямых сумм счетных p-групп. В то время как длины прямых сумм счетных p-групп ограничены порядковым числом ω_1, длины тотально проективных p-групп могут быть сколь угодно большими порядковыми числами. Взаимосвязь между этими двумя классами групп станет еще более ясной в следующем параграфе, где будет доказана структурная теорема для тотально проективных p-групп.

Класс тотально проективных p-групп может быть охарактеризован следующим замечательным образом. [Здесь всегда подразумевается, что любой класс групп содержит вместе с группой A также все группы, ей изоморфные.]

Теорема 82.5 (Паркер и Уокер [1]). *Класс тотально проективных p-групп является наименьшим классом групп* $\mathscr{C}$ *со следующими свойствами:*

1) $\mathscr{C}$ *содержит циклическую группу порядка* p;

2) $\mathscr{C}$ *замкнут относительно взятия прямых сумм и прямых слагаемых;*

3) *для произвольной группы* A *и порядкового числа* σ *включение* $A \in \mathscr{C}$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $p^\sigma A \in \mathscr{C}$ *и* $A/p^\sigma A \in \mathscr{C}$.

С помощью совсем простой индукции можно получить, что все группы Прюфера H_σ принадлежат классу $\mathscr{C}$, и из условия 2) следует, что элементами класса $\mathscr{C}$ являются все тотально проективные p-группы. Так как класс тотально проективных p-групп обладает перечисленными свойствами [см. п. д), п. ж) из § 79 и п. А) из § 81], утверждение доказано. ∎

Упражнения

1 (Ирвин, Уокер К. и Уокер Э. [1]). Если A является p^σ-проективной группой, то $\operatorname{Ext}(A, C) \cong \operatorname{Ext}(A, C/p^\sigma C)$ для любой группы C. [*Указание*: аналогично предложению 56.1.]

2 (Нунке [5]). (а) p^σ-проективная группа A имеет длину не больше σ. [*Указание*: чтобы показать, что не может быть $p^\sigma A \neq 0$, рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Hom}(A/p^\sigma A, C/p^\sigma C) & \to & \operatorname{Hom}(A, C/p^\sigma C) & \xrightarrow{\alpha} & \operatorname{Hom}(p^\sigma A, C/p^\sigma C) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow \\ \operatorname{Ext}(A/p^\sigma A, p^\sigma C) & \to & \operatorname{Ext}(A, p^\sigma C) & \xrightarrow{\beta} & \operatorname{Ext}(p^\sigma A, p^\sigma C) \to 0 \\ & & \downarrow & & \\ & & p^\sigma \operatorname{Ext}(A, C) = 0 & & \end{array}$$

с точными строками и столбцами; из того, что γ — отображение на и $\alpha = 0$, получить, что $\beta = 0$; но C можно выбрать так, чтобы $\operatorname{Ext}(p^\sigma A, p^\sigma C) \neq 0$.]

(б) Тотально проективная p-группа p^ρ-проективна тогда и только тогда, когда ее длина не превосходит σ.

(в) Группа H_σ является p^ρ-проективной в том и только в том случае, когда $\sigma \leqslant \rho$.

3 (Нунке [7]). (а) p-группа A тотально проективна тогда и только тогда, когда $p^\sigma A$ и $A/p^\sigma A$ — тотально проективные группы (σ — произвольное фиксированное порядковое число).

(б) Пусть σ — счетное порядковое число. Группа A является прямой суммой счетных p-групп в точности тогда, когда $p^\sigma A$ и $A/p^\sigma A$ — прямые суммы счетных p-групп.

4. Если группа A тотально проективна и $p^n A \subseteq C \subseteq A$ при некотором n, то C — тотально проективная группа. [*Указание*: использовать равенство $p^\omega C = p^\omega A$ и упр. 3 (а).]

5. Класс тотально проективных p-групп останется прежним, если в его определении в качестве C брать только p-группы. [*Указание*: проверить доказательства.]

6. Если $0 \to B \to G \to A \to 0$ — сбалансированно точная последовательность и $\mathbf{u} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_m, \ldots)$ — произвольная возрастающая последовательность порядковых чисел и символов ∞, то $0 \to B(\mathbf{u}) \to G(\mathbf{u}) \to A(\mathbf{u}) \to 0$ — снова сбалансированно точная последовательность. [*Указание*: для $a \in A(\mathbf{u})$ выбрать такой элемент x в тотально проективной p-группе T, что $H(x) = H(a)$, и продолжить $x \mapsto a$ до отображения $T \to A$, проходящего через $G \to A$.]

7. Для произвольной редуцированной p-группы A существуют тотально проективная p-группа G и эпиморфизм $\varphi\colon G \to A$ с ядром $\operatorname{Ker}\varphi$, сбалансированным в G.

8 (Нунке [5]). Показать, что если A — некоторая p^σ-проективная p-группа, то тем же свойством обладает и группа $\operatorname{Tor}(A, C)$ для любой

группы C. [*Указание*: если использовать изоморфизм

$$\mathrm{Ext}(A, \mathrm{Ext}(C, G)) \cong \mathrm{Ext}(\mathrm{Tor}(A, C), G),$$

доказательство становится тривиальным.]

9 (Нунке [5], Ирвин, Уокер К. и Уокер Э. [1]). Точная последовательность E: $0 \to G \to H \to J \to 0$ называется *p^σ-сервантно точной* [а G называется *p^σ-сервантной* подгруппой группы H], если E представляет элемент из $p^\sigma \mathrm{Ext}(J, G)$. Проверить справедливость следующих утверждений [мы предполагаем, что $C \subseteq B \subseteq A$]:

1) если подгруппа C является p^σ-сервантной в A, то она p^σ-сервантна в B;

2) если C есть p^σ-сервантная подгруппа группы B, а B есть p^σ-сервантная подгруппа группы A, то C является p^σ-сервантной подгруппой в A;

3) если B есть p^σ-сервантная подгруппа группы A, то B/C есть p^σ-сервантная подгруппа группы A/C;

4) если C есть p^σ-сервантная подгруппа группы A, а B/C есть p^σ-сервантная подгруппа группы A/C, то B является p^σ-сервантной подгруппой группы A.

[*Предупреждение*: p-сервантность в смысле § 26 — это p^ω-сервантность в новом смысле.]

10 (Гриффит [10]). Если $0 \to B \to A \xrightarrow{\alpha} C \to 0$ является p^σ-сервантно точной последовательностью, то

$$\alpha(p^\rho A[p]) = p^\rho C[p] \quad \text{для любого } \rho < \sigma.$$

[*Указание*: если $c \in p^\rho C[p]$, взять гомоморфизм φ: $H_{\rho+1} \to C$, для которого $\varphi(p^\rho H_{\rho+1}) = \langle c \rangle$; так как $\rho + 1 \leqslant \sigma$, то $H_{\rho+1}$ есть p^σ-проективная группа и для некоторого ψ: $H_{\rho+1} \to A$ выполнено $\alpha\psi = \varphi$.

11 (Ирвин, Уокер К. и Уокер Э. [1]). Если C есть p^σ-сервантная подгруппа группы A, то $p^\rho C = C \cap p^\rho A$ для каждого $\rho \leqslant \sigma$.[*Указание*: используя упр. 10, рассуждать как в предложении 80.2, или дать непосредственное доказательство: провести индукцию по σ; если C есть $p^{\sigma+1}$-сервантная подгруппа группы A, то существует коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C & \to & A & \to & G & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow p & & \\ 0 & \to & C & \xrightarrow{\alpha} & H & \xrightarrow{\beta} & G & \to & 0 \end{array}$$

где C есть p^σ-сервантная подгруппа группы H, а последнее вертикальное отображение представляет собой умножение на p; если $c \in C \cap p^{\sigma+1}A$, то $pa = c$ для некоторого $a \in p^\sigma A$; так как $A \subseteq H \oplus C$, то $a = (h, g)$, и легко видеть, что $ph = c$, $pg = 0$, $\beta h = 0$, $h \in C$; так как обязательно $h \in p^\sigma H$, то $h \in p^\sigma C$ и $c \in p^{\sigma+1}C$.]

12* (Нунке [5]). Для любой p-группы A и порядкового числа $\sigma \geqslant \omega$ ядро $\mathrm{Ker}\,\partial$ является p^σ-сервантной подгруппой группы

$\operatorname{Tor}(H_\sigma, A)$; здесь использованы обозначения упр. 9 из § 81. [*Указание*: получить из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} p^\sigma \operatorname{Ext}(A, C) \to \operatorname{Hom}(Z, & \operatorname{Ext}(A, C)) & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{Ext}(H_\sigma, & \operatorname{Ext}(A, C)) \\ & \| \wr & & & \| \wr \\ & \operatorname{Ext}(A, C) & \xrightarrow{\partial^*} & \operatorname{Ext}(\operatorname{Tor}(H_\sigma, A), C), & \end{array}$$

что $\operatorname{Ker} \partial^* = p^\sigma \operatorname{Ext}(A, C)$ при любом C; взяв $C = \operatorname{Ker} \partial$, получаем, что $\operatorname{Ker} \partial$ должна быть p^σ-сервантной подгруппой в $\operatorname{Tor}(H_\sigma, A)$.]

13 (Нунке [5]). (а) Существует достаточно много p^σ-проективных объектов: для любой p-группы A и порядкового числа σ существует p^σ-сервантно точная последовательность $0 \to K \to T \to A \to 0$, где T есть p^σ-проективная группа. [*Указание*: использовать отображение ∂: $\operatorname{Tor}(H_\sigma, A) \to A$, упр. 8 и упр. 12.]

(б) Если группа A является p^σ-проективной, то она служит прямым слагаемым для $\operatorname{Tor}(H_\sigma, A)$.

14 (Нунке [5]). Пусть Γ — наименьший класс p-групп, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $0 \in \Gamma$ и класс Γ замкнут относительно взятия подгрупп;

2) если B — элементарная p-подгруппа группы A и $A/B \in \Gamma$, то $A \in \Gamma$;

3) класс Γ замкнут относительно взятия произвольных прямых сумм.

Показать, что p-группа A принадлежит классу Γ тогда и только тогда, когда она является подгруппой p^σ-проективной группы для некоторого порядкового числа σ. [*Указание*: для доказательства достаточности использовать индукцию, учитывая упр. 13.]

§ 83. Просто представленные p-группы

В этом параграфе мы дадим другую характеризацию тотально проективных p-групп, основанную на очень специального вида представлении группы. Это одна из характеризаций, наиболее тесно связанных со структурной теоремой; она позволит получить относительно простой метод доказательства основного результата о тотально проективных p-группах.

Мы скажем, что p-группа A *просто представлена* [является *T-группой* в терминологии Кроули и Хэйлса [1]], если она может быть порождена множеством элементов $X = \{x_i\}_{i \in I}$, связанных лишь определяющими соотношениями вида

$$p^m x_i = 0 \quad \text{или} \quad p^n x_i = x_j \quad (i \neq j),$$

где m и n — натуральные числа.

Очевидно, соотношение вида $p^m x_i = 0$ может быть заменено множеством соотношений $px_i = y_1$, $py_1 = y_2$, ..., $py_{m-1} = 0$, если добавить к множеству X новые образующие $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Мы можем

и будем предполагать, что для любого образующего x_i группы A, имеющего порядок p^m, существуют образующие $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, связанные указанными выше соотношениями. То же замечание применимо к соотношениям $p^n x_i = x_j$. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что все соотношения имеют вид $px_i = 0$ или $px_i = x_j$ $(i \neq j)$.

Очевидно, может случиться так, что различные элементы множества X станут равными в группе A или образующий окажется в A равным нулю. Мы можем исключить эти случаи, опустив обращающиеся в нуль образующие и все, кроме одного, в каждой совокупности склеившихся элементов и в то же время соответствующим образом изменив определяющие соотношения. Так как нет полной уверенности, что при этом процессе ничто не может вступить в противоречие с определяющими соотношениями, нужно действовать очень осторожно. Точнее, мы собираемся проверить, что всякая просто представленная p-группа A может быть также представлена множеством образующих X и множеством соотношений Σ так, что будут выполняться условия

1) для любого $x \in X$ в группе A справедливо $x \neq 0$;
2) если x, y — различные элементы множества X, то $x \neq y$ в A;
3) все соотношения имеют вид $px = 0$ или $px = y$, где $x, y \in X$.

Такое представление будет называться *точным*.

Пусть A является просто представленной p-группой, т. е. A представима в виде $\langle X'; \Sigma' \rangle$, где X' — множество образующих, а Σ' — множество определяющих соотношений вида $px' = 0$ или $px' = y'$. Пусть X — такое подмножество множества X', что для него выполнены условия 1) и 2) и всякий элемент $x' \in X'$ в группе A равен некоторому элементу $x \in X$. Соотношение $px = 0$ [или $px = y$] мы включим в Σ в том и только в том случае, когда $x \in X$ и $px = 0$ в A [$x, y \in X$ и $px = y$ в A]. Тогда, очевидно, будет существовать эпиморфное отображение φ группы $B = \langle X; \Sigma \rangle$ на группу A. Существует другое отображение, а именно ψ: $A \to B$, при котором всякий элемент $x' \in X'$ переходит в такой элемент $x \in X$, что $x' = x$ в группе A. Так как $\psi\varphi = 1_B$ и φ — эпиморфизм, то φ является изоморфизмом, что доказывает существование точного представления.

В дальнейшем все представления будут предполагаться точными, если не оговорено противное.

Точное представление просто представленной группы $A = \langle X; \Sigma \rangle$ порождает естественный частичный порядок на множестве X: для $x, y \in X$ полагаем

$$y < x, \quad \text{если} \quad p^n x = y \quad \text{при некотором} \quad n > 0,$$

т. е. если соотношения $px = x_1$, $px_1 = x_2, \ldots, px_{n-1} = y$ при соответствующих $x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$ входят в Σ. Ясно, что в множестве X выполнено условие минимальности.

Приведем простейшие примеры просто представленных p-групп [с точными представлениями]:

Пример 1. Циклические группы порядка p^n просто представлены:

$$Z(p^n) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n;\ px_1 = 0,\ px_2 = x_1, \ldots, px_n = x_{n-1}\rangle.$$

Пример 2. Квазициклические группы просто представлены:

$$Z(p^\infty) = \langle x_1, \ldots, x_n, \ldots;\ px_1 = 0,\ px_2 = x_1, \ldots, px_n = x_{n-1}, \ldots\rangle.$$

Пример 3. Группа Прюфера $H_{\omega+1}$ просто представлена:

$$H_{\omega+1} = \langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_{21}, \ldots, a_n,\ a_{n1}, \ldots$$
$$\ldots a_{n,\,n-1}, \ldots;\quad pa_0 = 0,\ pa_1 = a_0,$$
$$pa_2 = a_{21},\quad pa_{21} = a_0, \ldots,\quad pa_n = a_{n1}, \ldots, pa_{n,\,n-1} = a_0, \ldots\rangle.$$

Изучение просто представленных p-групп мы начнем с перечисления элементарных результатов [см. Кроули и Хэйлс [1]].

а) *Прямая сумма просто представленных групп также просто представлена.*

Это очевидно, так как теоретико-множественное объединение систем образующих и теоретико-множественное объединение определяющих соотношений задает представление прямой суммы.

Из определения обобщенных групп Прюфера H_σ ясно, что если группа H_σ просто представлена, то просто представлена и группа $H_{\sigma+1}$. Очевидная трансфинитная индукция, использующая п. а) на предельных местах, приводит к следующему результату:

Предложение 83.1. *Обобщенные группы Прюфера просто представлены.* ∎

б) *Всякий ненулевой элемент просто представленной p-группы A может быть однозначно записан в виде*

$$a = s_1x_1 + \ldots + s_kx_k \quad (k \geqslant 1), \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — различные элементы множества X и $0 < s_i < p$ при $i = 1, \ldots, k$.

В силу свойств 1)—3) существование такой записи очевидно. Предположим, что $a = s_1x_1 + \ldots + s_kx_k = t_1x_1 + \ldots + t_kx_k$ для отличных друг от друга элементов $x_1, \ldots, x_k \in X$ и некоторых целых чисел $s_i,\ t_i = 0, 1, \ldots, p-1$. Пусть x_1 — максимальный среди элементов $x_1, \ldots, x_k$ при естественном частичном порядке на множестве X. Существует гомоморфное отображение φ подгруппы $\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$, а значит, и группы A, в группу $Z(p^\infty)$, переводящее x_1 в элемент порядка p, а $x_2, \ldots, x_k$ в 0. Теперь $\varphi a = s_1(\varphi x_1) = t_1(\varphi x_1)$ дает $s_1 = t_1$, и простая индукция по k завершает доказательство.

в) *Если (1) — однозначно определенная запись ненулевого элемента a в просто представленной группе A, то $a \in p^\sigma A$ тогда и только тогда, когда $x_i \in p^\sigma A$ при $i = 1, \ldots, k$.*

Необходимость доказывается индукцией по σ. При $\sigma = 0$ утверждение тривиально. Предположим, что $a = pb$, где $b = r_1y_1 + \ldots + r_ly_l \in p^\sigma A$ при некотором σ. Если элементы $y_1, \ldots, y_l \in X$

различны и $0 < r_j < p$ при $j = 1, \ldots, l$, то по предположению индукции $y_j \in p^\sigma A$ при $j = 1, \ldots, l$. Следовательно, $a = r_1 (py_1) + \ldots + r_l (py_l)$, что можно записать в виде $t_1 z_1 + \ldots + t_m z_m$, где z — различные элементы из X, t — положительные целые числа, меньшие p, и каждый элемент z имеет вид $p^n y_j$ ($n \geqslant 1$). Отсюда $z_1, \ldots, z_m \in p^{\sigma+1} A$. Из п. б) следует, что эти элементы z равны элементам x, т. е. $x_1, \ldots, x_k \in p^{\sigma+1} A$.

Для $y \in X$ положим

$$X_y = \{x \in X \mid y \leqslant x\}.$$

г) *Если A — просто представленная p-группа и M — множество минимальных элементов из X, то*

$$A = \bigoplus_{y \in M} \langle X_y \rangle. \qquad (2)$$

При различных $y, z \in M$ множества X_y и X_z не пересекаются, а в силу условия минимальности, выполненного в X, каждый элемент $x \in X$ принадлежит некоторому множеству X_y. Так как каждое из определяющих соотношений содержит элементы только из одного множества X_y, ясно, что A — прямая сумма групп $\langle X_y \rangle$.

д) *Пусть A — просто представленная редуцированная p-группа, длина которой — предельное порядковое число. Тогда A — прямая сумма просто представленных p-групп меньших длин.*

В представлении (2) группы A последняя ненулевая ульмовская подгруппа группы $\langle X_y \rangle$ порождается в силу п. в) элементом y. Поэтому длины групп $\langle X_y \rangle$ — непредельные порядковые числа; следовательно, они меньше длины группы A.

е) *Если A — просто представленная p-группа и Y — подмножество множества X, то $N = \langle Y \rangle$ — хорошая подгруппа группы A.*

Пусть $a \in A \setminus N$, и пусть $a = s_1 x_1 + \ldots + s_k x_k + t_1 y_1 + \ldots + t_l y_l$, где x_i и y_j — различные элементы из $X \setminus Y$ и Y соответственно, а s_i, t_j — натуральные числа, меньшие p. Мы утверждаем, что $b = s_1 x_1 + \ldots + s_k x_k \in a + N$ — элемент, собственный относительно N. В самом деле, для любого $c = r_1 y_1' + \ldots + r_m y_m' \in N$ [записанного в виде (1)] высота элемента $a + c$ в силу п. в) равна $\min_{i,j} \{h^*(x_i), h^*(y_j')\} \leqslant \min_i h^*(x_i) = h^*(b)$.

Теперь сразу получается следующее утверждение:

Лемма 83.2 (Кроули и Хэйлс [1], Хилл [17]). *Всякая просто представленная p-группа имеет хорошую систему.* ∎

ж) *Если A — бесконечная редуцированная просто представленная p-группа, то*

$$|A| = \sum_\sigma f_\sigma(A).$$

Проведем индукцию по длине τ группы A. Случай предельного порядкового числа τ не представляет затруднений в силу п. г). Пусть

τ — изолированное порядковое число. Случай, когда τ конечно, тривиален, так как тогда A — прямая сумма циклических групп. Если $\tau = \rho + n$, где ρ — предельное порядковое число, большее нуля, а n — натуральное число, то группа $A/p^\rho A$ бесконечна и, очевидно, $|A/p^\rho A| \geqslant |p^\rho A| \geqslant \sum_{\rho \leq \sigma < \tau} f_\sigma(A)$. Так как $f_\sigma(A/p^\rho A) = f_\sigma(A)$ при $\sigma < \rho$, получаем требуемое равенство.

Теперь мы уже в состоянии доказать основную структурную теорему. Она была получена в приведенном ниже виде Кроули и Хэйлсом [1] и в эквивалентной форме [а именно: для p-групп, обладающих хорошими системами] Хиллом [24].

Теорема 83.3 (Кроули и Хэйлс [1], Хилл [24]). *Две просто представленные редуцированные p-группы изоморфны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие инварианты Ульма — Капланского.*

Некоторые преимущества дает доказательство этого результата в следующей усиленной форме, полученной Хиллом [24]. Идея использовать в доказательстве лемму Цорна, а не трансфинитную индукцию, принадлежит Э. Уокеру.

Теорема 83.4. *Пусть A и C — некоторые p-группы, G и H — хорошие подгруппы групп A и C соответственно и группы $A/G = \langle X, \Sigma_X \rangle$, $C/H = \langle Y, \Sigma_y \rangle$ просто представлены. Предположим, что*

a′) *существует сохраняющее высоту изоморфное отображение φ группы G на H;*

б′) *относительные инварианты Ульма — Капланского совпадают:*

$$f_\sigma(A, G) = f_\sigma(C, H) \quad \text{для каждого } \sigma.$$

Тогда φ можно продолжить до изоморфизма $\varphi^*\colon A \to C$.

Для каждого σ выберем произвольный, но фиксированный изоморфизм

$$\alpha_\sigma\colon \quad p^\sigma A[p]/G(\sigma) \to p^\sigma C[p]/H(\sigma)$$

и рассмотрим пары $(G_\lambda, \varphi_\lambda)$, удовлетворяющие следующим условиям:

α) $G_\lambda = \langle G, X_\lambda \rangle$ для некоторого подмножества X_λ множества X;

β) φ_λ — сохраняющий высоту изоморфизм группы G_λ на некоторую подгруппу $H_\lambda = \langle X, Y_\lambda \rangle$, где Y_λ — подмножество множества Y;

γ) ограничение φ_λ на G совпадает с φ;

δ) α_σ индуцирует изоморфизм группы $G_\lambda(\sigma)/G(\sigma)$ на группу $H_\lambda(\sigma)/H(\sigma)$ при любом σ.

Если множество этих пар очевидным образом частично упорядочено, то по лемме Цорна получаем максимальную пару (G^*, φ^*), где φ^* — сохраняющий высоту изоморфизм группы $G^* = \langle G, X^* \rangle$, ска-

жем, на группу $H^* = \langle H, Y^* \rangle$. Заметим, что условие δ) дает $f_\sigma(A, G^*) = f_\sigma(C, H^*)$. Если некоторый элемент $x \in X$ в группе G^* отсутствует, то можно предположить, что $px \in G^*$, и тривиальное применение леммы 77.1 дает продолжение изоморфизма φ^* до сохраняющего высоту изоморфизма φ_0^* между группой $G_0^* = \langle G^*, x \rangle$ и подгруппой H_0^* группы C, содержащей H^*, причем условие δ) сохраняется. В множестве Y имеется конечное число образующих $y_1, \ldots, y_m$, для которых $H_0^* \subseteq H_1^* = \langle H^*, y_1, \ldots, y_m \rangle$. Теперь изменим порядок в нашем процессе: H_1^* — конечное расширение подгруппы H^*, так что это хорошая подгруппа в C, поэтому лемма 77.1 может быть последовательно применена к подгруппе H_1^*, изоморфизму φ_0^{*-1} и образующим $y_1, \ldots, y_m$; в результате получатся конечное расширение G_1^* группы G_0^* и сохраняющий высоту изоморфизм $\varphi_1^*: G_1^* \to H_1^*$, для которых $\varphi_1^* \mid G_0^* = \varphi_0^*$ и $\alpha_\sigma(G_1^*(\sigma)/G(\sigma)) = H_1^*(\sigma)/H(\sigma)$. Вернемся к группе A и выберем такие элементы $x_1, \ldots, x_n \in X$, что $G_1^* \subseteq \langle G_0^*, x_1, \ldots, x_n \rangle = G_2^*$. Повторяя этот процесс попеременно в C и в A, мы получим возрастающую цепочку подгрупп $G^* \subset G_0^* \subseteq G_1^* \subseteq \ldots$ группы A и сохраняющие высоту изоморфизмы φ_n^* между подгруппами G_n^* и подгруппами H_n^* группы C, для которых выполняются требуемые условия и $\varphi_n^* \mid G_{n-1}^* = \varphi_{n-1}^*$. Если положить $G^{**} = \bigcup_{n<\omega} G_n^*$ и $H^{**} = \bigcup_{n<\omega} H_n^*$, то пара (G^{**}, φ^{**}), где φ^{**} — отображение $G^{**} \to H^{**}$, индуцированное отображениями φ_n^*, также будет принадлежать рассматриваемому нами множеству пар. Следовательно, $G^* = A$ и в силу симметрии $H^* = C$. ∎

Мы еще не продвинулись достаточно далеко, чтобы можно было утверждать, что просто представленные редуцированные p-группы — это в точности тотально проективные p-группы. В силу предложения 83.1 и леммы 83.2 осталось сделать ровно один шаг: показать, что прямые слагаемые просто представленных p-групп также являются просто представленными группами. Вместо того чтобы доказать это непосредственно, мы вернемся к тотальной проективности и покажем с помощью трансфинитной индукции по длине σ группы A, что тотально проективная p-группа A просто представлена.

Если σ — предельное порядковое число, то A — прямая сумма тотально проективных p-групп длины меньше σ и в силу п. а) доказывать нечего. Поэтому предположим, что A — тотально проективная p-группа длины $\sigma + 1$. По предположению группа $A/p^\sigma A$ просто представлена. Пусть M — множество минимальных элементов в системе образующих X группы $A/p^\sigma A$, и пусть $M_\rho = \{x \in M \mid h^*(x) \geqslant \rho\}$ при $\rho < \sigma$. Тогда $|M_\rho| \geqslant r(p^\sigma A)$, причем $p^\sigma A$ — элементарная p-группа. Выберем в $p^\sigma A$ базис $\{u_i\}_{i \in I}$ и возьмем группу C с образующими $\{X, u_i\ (i \in I)\}$, связанными соотношениями $pu_i = 0$ при всех i и всеми соотношениями, существующими между элементами из X в группе $A/p^\sigma A$, кроме соотношений $px = 0$ $(x \in M)$, которые заменяются на $px = u_i$ при некотором i. Мы можем предполагать, что для всякого $i \in I$ и любого $\rho < \sigma$ имеет место соотношение $px = u_i$ при некотором $x \in M_\rho$. Тогда C — просто представленная группа и $p^\sigma C \cong$

$\cong p^\sigma A$, $C/p^\sigma C \cong A/p^\sigma A$. Используя теорему 83.4, получаем изоморфизм $C \cong A$. Этим доказана

Теорема 83.5 (Кроули и Хэйлс [1]). *Редуцированная p-группа просто представлена тогда и только тогда, когда она тотально проективна.* ∎

На этом месте имеет, быть может, смысл прервать изложение и кратко подытожить, какие различные характеризации тотально проективных p-групп были получены. Наши результаты показывают, что для редуцированной p-группы A эквивалентны следующие условия:

1. Группа A обладает хорошим композиционным рядом.
2. Группа A обладает хорошей системой.
3. Группа A просто представлена.
4. A — прямое слагаемое прямой суммы обобщенных групп Прюфера.
5. Группа A проективна относительно сбалансированно точных последовательностей p-групп.
6. Группа A тотально проективна.
7. Группа A принадлежит наименьшему классу групп, содержащему $Z(p)$, замкнутому относительно взятия прямых сумм и прямых слагаемых и содержащему группу G в точности тогда, когда он содержит $p^\sigma G$ и $G/p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ.

Получив достаточно много способов, позволяющих проникнуть в структуру тотально проективных p-групп, установим, какие последовательности кардинальных чисел могут быть инвариантами Ульма—Капланского для тотально проективных p-групп.

Теорема 83.6 (Кроули и Хэйлс [1], Хилл [24]). *Пусть g — функция, область определения которой — все порядковые числа $\sigma < \tau$ [τ — заданное порядковое число], а область значений — кардинальные числа. Тотально проективная p-группа A длины τ, для которой*

$$f_\sigma(A) = g(\sigma) \quad \text{при всех} \quad \sigma < \tau,$$

существует тогда и только тогда, когда g есть τ-допустимая функция.

Пусть сначала A — тотально проективная p-группа длины τ. Тогда, очевидно, для $f_\sigma(A)$ выполнено условие 1) определения τ-допустимой функции из § 78. Чтобы проверить выполнение условия 2), можно провести индукцию по длине τ. Так как случай, когда τ — конечное или предельное порядковое число, затруднений не вызывает, положим $\tau = \rho + n$, где ρ — предельное порядковое число, большее нуля, а n — натуральное число. Тогда группа $p^\sigma A/p^\rho A$ бесконечна для всех $\sigma < \rho$ и $|p^\sigma A/p^\rho A| \geqslant |p^\rho A| \geqslant \sum_{\rho \leqslant \sigma < \tau} f_\sigma(A)$. Отсюда и из п. ж) следует, что $f_\sigma(A)$ — действительно τ-допустимая функция.

Пусть g есть τ-допустимая функция, и пусть $\tau = \sigma + n$, где σ — предельное порядковое число, n — целое число. Если $\sigma = 0$, то длина g конечна, и последовательностью инвариантов Ульма—Капланского

группы $A \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{g(i)} Z(p^{i+1})$ является последовательность $g(0), \ldots$ $\ldots, g(n-1)$. Если $\sigma > 0$ и $n > 0$, то существование тотально проективной p-группы G длины σ, ρ-й инвариант Ульма — Капланского которой равен $g(\rho)$ при любом $\rho < \sigma$, доказывается по индукции. Если при любом $\pi < \sigma$ выполнено неравенство $\sum_{\pi<\rho<\sigma} g(\rho) \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} g(\sigma+i)$, то по образцу доказательства теоремы 83.5 можно построить тотально проективную p-группу A длины $\sigma+n$, для которой $A/p^{\sigma}A \cong G$ и $p^{\sigma}A \cong$ $\cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{g(\sigma+i)} Z(p^{i+1})$. Но это неравенство — следствие условия 2) из § 78.

Если, наконец, $\tau = \sigma$ — предельное порядковое число, то рассуждаем следующим образом: τ-допустимую функцию g в силу леммы 78.5 можно записать в виде $g = \sum g_i$, где g_i есть τ_i-допустимая функция длины $\tau_i < \tau$. Если теперь A_i — тотально проективная p-группа, для которой $g_i(\sigma)$ служит σ-м инвариантом Ульма — Капланского, то группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ соответствует заданной функции g. ∎

Для завершения теории тотально проективных p-групп докажем следующий результат, который можно интерпретировать как утверждение, что класс тотально проективных p-групп — это наиболее широкий класс групп, на который распространяется теорема Ульма.

Теорема 83.7. *Всякий класс редуцированных p-групп, содержащий все тотально проективные p-группы, замкнутый относительно взятия прямых сумм и такой, что в нем неизоморфные группы имеют различные инварианты Ульма — Капланского, совпадает с классом тотально проективных p-групп.*

Пусть A — группа из заданного класса и τ — ее длина. Положим $\mathfrak{m} = |A|\aleph_0$ и рассмотрим прямую сумму

$$H = \bigoplus_{\mathfrak{m}} \bigoplus_{\sigma \leqslant \tau} H_{\sigma}$$

обобщенных групп Прюфера. Ясно, что $f_{\sigma}(H) = \mathfrak{m}$ при всех $\sigma < \tau$. Следовательно, группы $A \oplus H$ и H имеют одинаковые инварианты Ульма — Капланского. По предположению группа $A \oplus H$ также лежит в заданном классе, и $A \oplus H \cong H$. Отсюда A — прямое слагаемое прямой суммы обобщенных групп Прюфера. ∎

Доказав теоремы 83.3, 83.6 и 83.7, мы достигли своей основной цели в теории тотально проективных p-групп. Однако нужно иметь в виду тот факт, что теория тотально проективных p-групп ни в коей мере не может считаться полностью разработанной. А если отбросить требование тотальной проективности, то о групповой структуре мы фактически вообще ничего не можем сказать.

Упражнения

1. Сепарабельная p-группа является просто представленной тогда и только тогда, когда она — прямая сумма циклических p-групп. [*Указание*: использовать структурную теорему.]

2. Если $A = \langle X; \Sigma \rangle$ — просто представленная p-группа и Y — подмножество множества X, то группа $A/\langle Y \rangle$ просто представленная.

3. Пусть σ — порядковое число. Тогда p-группа A является просто представленной в том и только в том случае, когда просто представлены группы $p^{\sigma}A$ и $A/p^{\sigma}A$.

4 (Кроули и Хэйлс [2]). Если A_i $(i \in I)$ — семейство таких просто представленных p-групп, что $p^{\sigma_i}A_i = \langle a_i \rangle$ — циклическая группа порядка p^n при любом $i \in I$, то группа $\bigoplus_{i \in I} A_i/G$, где G — подгруппа группы $\oplus A_i$, порожденная всеми элементами вида $a_i - a_j$ $(i, j \in I)$, снова просто представлена.

5 (Э. Уокер). Пусть A — редуцированная p-группа, а G — группа с образующими g_a, где $a \in A$, и определяющими соотношениями $g_0 = 0$ и $p^n g_a = g_b$ тогда и только тогда, когда $p^n a = b$ в группе A. В этом случае группа G просто представлена, а ядро эпиморфизма $G \twoheadrightarrow A$, индуцированного отображением $g_a \mapsto a$,— сбалансированная подгруппа группы G. [*Указание*: проверить, что выполнено условие 4) предложения 80.2.]

6 (Хилл [15]). Тотально проективные p-группы вполне транзитивны. [*Указание*: использовать следствие 81.4.]

7 (Фукс и Э. Уокер). Для всякой тотально проективной p-группы A и любой возрастающей последовательности $\mathbf{u} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_n, \ldots)$ порядковых чисел и символов ∞ группы $A(\mathbf{u})$ и $A/A(\mathbf{u})$ тотально проективны. [*Указание*: свести к группам Прюфера и провести индукцию по длине, используя тот факт, что $(A/p^{\sigma}A)(\mathbf{u}) = (A(\mathbf{u}) + p^{\sigma}A)/p^{\sigma}A$ для группы A длины $\sigma + 1$, упр. 3 из § 81.]

8 (а) (Нунке [7]). Пусть A — некоторая p-группа с конечным числом ульмовских факторов, причем каждый из них — прямая сумма циклических групп. Доказать, что A — прямая сумма счетных p-групп.

(б) (Хилл и Меджиббен [4]) Редуцированная p-группа конечного ульмовского типа, все ульмовские факторы которой, кроме, быть может, последнего, являются прямыми суммами циклических групп, однозначно определяется своими ульмовскими факторами.

9 (Хилл и Меджиббен [4]). Пусть A — некоторая p-группа и σ — такое счетное порядковое число, что $p^{\sigma}A = \bigoplus_{i \in I} C_i$ и $A/p^{\sigma}A$ — прямая сумма счетных p-групп. Показать, что $A = E \oplus \bigoplus_{i \in I} E_i$, где $p^{\sigma}E = 0$ и $p^{\sigma}E_i = C_i$, а $|E_i| \leqslant \max(|C_i|, \aleph_0)$ при каждом $i \in I$. [*Указание*: свести к случаю, когда $p^{\sigma}A$ — прямая сумма циклических групп; тогда A — прямая сумма счетных p-групп; использовать следствие 76.2 для построения требуемого разложения.]

10. Доказать теорему 83.6, рассматривая те же случаи, что и в доказательстве следствия 76.2.

11. Если A и C — тотально проективные p-группы, каждая из которых изоморфна изотипной подгруппе другой, то $A \cong C$. [*Указание*: использовать п. Г) из § 80 и теорему 83.3.]

12. Если A — тотально проективная p-группа и $A \oplus A \cong C \oplus C$, то $A \cong C$.

§ 84. Суммируемые p-группы

Завершим изучение p-групп рассмотрением интересного класса, который выявил Хонда [3]. Этот класс включает в себя прямые суммы счетных p-групп.

Пусть A — редуцированная p-группа, скажем, длины τ. Для $\sigma < \tau$ определим S_σ с помощью равенства

$$p^\sigma A[p] = p^{\sigma+1} A[p] \oplus S_\sigma. \tag{1}$$

Таким образом, ненулевые элементы из S_σ имеют высоту σ. Прямая сумма $\bigoplus_{\sigma<\tau} S_\sigma$, очевидно, обладает тем свойством, что если $a = a_{\sigma_1} + \ldots \ldots + a_{\sigma_k}$, где $0 \neq a_{\sigma_i} \in S_{\sigma_i}$ и σ_i различны, то $h^*(a) = \min_i \sigma_i$.

Прямая сумма $\bigoplus_{\sigma<\tau} S_\sigma$, вообще говоря, не совпадает с $A[p]$; простой пример — неограниченная периодически полная p-группа A, где $\bigoplus_{n<\omega} S_n$ служит носителем базисной подгруппы группы A. Так как даже прямая сумма циклических групп может содержать базисную подгруппу, отличную от всей группы, то легко получается, что $\bigoplus_{\sigma<\tau} S_\sigma$ может равняться $A[p]$ при некотором выборе подгрупп S_σ в (1) и не равняться $A[p]$ при другом выборе этих подгрупп. Ввиду этого назовем группу A *суммируемой* [см. Хилл и Меджиббен [5]], если при подходящем выборе подгрупп S_σ в (1) выполнено равенство

$$A[p] = \bigoplus_{\sigma<\tau} S_\sigma. \tag{2}$$

Из этого определения следует, что

А) Прямая сумма циклических p-групп является суммируемой.

Б) Прямая сумма суммируемых групп суммируема.

Подгруппа G группы A называется *высотно конечной*, если высоты ее элементов [все высоты берутся в группе A] принимают лишь конечное число различных значений.

Полезным критерием суммируемости является следующая

Теорема 84.1 (Хонда [3]). *Редуцированная p-группа A счетной длины τ суммируема тогда и только тогда, когда существует такая*

возрастающая цепочка

$$0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_n \subseteq \ldots$$

высотно конечных подгрупп группы $A[p]$, что

$$\bigcup_{n<\omega} G_n = A[p].$$

Если группа A суммируема и τ счетно, мы можем выписать все подгруппы $S_\sigma (\sigma < \tau)$ из (2) в виде последовательности $S_{\sigma_1}, S_{\sigma_2}, \ldots$ $\ldots, S_{\sigma_n}, \ldots$ типа ω. Очевидно, что $G_n = S_{\sigma_1} \oplus \ldots \oplus S_{\sigma_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — высотно конечные подгруппы, объединение которых совпадает с $A[p]$.

Обратно, пусть существует возрастающая цепочка высотно конечных подгрупп G_n группы A, объединение которой совпадает с $A[p]$. В силу того что $p^\sigma A \cap G_1$ — прямое слагаемое группы G_1, мы можем, начав с максимальной высоты σ_1 ненулевых элементов группы G_1, найти разложение $G_1 = K_{\sigma_1} \oplus \ldots \oplus K_{\sigma_k}$, где $\sigma_1 > \ldots > \sigma_k$ и всякий ненулевой элемент из K_{σ_j} имеет высоту σ_j. По индукции мы можем таким путем построить для каждого n разложение

$$G_n = \bigoplus_{\sigma<\tau} K_\sigma^{(n)},$$

где $K_\sigma^{(n)} = 0$ при почти всех σ, $K_\sigma^{(n)} \subseteq p^\sigma A$, $K_\sigma^{(n)} \cap p^{\sigma+1}A = 0$ и $K_\sigma^{(n-1)} \subseteq K_\sigma^{(n)}$. Полагая $S_\sigma = \bigcup_n K_\sigma^{(n)}$, получаем, как легко проверить, $A[p] = \bigoplus_{\sigma<\tau} S_\sigma$. ∎

Так как цоколь счетной редуцированной p-группы является объединением возрастающей цепочки конечных подцоколей, то из теоремы 84.1 и п. Б) непосредственно получается

Следствие 84.2. *Счетные редуцированные р-группы и их прямые суммы являются суммируемыми группами.* ∎

Используя это следствие, можно построить суммируемые группы любой длины, не превышающей ω_1. Удивительным и совсем не тривиальным является тот факт, что суммируемых p-групп длины больше ω_1 не существует.

Теорема 84.3 (Хонда [3]). *Для суммируемой р-группы A справедливо равенство $p^{\omega_1}A = 0$.*

Предположим, что группа A суммируема, но $p^{\omega_1}A \neq 0$. Тогда мы можем написать

$$A[p] = \bigoplus_{\sigma<\omega_1} S_\sigma \oplus p^{\omega_1}A[p],$$

где ненулевые элементы подгруппы S_σ имеют высоту σ. Пусть $0 \neq$ $\neq a \in A$ имеет высоту ω_1, и пусть элементы $b_1, \ldots, b_n, \ldots \in A$

таковы, что $pb_n = a$ при любом n и $\sigma_1 < \ldots < \sigma_n < \ldots$, где $\sigma_n = h(b_n)$. В дополнение к этому элементы b_n можно предполагать выбранными так, что в указанном выше разложении группы $A[p]$ элемент $b_n - b_{n-1}$ имеет ненулевые координаты только в слагаемых S_σ, где $\sigma < \sigma_n$. Так как все σ_n счетны, существуют такое счетное порядковое число σ_0, что $\sigma_0 > \sigma_n$ при всех n, и элемент $b_0 \in A$ высоты σ_0, для которого $pb_0 = a$. Очевидно, элемент $b = b_0 - b_1 \in A[p]$ имеет высоту σ_1. Выбрав, если нужно, другой элемент b_0, можно получить включение $b \in \bigoplus_{\sigma<\omega_1} S_\sigma$. В силу того что $b = (b_0 - b_n) + (b_n - b_1)$ и $h^*(b_0 - b_n) = \sigma_n$, и так как $b_n - b_1$ имеет в S_{σ_n} нулевую координату, ясно, что элемент b имеет ненулевую координату в S_{σ_n} при каждом n. Полученное противоречие показывает, что $p^{\omega_1}A = 0$ для любой суммируемой p-группы A. ∎

Подгруппы суммируемых групп не обязаны быть суммируемыми [см. упр. 7], но некоторые из них оказываются суммируемыми.

Предложение 84.4 (Хилл и Меджиббен [5]). *В суммируемых группах изотипные подгруппы счетной длины суммируемы.*

Пусть C — изотипная подгруппа счетной длины ρ суммируемой группы A. Тогда существует такая $p^\rho A$-высокая подгруппа E группы A, что $C \subseteq E$. Доказательство разобьем на два этапа.

Прежде всего покажем, что E — суммируемая группа. Запишем $A[p]$ в виде (2). Существует такая $p^\rho A$-высокая подгруппа E' группы A, что $E'[p] = \bigoplus_{\sigma<\rho} S_\sigma$. Так как по предложению 80.1 подгруппа E' изотипна в A, суммируемость этой подгруппы очевидна. Канонический гомоморфизм $A \to A/p^\rho A$ отображает $p^\rho A$-высокие подгруппы изоморфно и [по лемме 37.1] с сохранением высот на подгруппы группы $A/p^\rho A$. Отсюда легко следует, что при этом отображении цоколи $p^\rho A$-высоких подгрупп имеют один и тот же образ. Суммируемость подгруппы E теперь является простым следствием суммируемости подгруппы E'.

Теперь доказательство сводится к случаю, когда C — изотипная подгруппа суммируемой группы E счетной длины ρ. По теореме 84.1 цоколь $E[p]$ является объединением возрастающей цепочки высотно конечных подгрупп G_n. Цоколь $C[p]$ теперь является объединением возрастающей цепочки подгрупп $G_n \cap C$ $(n = 0, 1, \ldots)$, которые высотно конечны, так как C — изотипная подгруппа группы A. ∎

Пример суммируемой группы, не являющейся прямой суммой счетных p-групп, можно найти в работе Хилла [16],

Упражнения

1. Сепарабельная p-группа является суммируемой тогда и только тогда, когда она — прямая сумма циклических групп.

2. Подцоколь S редуцированной p-группы A называется *суммируемым*, если $S = \bigoplus_{\sigma<\tau} T_\sigma$, где все ненулевые элементы в T_σ имеют

высоту σ. Показать, что все счетные подцоколи группы A суммируемы.

3. Всякий подцоколь суммируемой p-группы счетной длины суммируем. [*Указание*: использовать доказательство предложения 84.4.]

4 (Хилл и Меджиббен [5]). Если A — редуцированная p-группа и $A[p] = S \oplus p^{\omega_1} A[p]$, то S не является суммируемым подцоколем, кроме случая, когда $p^{\omega_1}A = 0$. [*Указание*: использовать доказательство теоремы 84.3.]

5 (Хилл и Меджиббен [5]). Для суммируемой p-группы A выполняется равенство

$$p^{\omega_1}\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), A) = 0.$$

[*Указание*: это верно в силу предложения 56.3, если длина группы A меньше ω_1; если длина группы A равна ω_1 и E: $0 \to A \to G \to Z(p^\infty) \to \to 0$ — нерасщепляемое расширение, определяющее элемент из $p^{\omega_1}\,\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), A)$, то $G[p] = A[p] \oplus \langle g \rangle$ для некоторого $g \in G$; если $h^*(g) = \omega_1$, то группа G суммируема, что невозможно; если $h^*(g) < \omega_1$, рассмотреть $E\eta$: $0 \to A \to G' \to Z(p^\infty) \to 0$, где η — эндоморфизм группы $Z(p^\infty)$ с ядром $Z(p)$, и показать, что $E\eta$ — нерасщепляемое расширение, но G' — суммируемая группа.]

6 (Хилл и Меджиббен [5]). Суммируемая p-группа служит прямым слагаемым для всякой группы, в которой она содержится в качестве p^{ω_1}-высокой подгруппы. [*Указание*: см. упр. 5.]

7 (Гриффит [10]). Пусть A есть p^{ω_1}-высокая подгруппа группы Прюфера H_{ω_1+1}. Показать, что

(а) группа A изоморфна изотипной подгруппе группы H_{ω_1};

(б) A не является суммируемой группой. [*Указание*: см. упр. 4.]

Замечания

Знаменитая группа Прюфера $H_{\omega+1}$ была первым известным примером редуцированной p-группы, содержащей ненулевые элементы бесконечной высоты (см. Прюфер [2]). Десятилетием позже Ульм [1] доказал, используя остроумные теоретико-матричные методы, что ульмовские факторы [которые в данном случае являются прямыми суммами циклических групп] счетной редуцированной p-группы определяют группу с точностью до изоморфизма. Цыпин [1] дал чисто теоретико-групповое доказательство этого результата и в то же время получил теорему существования (следствие 76.2). Как ни странно, эта замечательная теория долгое время не давала никаких плодов и даже приложения ее были очень немногочисленны.

Первые попытки обобщений были сделаны в начале 50-х годов: теорема существования 76.1 была доказана для произвольных p-групп с заданными ульмовскими факторами независимо и почти одновременно Куликовым [3] и Фуксом [2]. Труднее было распространить теорему Ульма на более широкие классы p-групп.

На самом деле путь к различным обобщениям открыло доказательство теоремы Ульма, данное Капланским и Макки [1]. Первый важный шаг сделал Колеттис [1], который перенес теорию Ульма — Цыпина на прямые суммы счетных p-групп. На этом этапе стало ясно, что должен существовать более широкий класс p-групп, в котором группы различаются с помощью их инвариантов Ульма — Капланского. Э Уокер высказал предположение, что такой класс образуют

тотально проективные p-группы, введенные Нунке [5]. Паркеру и Уокеру [1] удалось распространить теорему Ульма на тотально проективные p-группы, но только длины, не превосходящей $\omega_1\omega$. Большое значение имела работа Нунке [7], где исследовались свойства тотально проективных p-групп.

Вскоре после этого Хилл дал формулировку теоремы Ульма для тотально проективных p-групп [Hill P., *Notices Amer. Math. Soc.*, **14** (1967), 940]. Его работа [24] [еще неопубликованная, но за которой сразу же последовала книга Гриффита [10]] основывается на рассмотрении хороших систем и тонком анализе продолжений изоморфизмов. Идя в другом направлении, Кроули и Хэйлс [1, 2] выявили класс просто представленных p-групп [они называли их T-группами] и показали, что эти группы также можно классифицировать с помощью инвариантов Ульма — Капланского. Замечание, что для тотальной проективности достаточно существования одного хорошего композиционного ряда, по-видимому, является новым.

Мы в этой книге пытались вкратце исследовать различные аспекты теории тотально проективных p-групп и, чтобы быстрее продвинуться к цели, не проводили более глубокого изучения сильных технических методов. Но мы должны отослать читателя к оригинальным работам для ознакомления с дополнительным материалом.

Недавно Уорфилду [5] удалось распространить основные результаты, касающиеся тотально проективных p-групп, на смешанные модули над кольцом дискретного нормирования, просто представленные в смысле § 83. Если отметить тот простой факт, что просто представленные группы без кручения — это в точности вполне разложимые группы [которые тоже описываются с помощью кардинальных инвариантов], то можно поставить вопрос, какова та более широкая теория, которая охватывает все эти частные случаи. Для модулей M Уорфилд ввел новые инварианты, а именно ранги групп $p^{\sigma}M/(p^{\sigma+1}M + T_{\sigma})$ [где T_{σ} — периодическая часть модуля $p^{\sigma}M$] для предельных порядковых чисел σ, и показал, что p-группы немного более широкого класса можно классифицировать с помощью их инвариантов Ульма — Капланского и этих новых инвариантов, взятых для предельных порядковых чисел σ, не кофинальных с ω. Кроме тотально проективных p-групп, этот класс включает в себя все $p^{\sigma}A$-высоки подгруппы тотально проективных p-групп A для предельных порядковых чисел σ.

Существуют различные другие важные аспекты теории p-групп, которые нами совсем не затрагивались. Среди них особенно интересен обобщенный критерий Куликова, полученный Меджиббеном [9], а также его обобщение теории базисных подгрупп (ср. Меджиббен [12]). Последняя теория недавно была распространена Кроули на p-группы любой предельной длины λ, где λ кофинально с ω. Что касается некоторых топологических аспектов теории, отошлем читателя к работам П. Дюбуа [1], Майнса [1] и Уоллера [1]. Обобщение финального ранга p-групп ввели Катлер и П. Дюбуа [1]. Свойства периодических групп, выражаемые в терминах некоторых инфинитарных языков, исследовали Барвайз и Эклоф [Barwise J. and Eklof P., *Ann. Math. Logic*, 2 (1970—1971), 25—68].

Проблема 59. Охарактеризовать p-группы, которые вкладываются в прямые суммы счетных редуцированных p-групп [или, более общо, в тотально проективные p-группы].

Проблема 60. Пусть G — вполне характеристическая подгруппа p-группы A. Найти критерии, при которых не уменьшающий высоту гомоморфизм $G \to A$ индуцируется эндоморфизмом группы A.

Проблема 61. Исследовать p-группы, любые два (конечных) прямых разложения которых имеют изоморфные продолжения.

Проблема 62. Какая подгруппа группы Ext (C, A) соответствует расширениям, в которых A — хорошая подгруппа?

Проблема 63. По аналогии с определением сервантно полных p-групп назовем p-группу A *изотипно полной*, если всякий подцоколь группы A, служащий носителем изотипной подгруппы некоторой p-группы, содержащей A в качестве изотипной подгруппы, служит также носителем изотипной подгруппы группы A. Исследовать изотипно полные p-группы.

Проблема 64. Найти полную систему инвариантов для p-групп конечного ульмовского типа, ульмовские факторы которых являются периодически полными.

Ричмен [3] рассматривал эту проблему в случае, когда первая ульмовская подгруппа — элементарная p-группа.

Проблема 65. Каковы компактные абелевы группы, двойственными к которым являются тотально проективные p-группы?

Глава XIII

ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Существуют весьма широкие классы периодических групп, поддающихся довольно хорошему описанию с помощью инвариантов, однако классы групп без кручения с достаточно разработанной структурной теорией немногочисленны и относительно невелики. Речь идет о группах без кручения ранга один и о прямых суммах этих групп — но не больше; даже для групп без кручения конечного ранга не известно никакой удобной полной системы инвариантов. Можно, конечно, найти некоторые схемы для построения групп без кручения, которые дают какую-то информацию об их структуре, но известные к настоящему моменту схемы не дают приемлемого решения основной проблемы: когда две группы, полученные по разным схемам, изоморфны.

Наиболее глубокое различие между периодическими группами и группами без кручения заключено, пожалуй, в том, как ведут себя эти группы при прямых разложениях. В то время как неразложимая периодическая группа должна быть группой ранга один, имеется столько же неразложимых групп без кручения ранга $\mathfrak{m}$, сколько вообще существует групп без кручения этого ранга. Это справедливо для всех кардинальных чисел, меньших первого сильно недостижимого кардинального числа. Более того, даже в случае групп без кручения конечного ранга разложения в прямую сумму неразложимых групп могут быть удивительно разнообразными.

Мы познакомим читателя с несколькими результатами, касающимися прямых произведений групп без кручения ранга 1, а также их подгрупп, включая некоторые интересные факты, полученные лишь недавно. Будет также рассмотрена красивая теория узких групп.

§ 85. Группы без кручения ранга 1

Для групп без кручения крайне важно понятие, соответствующее понятию высоты,— с его помощью можно различать элементы группы. С этого понятия мы и начинаем наши рассмотрения.

В настоящем параграфе $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность простых чисел, для определенности упорядоченных по возрастанию.

При данном простом числе p максимальное целое число k, для которого в группе без кручения A выполняется условие $p^k \mid a$, где $a \in A$, называется *p-высотой* $h_p(a)$ элемента a; если такого числа не существует, мы полагаем $h_p(a) = \infty$ [см. § 1]. Последовательность p-высот

$$\chi(a) = (h_{p_1}(a), \ldots, h_{p_n}(a), \ldots)$$

называется *характеристикой* или *высотной последовательностью* элемента a; поскольку характеристика зависит от группы A, мы будем иногда писать $\chi_A(a)$, чтобы подчеркнуть роль A. Итак, характеристи-

кой является упорядоченная последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞. Две характеристики $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $(l_1, \ldots, l_n, \ldots)$ равны тогда и только тогда, когда равенство $k_n = l_n$ выполнено для всех n.

Следующие замечания очевидным образом следуют из определения:

а) $\chi(-a) = \chi(a)$ для всех $a \in A$.

б) Если $\chi(a) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, то элемент a делится на целое число $m = p_1^{l_1} \ldots p_r^{l_r}$ тогда и только тогда, когда $l_i \leqslant k_i$ для $i = 1, \ldots, r$.

в) Если $\chi(a) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, то $\chi(p_n a) = (k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n + 1, k_{n+1}, \ldots)$ [мы полагаем $\infty + 1 = \infty$].

г) Всякая последовательность $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ неотрицательных целых чисел и символов ∞ является характеристикой, а именно характеристика элемента 1 в подгруппе R группы Q, порожденной всеми элементами вида $p_n^{-l_n}$, где $l_n \leqslant k_n$ при всех n, совпадает с этой последовательностью. Если R — указанная подгруппа группы Q, то при $a \in A$ и $\chi_A(a) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ мы будем писать $Ra = \langle a \rangle_*$.

Положим $(k_1, \ldots, k_n, \ldots) \leqslant (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$, если $k_n \leqslant l_n$ для всех n. Тогда множество всех характеристик превратится в [полную дедекиндову] структуру относительно покомпонентных операций:

$$(k_1, \ldots, k_n, \ldots) \cap (l_1, \ldots, l_n, \ldots) = \\ = (\min(k_1, l_1), \ldots, \min(k_n, l_n), \ldots),$$

а для операции $\cup$ нужно «min» всюду заменить на «max». В этой структуре $(0, \ldots, 0, \ldots)$ является наименьшим, а $(\infty, \ldots, \infty, \ldots)$ — наибольшим элементом. Для группы без кручения A, очевидно, имеем

д) $\chi_C(c) \leqslant \chi_A(c)$ для всех элементов c подгруппы C группы A; равенство для всех c имеет место тогда и только тогда, когда подгруппа C сервантна в группе A.

е) $\chi(b + c) \geqslant \chi(b) \cap \chi(c)$ для всех $b, c \in A$.

ж) Если $A = B \oplus C$ и $b \in B$, $c \in C$, то $\chi(b + c) = \chi(b) \cap \chi(c)$.

з) Для всякого гомоморфизма α: $A \to B$ и для произвольного $a \in A$ имеет место неравенство $\chi_A(a) \leqslant \chi_B(\alpha a)$.

и) Если C — сервантная подгруппа группы A и a^* — смежный класс по подгруппе C, то

$$\chi_{A/C}(a^*) = \bigcup_{a \in a^*} \chi_A(a).$$

Из определения характеристики возникает понятие, являющееся для групп без кручения основным,— понятие типа. Две характеристики $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $(l_1, \ldots, l_n, \ldots)$ будем считать *эквивалентными*, если $k_n \neq l_n$ имеет место лишь для конечного числа номеров n и только тогда, когда k_n и l_n конечны. Другими словами, сумма $\sum_n |k_n - l_n|$ должна быть конечной [мы полагаем здесь $\infty - \infty = 0$].

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если $\chi(a)$ принадлежит типу $\mathbf{t}$, мы говорим, что элемент *a имеет тип* $\mathbf{t}$ и пишем $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}$ или $\mathbf{t}_A(a) = \mathbf{t}$, если необходимо указать, что тип элемента a вычисляется в группе A.

Тип $\mathbf{t}$ мы будем представлять характеристикой, принадлежащей этому типу. Другими словами, мы будем писать $\mathbf{t} = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, но помнить при этом, что характеристику $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ можно заменить на эквивалентную. Поскольку отношение эквивалентности в множестве характеристик согласовано со структурными операциями, введенными выше, множество типов также является (дистрибутивной) структурой. Таким образом, для типов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{s}$ по определению имеет место неравенство $\mathbf{t} \geqslant \mathbf{s}$, если существуют такие характеристики $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $(l_1, \ldots, l_n, \ldots)$, принадлежащие типам $\mathbf{t}$ и $\mathbf{s}$ соответственно, что $(k_1, \ldots, k_n, \ldots) \geqslant (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$.

А) Если a и b — зависимые элементы в группе A [т. е. $ma = rb$ для целых m, $r \neq 0$], то $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(b)$.

Б) $\mathbf{t}(b + c) \geqslant \mathbf{t}(b) \cap \mathbf{t}(c)$ для всех $b, c \in A$.

В) Если $A = B \oplus C$ и $b \in B$, $c \in C$, то $\mathbf{t}(b + c) = \mathbf{t}(b) \cap \mathbf{t}(c)$.

Г) Для гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ и элемента $a \in A$ имеет место неравенство $\mathbf{t}(a) \leqslant \mathbf{t}(\alpha a)$.

Произвольному типу $\mathbf{t}$ можно поставить в соответствие две вполне характеристические подгруппы группы без кручения A, весьма полезные для развиваемой теории. В силу Б) множество $A(\mathbf{t})$ всех элементов $a \in A$, типы которых удовлетворяют неравенству $\mathbf{t}(a) \geqslant \mathbf{t}$, является подгруппой группы A, заведомо сервантной, благодаря свойству А). Далее, элементы a типов $\mathbf{t}(a) > \mathbf{t}$ порождают подгруппу группы A, которую мы обозначим через $A^*(\mathbf{t})$. Включение

$$A^*(\mathbf{t}) \subseteq A(\mathbf{t})$$

очевидно.

Группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной*. В этом случае $A(\mathbf{t}) = A$ и $A^*(\mathbf{t}) = 0$. Произвольная группа без кручения ранга 1, очевидно, является однородной.

Изучение групп без кручения до некоторой степени опирается на наши сведения о группах ранга 1 Оставшаяся часть параграфа посвящена этим группам.

Из § 24 мы знаем, что любая группа без кручения R ранга 1 изоморфна некоторой подгруппе группы Q. Другими словами, группа без кручения ранга 1 обязательно является рациональной группой.

Поскольку группа R однородна, мы связываем с ней тип $\mathbf{t}$, общий тип всех ненулевых элементов из R. Изоморфным группам, очевидно, соответствуют одинаковые типы. Теперь мы покажем, что если R и S являются группами без кручения ранга 1 одного и того же типа $\mathbf{t}$, то они обязательно изоморфны:

Теорема 85.1 (Бэр [6]). *Две группы без кручения ранга* 1 *изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же тип. Каждый тип является типом некоторой рациональной группы.*

Пусть $a \in R$ и $b \in S$ — произвольные ненулевые элементы, и пусть $\chi(a) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, $\chi(b) = (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$. Если эти характеристики принадлежат одному и тому же типу $\mathbf{t}$, то найдется лишь конечное число индексов, скажем $n_1, \ldots, n_t$, для которых $k_{n_i} \neq l_{n_i}$. Такие k_{n_i} и l_{n_i} суть неотрицательные целые числа, и, поделив элемент a на $p_{n_1}^{k_{n_1}} \ldots p_{n_t}^{k_{n_t}}$, а элемент b на $p_{n_1}^{l_{n_1}} \ldots p_{n_t}^{l_{n_t}}$, мы получим элементы $c \in R$ и $d \in S$, в характеристиках которых на местах с номерами $n_1, \ldots, n_t$ стоят нули. Очевидно, что $\chi(c) = \chi(d)$. Следовательно, уравнение $mx = nc$ разрешимо в группе R тогда и только тогда, когда уравнение $my = nd$ разрешимо в группе S. Такие уравнения в группах без кручения имеют не более одного решения. Следовательно, сопоставление $x \leftrightarrow y$ задает взаимно однозначное соответствие между группами R и S, которое, как сразу видно, сохраняет операцию сложения.

Второе утверждение теоремы непосредственно следует из п. г). ∎

Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между группами без кручения ранга 1 и типами. Поскольку типы описываются в терминах последовательностей неотрицательных целых чисел и символов ∞ и легко можно выяснить, равны ли два типа, теорема 85.1 дает достаточно полное представление о структуре групп без кручения ранга 1.

Пример 1. Очевидно, $\mathbf{t}(Z) = (0, \ldots, 0, \ldots)$, $\mathbf{t}(Q) = (\infty, \ldots, \infty)$. Кроме того, $\mathbf{t}(Q_p) = (\infty, \ldots, \infty, 0, \infty, \ldots)$, $\mathbf{t}(Q^{(p)}) = (0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$, где 0 и ∞ соответственно стоят на m-м месте, если $p_m = p$.

Пример 2. Группа рациональных чисел со знаменателями, свободными от квадратов, имеет тип $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Следствие 85.2. *Множество всех неизоморфных групп без кручения ранга* 1 *имеет мощность континуума.*

Множество всех характеристик имеет мощность $2^{\aleph_0}$, а множество типов не может иметь большую мощность. С другой стороны, мощность множества типов не меньше, чем $2^{\aleph_0}$, так как разные характеристики, состоящие лишь из нулей и символов ∞, принадлежат разным типам. По теореме 85.1 каждый тип является типом некоторой группы ранга 1, тем самым следствие доказано. ∎

Если $\chi = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\chi_1 = (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$ — характеристики, то их *произведение* определим как характеристику

$$\chi\chi_1 = (k_1 + l_1, \ldots, k_n + l_n, \ldots),$$

где, естественно, ∞ плюс нечто есть ∞. Характеристика χ *идемпотентна* [т. е. $\chi^2 = \chi$] в том и только в том случае, когда для каждого n либо $k_n = 0$, либо $k_n = \infty$. Умножение характеристик согла-

совано с отношением эквивалентности, введенным выше, и можно говорить о *произведении* $\mathbf{t}\mathbf{t}_1$ типов $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, а также об *идемпотентном* типе $\mathbf{t} = \mathbf{t}^2$.

Частное $\chi_1 : \chi_2$ двух характеристик $\chi_1 \geqslant \chi_2$ определим как наибольшую характеристику χ, для которой $\chi\chi_2 \leqslant \chi_1$. Легко видеть, что такая характеристика χ существует и удовлетворяет следующему условию: неравенство $\chi'\chi_2 \leqslant \chi_1$ эквивалентно неравенству $\chi' \leqslant \chi$. Частное типов определяется аналогично.

В заключение приведем два элементарных результата.

Предложение 85.3. *Если A и C — группы без кручения ранга* 1, *то $A \otimes C$ — группа без кручения ранга* 1, *причем*

$$\mathbf{t}(A \otimes C) = \mathbf{t}(A) \cdot \mathbf{t}(C).$$

С помощью теоремы 60.6 мы получаем, что группа $A \otimes C$ является подгруппой группы $Q \otimes Q \cong Q$ и, следовательно, имеет ранг 1. Пусть $\chi(a_0) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\chi(c_0) = (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$ для некоторых ненулевых элементов $a_0 \in A$, $c_0 \in C$. Тогда элемент $a_0 \otimes c_0$ из группы $A \otimes C$, очевидно, делится на p_n^m при $m \leqslant k_n + l_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Значит, $\chi(a_0 \otimes c_0) \geqslant \chi(a_0)\chi(c_0)$.

Для таких рациональных чисел r и s, что $ra_0 \in A$, $sc_0 \in C$, рассмотрим отображение $ra_0 \otimes sc_0 \mapsto rs$ из группы $A \times C$ в рациональную группу R, в которой $\chi_R(1) = \chi(a_0) \cdot \chi(c_0)$. Так как это отображение билинейно, то по определению тензорного произведения мы получаем, что строгое неравенство $\chi(a_0 \otimes c_0) > \chi_R(1)$ невозможно. ∎

Предложение 85.4. *Пусть A и C — группы без кручения ранга* 1. *Если неравенство* $\mathbf{t}(A) \leqslant \mathbf{t}(C)$ *не имеет места, то* $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$. *Если же* $\mathbf{t}(A) \leqslant \mathbf{t}(C)$, *то* $\mathrm{Hom}(A, C)$ *является группой без кручения ранга* 1 *и имеет тип* $\mathbf{t}(C) : \mathbf{t}(A)$.

По свойству Г) получаем, что $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$ только тогда, когда $\mathbf{t}(A) \leqslant \mathbf{t}(C)$. В этом случае выберем такие ненулевые элементы $a \in A$ и $c \in C$, что $\chi(a) \leqslant \chi(c)$. Заметим, что существует и притом единственный гомоморфизм η: $A \to C$, для которого $\eta a = c$. Легко получить, что этот гомоморфизм η имеет характеристику $\chi(c) : \chi(a)$, а всякий другой гомоморфизм из A в C есть рациональное кратное η. ∎

Упражнения

1. Пусть $a \in A$, где A — группа без кручения. Множество $S(a)$ всех натуральных чисел n, которые делят элемент a, удовлетворяет следующим условиям:

(1) $1 \in S(a)$;

(2) если $n \in S(a)$ и $m \mid n$, то $m \in S(a)$;

(3) если $m, n \in S(a)$, то $[m, n] \in S(a)$.

Показать, что при $a, b \in A$ равенство $S(a) = S(b)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\chi(a) = \chi(b)$.

2. Для каждого типа $\mathbf{t} \neq (\infty, \ldots, \infty, \ldots)$ найдется счетное число характеристик, принадлежащих типу $\mathbf{t}$.

3. Если $\mathbf{t} = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, то подгруппа $A(\mathbf{t})$ совпадает с сервантной подгруппой группы A, порожденной пересечением $\bigcap_n p_n^{k_n} A$.

4. Если подгруппа C сервантна в группе A, то подгруппа $C(\mathbf{t})$ сервантна в группе $A(\mathbf{t})$.

5. Привести пример, когда

(а) множество элементов, типы которых строго больше типа $\mathbf{t}$, не является подгруппой;

(б) подгруппа $A^*(\mathbf{t})$ не является сервантной в группе A;

(в) группа A содержит элементы типа $\mathbf{t}$ и $A^*(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})$.

6. Если группа A содержит элементы типа $\mathbf{t}$, то подгруппа $A(\mathbf{t})$ порождается всеми такими элементами.

7. Пусть A и B — группы без кручения ранга 1. Группы A и B не изоморфны в том и только в том случае, когда существует такое бесконечное множество Ω степеней p^k простых чисел, что одна из подгрупп $\bigcap_{p^k \in \Omega} p^k A$ и $\bigcap_{p^k \in \Omega} p^k B$ равна нулю, а другая — нет.

8. (а) Пусть A и B — группы без кручения ранга 1. Группа B изоморфна некоторой подгруппе группы A в том и только в том случае, когда $\mathbf{t}(B) \leqslant \mathbf{t}(A)$.

(б) Попарно неизоморфные подгруппы данной группы без кручения ранга 1 образуют либо конечное, либо континуальное семейство.

9. Охарактеризовать p-адические и Z-адические пополнения групп без кручения ранга 1.

10 (Бэр [6]). Если группа без кручения A имеет конечный ранг, то множество типов $\{\mathbf{t}(a) \mid a \in A\}$ удовлетворяет как условию максимальности, так и условию минимальности. [*Указание*: рассмотреть ранги подгрупп $A(\mathbf{t})$.]

11 (Бэр [6]). Существует такая группа без кручения A ранга 2, что множество типов $\{\mathbf{t}(a) \mid a \in A\}$ бесконечно. [*Указание*: в группе $Qa \oplus Qb$ выбрать такую подгруппу A, что для каждого простого числа p_n выполняется равенство $\chi_A(a + p_n b) = (0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$, где ∞ стоит на n-м месте.]

12. Множество неизоморфных групп без кручения конечного ранга имеет мощность континуума.

13. Описать факторгруппы групп без кручения ранга 1.

§ 86. Вполне разложимые группы

Существует совсем немного классов групп без кручения, изучение которых не слишком трудно. Одним из них является класс вполне разложимых групп.

Группа без кручения A называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой групп ранга 1. Свободные и делимые группы представляют собой тривиальные примеры вполне разложимых групп.

Предложение 86.1 (Бэр [6]). *Любые два разложения вполне разложимой группы в прямую сумму групп ранга* 1 *изоморфны.*

Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i — рациональные группы. Из леммы 9.3 легко получить, что для любого типа $\mathbf{t}$ подгруппы $A(\mathbf{t})$ и $A^*(\mathbf{t})$ совпадают с прямыми суммами тех групп A_i, для которых верны неравенства $\mathbf{t}(A_i) \geqslant \mathbf{t}$ и $\mathbf{t}(A_i) > \mathbf{t}$ соответственно. Таким образом, группа

$$A_{\mathbf{t}} = A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t})$$

изоморфна прямой сумме тех групп A_i, типы которых в точности равны $\mathbf{t}$. Мы получаем, что ранг $A_{\mathbf{t}}$ равен числу слагаемых A_i типа $\mathbf{t}$. Поскольку определение группы $A_{\mathbf{t}}$ не зависит от прямых разложений группы A, наше утверждение сразу следует из единственности ранга. ∎

В частности, мы получили, что *для вполне разложимых групп A ранги $r(A_{\mathbf{t}})$, где $\mathbf{t}$ пробегает множество всех типов, образуют полную и независимую систему инвариантов*. Таким образом вопрос о структуре вполне разложимых групп решен полностью.

Пусть C — сервантная подгруппа группы без кручения A. Элемент $a \in A \setminus C$ назовем *собственным относительно C*, если

$$\chi(a) \geqslant \chi(a + c) \quad \text{для всех} \quad c \in C.$$

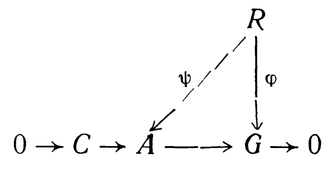
Это условие равносильно тому, что $\chi_A(a) = \chi_{A/C}(a + C)$. Сервантная подгруппа C группы A называется *сбалансированной* [или *регулярной*], если каждый смежный класс группы A по подгруппе C содержит собственный элемент.

Читатель легко убедится в том, что данное определение сбалансированной подгруппы согласуется с соответствующим определением для p-групп, данным в § 80. [Заметим, что в группах без кручения изотипность эквивалентна сервантности.]

Прямое слагаемое всегда является сбалансированным, но обратное неверно [см. упр. 2]. Тем не менее, как показывает следствие 86.3, при некоторых дополнительных условиях сбалансированная подгруппа должна выделяться прямым слагаемым.

Теорема 86.2. *Вполне разложимые группы проективны относительно всех сбалансированно точных последовательностей групп без кручения.*

Свойство проективности сохраняется при взятии прямой суммы, так что утверждение теоремы достаточно доказать для групп ранга 1. Рассмотрим диаграмму



в которой все группы являются группами без кручения, подгруппа C сбалансирована в группе A, а группа R имеет ранг 1. Возьмем произвольный ненулевой элемент $x \in R$. В смежном классе $\varphi(x)$ по под-

группе C выберем собственный относительно C элемент $a \in A$. В силу соотношения $\chi(x) \leqslant \chi(\varphi(x)) = \chi(a)$ соответствие $x \mapsto a$ можно продолжить до гомоморфизма ψ: $R \to A$, при котором указанная диаграмма становится коммутативной. ∎

Утверждение, обратное теореме 86.2, также верно [см. упр. 16]. Теорема 86.2 имеет непосредственное

Следствие 86.3 (Ляпин [5]). *Если C — такая сбалансированная подгруппа группы без кручения A, что факторгруппа A/C вполне разложима, то C служит для A прямым слагаемым.* ∎

Следующая лемма носит технический характер.

Лемма 86.4 (Бэр [6]). *Пусть C — сервантная подгруппа группы без кручения A. Если каждый элемент из смежного класса $a + C$ имеет тот же тип в группе A, что и класс $a + C$ в группе A/C, то в классе $a + C$ найдется элемент, собственный относительно C.*

В силу соотношений $\chi(a) \leqslant \chi(a + C)$ и $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(a + C)$ легко видеть, что существует конечное число таких элементов $a_1, \ldots, a_k \in a + C$, для которых $\chi(a_1) \cup \ldots \cup \chi(a_k) = \chi(a + C)$. Таким образом, достаточно доказать, что если $a - b \in C$ и характеристики $\chi(a)$ и $\chi(b)$ эквивалентны, то найдется такой элемент $g \in a + C$, что $\chi(g) \geqslant \chi(a) \cup \chi(b)$. Поскольку $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(b)$, существуют взаимно простые целые числа m и n, для которых $\chi(ma) = \chi(nb)$. Пусть u и v — такие целые числа, что $mu + nv = 1$. Тогда для элемента $g = mua + nvb \in a + C$, очевидно, выполняется $\chi(g) \geqslant \chi(ma) \geqslant \chi(a) \cup \chi(b)$. ∎

Теперь мы без труда получим следующий полезный результат.

Предложение 86.5 (Бэр [6]). *Пусть C — сервантная подгруппа группы без кручения A, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *факторгруппа A/C является вполне разложимой и однородной группой типа* $\mathbf{t}$;

б) *все элементы множества $A \setminus C$ имеют тип* $\mathbf{t}$.

Тогда C служит прямым слагаемым для A.

По лемме 86.4 получаем, что C — сбалансированная подгруппа в группе A. Остается применить следствие 86.3. ∎

Следующий результат обобщает известную теорему о том, что подгруппы свободных групп свободны.

Теорема 86.6 (Бэр [6], Колеттис [3]). *Пусть A — вполне разложимая однородная группа типа $\mathbf{t}$. Если подгруппа C группы A является однородной группой типа $\mathbf{t}$ [в частности, сервантной в A], то C — вполне разложимая группа.*

Мы применяем те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 14.5. Пусть $A = \bigoplus_{\sigma} G_\sigma$, где каждое слагаемое G_σ — рациональ-

ная группа типа $\mathbf{t}$, а σ пробегает множество порядковых чисел, меньших некоторого порядкового числа τ.

Положим

$$A_\sigma = \bigoplus_{\rho<\sigma} G_\rho \quad \text{и} \quad C_\sigma = A_\sigma \cap C.$$

Очевидно, что $C_\sigma = C_{\sigma+1} \cap A_\sigma$, откуда

$$C_{\sigma+1}/C_\sigma \cong (C_{\sigma+1} + A_\sigma)/A_\sigma \subseteq A_{\sigma+1}/A_\sigma \cong G_\sigma.$$

Мы утверждаем, что C_σ — прямое слагаемое в $C_{\sigma+1}$. Действительно, в группе $C_{\sigma+1}$ все элементы имеют тип $\mathbf{t}$, и если $C_{\sigma+1} \neq C_\sigma$, то тип группы $C_{\sigma+1}/C_\sigma$ также равен $\mathbf{t}$ [эта группа изоморфна подгруппе группы G_σ и в то же время является эпиморфным образом группы $C_{\sigma+1}$]. Благодаря теореме 86.5 отсюда следует, что $C_{\sigma+1} = C_\sigma \oplus B_\sigma$ для некоторой подгруппы $B_\sigma \subseteq C$. Подгруппы B_σ $(\sigma < \tau)$ порождают прямую сумму $\bigoplus_{\sigma<\tau} B_\sigma$, которая должна совпадать с группой C. ∎

Обратимся теперь к основному результату этого параграфа.

Теорема 86.7 (Бэр [6], Куликов [4], Капланский [4]). *Прямые слагаемые вполне разложимых групп без кручения вполне разложимы.*

Вначале рассмотрим случай групп конечного ранга. Пусть $A = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n = B \oplus C$, где каждая группа H_i вполне разложима, имеет конечный ранг и является однородной группой типа $\mathbf{t}_i$. Проведем индукцию по n. Если $n = 1$, то группа A однородна, и из теоремы 86.6 следует, что группа B вполне разложима. Допустим, что типы $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ $(n > 1)$ попарно различны и тип $\mathbf{t}_n$ является среди них максимальным. Тогда $H_n = A(\mathbf{t}_n)$ и $H_n = B(\mathbf{t}_n) \oplus C(\mathbf{t}_n)$ по лемме 9.3, откуда $B = B(\mathbf{t}_n) \oplus B'$ и $C = C(\mathbf{t}_n) \oplus C'$ для некоторых подгрупп $B' \subseteq B$ и $C' \subseteq C$. Таким образом, $A = B' \oplus C' \oplus H_n$ и $H_1 \oplus \ldots \oplus H_{n-1} \cong B' \oplus C'$. По предположению индукции группы $B(\mathbf{t}_n)$ и B' являются вполне разложимыми, а значит, и B — вполне разложимая группа.

Для рассмотрения общего случая нам понадобится теорема 87.5 [в доказательстве которой используется лишь первая часть настоящего доказательства]. В силу предложения 9.10 всякое прямое слагаемое C вполне разложимой группы A является прямой суммой счетных групп C_σ. По теореме 87.5 группы C_σ сепарабельны и в силу теоремы 87.1 вполне разложимы. ∎

В заключение докажем следующую лемму, которая потребуется в дальнейшем.

Лемма 86.8. *Пусть A — вполне разложимая однородная группа конечного ранга. Тогда всякая сервантная подгруппа группы A служит для A прямым слагаемым.*

Группу A можно представить в виде $A = Ra_1 \oplus \ldots \oplus Ra_k$, где R — подгруппа группы Q. Для такой группы A справедливо следую-

щее утверждение, являющееся непосредственным обобщением леммы 15.3: для взаимно простых целых чисел $n_1, \ldots, n_k$ найдутся такие элементы $b_1, \ldots, b_k \in A$, что

$$A = Rb_1 \oplus \ldots \oplus Rb_k, \quad \text{где} \quad b_1 = n_1a_1 + \ldots + n_ka_k.$$

Пусть C — сервантная подгруппа ранга 1 группы A. Тогда ее можно представить в виде $C = Rc$, где $c = n_1a_1 + \ldots + n_ka_k$ для некоторых взаимно простых целых чисел $n_1, \ldots, n_k$. В силу предыдущего утверждения подгруппа C служит для A прямым слагаемым. Пусть теперь C — произвольная сервантная подгруппа группы A и C' — сервантная подгруппа ранга 1 группы C. По доказанному подгруппа C' — прямое слагаемое в группе A, т. е. $A = C' \oplus A'$ для некоторой подгруппы $A' \subset A$, и $C = C' \oplus C''$, где $C'' = C \cap A'$. По теореме 86.6 группа A' снова является вполне разложимой. Так как подгруппа C'' сервантна в группе A', то с помощью индукции мы получаем наше утверждение. ∎

Упражнения

1 (Хаймо [1]). Пусть B, C — такие сервантные подгруппы группы A, что $B \subseteq C$. Доказать следующие утверждения:

(а) Если подгруппа C сбалансирована в A, то C сбалансирована в B.

(б) Если подгруппа B сбалансирована в A, то подгруппа B/C сбалансирована в A/C.

(в) Если подгруппа C сбалансирована в A, а подгруппа B/C сбалансирована в A/C, то B — сбалансированная подгруппа группы A.

2. Пусть F — свободная группа и G — такая подгруппа группы F, что F/G — однородная группа типа $(0, \ldots, 0, \ldots)$, не являющаяся свободной. Показать, что подгруппа G сбалансирована в группе F, но не выделяется в F прямым слагаемым.

3. (а) Множество $\{\mathbf{t}(a) \mid a \in A\}$ типов элементов вполне разложимой группы A замкнуто относительно пересечения.

(б) Найти наименьшую верхнюю грань числа различных типов элементов из A, где A пробегает семейство вполне разложимых групп фиксированного ранга n.

4 (Бэр [6]). Пусть C — такая сервантная подгруппа группы A, что $C^*(\mathbf{t}) = C \cap A^*(\mathbf{t})$, и, кроме того, группа $A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t})$ вполне разложима. Тогда группа $C(\mathbf{t})$ является прямой суммой подгруппы $C^*(\mathbf{t})$ и некоторой вполне разложимой группы.

5*. Сервантная подгруппа вполне разложимой группы конечного ранга не обязана быть вполне разложимой. (*Указание*: рассмотреть некоторую сервантную подгруппу ранга 2 группы $\langle p_1^{-\infty}a_1, p_2^{-\infty}a_1\rangle \oplus \oplus \langle p_1^{-\infty}a_2, p_3^{-\infty}a_2\rangle \oplus \langle p_2^{-\infty}a_3, p_3^{-\infty}a_3\rangle$, где p_1, p_2, p_3 — различные простые числа (обозначения см. в § 88).)

6. Если A — вполне разложимая группа конечного ранга и B — существенная подгруппа группы A, то группа A/B является конечной в том и только в том случае, когда каждый элемент из B имеет в B тот же тип, что и в A.

7 (Фукс, Кертес и Селе [2]). Группа без кручения A обладает тем свойством, что всякая сервантная подгруппа служит для нее прямым слагаемым, тогда и только тогда, когда редуцированная часть группы A является однородной вполне разложимой группой конечного ранга. [*Указание*: свести рассмотрение к случаю конечного ранга и воспользоваться леммой 86.8.]

8. Для двух произвольных прямых разложений вполне разложимой группы существуют изоморфные продолжения.

9 (Гриффит [3]). Произвольная группа без кручения A является сервантно существенным расширением некоторой своей вполне разложимой подгруппы C, причем $|A| \leqslant |C|^{\aleph_0}$. [*Указание*: выбрать максимальную сервантную вполне разложимую подгруппу.]

10 (Прохазка [10]). Пусть A — такая вполне разложимая группа, что различные типы ее компонент ранга 1 вполне упорядочены по убыванию. Тогда сервантные подгруппы группы A также являются вполне разложимыми.

11* (Прохазка [14]). Редуцированная группа без кручения A обладает тем свойством, что $A \cong C \oplus A/C$ для каждой сервантной подгруппы C группы A, тогда и только тогда, когда A — вполне разложимая группа конечного ранга, причем типы слагаемых ранга 1 линейно упорядочены.

12 (Фукс [19]). Для счетных групп доказать теорему 86.7 по следующей схеме. Подгруппу $A(\mathbf{t})$ представить в виде $A(\mathbf{t}) = A^*(\mathbf{t}) \oplus A_{\mathbf{t}}$, аналогично представить подгруппы $B(\mathbf{t})$ и $C(\mathbf{t})$.

(а) Показать, что $A = B_{\mathbf{t}_1} \oplus C_{\mathbf{t}_1} \oplus \ldots \oplus B_{\mathbf{t}_n} \oplus C_{\mathbf{t}_n} \oplus (\bigoplus_{\mathbf{t} \neq \mathbf{t}_i} A_{\mathbf{t}})$ для произвольного конечного набора типов $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$. [*Указание*: применить индукцию, начиная с минимального $\mathbf{t}_i$.]

(б) Положив $B' = B \cap [C_{\mathbf{t}_1} \oplus \ldots \oplus C_{\mathbf{t}_n} \oplus (\bigoplus_{\mathbf{t} \neq \mathbf{t}_i} A_{\mathbf{t}})]$ и аналогично для C', показать, что $A = A_{\mathbf{t}_1} \oplus \ldots \oplus A_{\mathbf{t}_n} \oplus B' \oplus C'$.

(в) Доказать, что $B = X_{\mathbf{t}_1} \oplus \ldots \oplus X_{\mathbf{t}_n} \oplus B'$, где $X_{\mathbf{t}_i} \cong B_{\mathbf{t}_i}$ и $X_{\mathbf{t}_i} \subseteq A_{\mathbf{t}_1} \oplus \ldots \oplus A_{\mathbf{t}_n}$.

(г) Показать, что, переходя от n к $n+1$, можно брать прежние подгруппы $X_{\mathbf{t}_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

(д) Группа B — прямая сумма подгрупп $X_{\mathbf{t}_i}$.

13 (Бэр [6]). Следующим образом определим классы Γ_σ групп без кручения. Пусть Γ_1 — класс всех счетных групп без кручения. Пусть теперь $\sigma > 1$ — произвольное порядковое число и для всех порядковых чисел $\rho < \sigma$ классы Γ_ρ определены. Мы полагаем $A \in \Gamma_\sigma$, если группа A содержит такую сервантную подгруппу C конечного ранга, что A/C является прямой суммой групп, каждая из которых принадлежит некоторому классу Γ_ρ, где $\rho < \sigma$. Доказать, что однородная группа A типа $\mathbf{t}$ вполне разложима в том и только в том случае, когда для каждой сервантной подгруппы C конечного ранга группа A/C является однородной группой типа $\mathbf{t}$ и группа A принадлежит некоторому классу

Γ_σ. [*Указание*: достаточность условия доказывается индукцией по σ.]

14. Показать, что прямое произведение бесконечного множества циклических групп не принадлежит никакому классу Γ_σ. [*Указание*: см. доказательство теоремы 19.2.]

15. Для произвольной группы без кручения A существуют такая вполне разложимая группа G и такой эпиморфизм $\varphi: G \twoheadrightarrow A$, что подгруппа $\operatorname{Ker} \varphi$ сбалансирована в группе G. [*Указание*: взять такие мономорфизмы φ_i: $R_i \twoheadrightarrow A$, что $\{\operatorname{Im} \varphi_i\}$ — множество всех сервантных подгрупп ранга 1 группы A, и положить $G = \bigoplus_i R_i$.]

16. Группа без кручения проективна относительно всех сбалансированно точных последовательностей групп без кручения в том и только в том случае, когда она вполне разложима. [*Указание*: теорема 86.2, упр. 15 и теорема 86.7.]

§ 87. Сепарабельные группы

Перейдем к рассмотрению класса групп без кручения, более широкого, чем класс вполне разложимых групп. Группы из этого класса можно считать «локально» вполне разложимыми в следующем смысле.

Группа без кручения A называется *сепарабельной* [см. Бэр [6]], если каждое конечное подмножество элементов из A содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы A. Очевидно, мы можем считать, что это слагаемое имеет конечный ранг.

Прежде всего приведем следующие элементарные факты:

а) Группа A сепарабельна тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть сепарабельна.

б) Прямые суммы сепарабельных групп снова являются сепарабельными.

в) Если группа A сепарабельна, то для каждого типа $\mathbf{t}$ подгруппа $A^*(\mathbf{t})$ сервантна в группе A.

г) *Всякая вполне характеристическая подгруппа C сепарабельной группы A также является сепарабельной.*

Действительно, если $c_1, \ldots, c_k \in C$, то по определению существует такое разложение $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus A'$, что $A_1, \ldots, A_n$ — группы ранга 1 и $c_1, \ldots, c_k \in A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. В силу леммы 9.3

$$C = (C \cap A_1) \oplus \ldots \oplus (C \cap A_n) \oplus (C \cap A'),$$

где каждая из групп $C \cap A_1, \ldots, C \cap A_n$ — либо нулевая, либо группа ранга 1, а в прямой сумме этих групп лежат все элементы $c_1, \ldots, c_k$.

д) *Пусть C — вполне характеристическая сервантная подгруппа сепарабельной группы A. Тогда группа A/C сепарабельна.*

По условию A/C — группа без кручения. При заданных элементах $a_1 + C, \ldots, a_k + C \in A/C$ найдется такое разложение $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus A'$, что $A_1, \ldots, A_n$ — группы ранга 1 и $a_1, \ldots, a_k \in A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Пусть $A_1 \cap C = \ldots = A_m \cap C = 0$ и $A_{m+1}, \ldots$

..., $A_n \subseteq C$. Тогда

$$A/C = (A_1 + C)/C \oplus \ldots \oplus (A_m + C)/C \oplus (A' + C)/C,$$

причем прямая сумма первых m слагаемых содержит данные смежные классы $a_1 + C, \ldots, a_k + C$.

е) *Пусть A — сепарабельная группа и $\mathbf{t}$ — любой тип. Тогда $A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t})$ — сепарабельная группа.*

Это сразу же следует из пп. г), в) и д).

Важные примеры сепарабельных групп без кручения [не являющихся вполне разложимыми группами] дают некоторые прямые произведения групп ранга 1. В частности, из доказательства теоремы 19.2 видно, что *прямые произведения бесконечных циклических групп всегда сепарабельны*. Следующий результат показывает, однако, что лишь несчетные сепарабельные группы представляют собой нечто новое.

Теорема 87.1. (Бэр [6]). *Счетная сепарабельная группа без кручения вполне разложима.*

Пусть A — такая группа и $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — ее система образующих. Существует вполне разложимое прямое слагаемое A_1 группы A, имеющее конечный ранг и содержащее элемент a_1. Пусть $n > 1$ и уже построена такая возрастающая цепочка $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1}$ вполне разложимых прямых слагаемых группы A, что все они имеют конечный ранг и элементы $a_1, \ldots, a_i$ лежат в подгруппе A_i ($i = 1, \ldots, n-1$). Тогда найдется вполне разложимое прямое слагаемое A_n группы A, имеющее конечный ранг и содержащее как подгруппу A_{n-1} [или, что то же самое, максимальную независимую систему элементов подгруппы A_{n-1}], так и элемент a_n. Очевидно, объединение возрастающей цепочки $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ есть A. Пусть $B_1 = A_1$ и $A_n = A_{n-1} \oplus B_n$ при $n > 1$. Мы получаем, что $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где группы B_n вполне разложимы как прямые слагаемые групп A_n [см. первую часть доказательства теоремы 86.7]. ∎

Ввиду следующих двух результатов однородные сепарабельные группы представляют особенный интерес.

Предложение 87.2 (Бэр [6]). *Однородная группа A сепарабельна тогда и только тогда, когда каждая ее сервантная подгруппа, имеющая конечный ранг, служит для A прямым слагаемым.*

Если A — сепарабельная группа, то ее сервантную подгруппу C конечного ранга можно вложить в прямое слагаемое B группы A, где B имеет конечный ранг и вполне разложимо. В силу однородности группы B из леммы 86.8 следует, что C — прямое слагаемое в B и, значит, в A. Обратно, пусть сервантные подгруппы C конечного ранга служат для A прямыми слагаемыми. В этом случае всякая сервантная в C подгруппа служит для C прямым слагаемым, откуда сразу следует, что C — вполне разложимая группа. ∎

Следствие 87.3. *Сервантные подгруппы однородных сепарабельных групп сепарабельны.*

Пусть C — сервантная подгруппа однородной сепарабельной группы A. Если $c_1, \ldots, c_k \in C$, то подгруппа $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle_*$ в силу предложения 87.2 служит прямым слагаемым для A и, значит, для C. Отсюда снова в силу предложения 87.2 следует, что C — сепарабельная группа. ∎

До сих пор не известно никакого удовлетворительного структурного описания сепарабельных групп без кручения. Следующий результат дает некоторую информацию для однородного случая.

Предложение 87.4. *Однородная группа без кручения типа* $\mathbf{t}$ *является сепарабельной в том и только в том случае, когда она изоморфна некоторой сервантной подгруппе группы* $\left(\prod_i R_i\right)(\mathbf{t})$, *где группы* R_i *имеют ранг* 1 *и тип* $\mathbf{t}$.

Сначала установим сепарабельность группы $G = \left(\prod R_i\right)(\mathbf{t})$. Очевидно, G является однородной группой типа $\mathbf{t}$. Группу $\prod R_i$ запишем в виде $\prod R_i = \prod (Ra_i)$, где R — рациональная группа типа $\mathbf{t}$. Элемент $g \in G$ будет иметь при этом вид $g = (\ldots, r_i a_i, \ldots)$, где $r_i \in R$. Можно ограничиться рассмотрением таких элементов $g \in G$, что $\langle g \rangle_* = Rg$. В этом случае знаменатели чисел r_i делятся лишь на такие простые числа p, что на соответствующем месте в типе $\mathbf{t}$ стоит ∞. Мы можем, следовательно, записать $r_i = s_i n_i$, где s_i — рациональное число, числитель и знаменатель которого делятся лишь на такие простые $p = p_l$, что на l-м месте в типе $\mathbf{t}$ стоит ∞, а n_i — целое число, которое делится только на те $p = p_l$, для которых на l-м месте в типе $\mathbf{t}$ стоит конечное число. Если существует индекс j, при котором $|n_j| = 1$, то $\prod R_i = Rg \oplus H_j$, где $H_j = \prod_{i \neq j} (Ra_i)$. Если такого индекса не существует, то аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 19.2, мы найдем конечный набор таких элементов $h_1, \ldots, h_k$ из группы G, что $\prod R_i = Rh_1 \oplus \ldots \oplus Rh_k \oplus H'$, где $g \in Rh_1 \oplus \ldots \oplus Rh_k$, а группа H' является прямым произведением почти всех групп Ra_i. Для элементов $g_1, \ldots, g_n \in G$, где $\langle g_i \rangle_* = Rg_i$, пользуясь индукцией по n, получим аналогичное разложение группы $\prod R_i$, при котором $g_1, \ldots, g_n \in Rh_1 \oplus \ldots \oplus Rh_k$. Поскольку группы Rh_i имеют тип $\mathbf{t}$ [слагаемые типа $\mathbf{t}' < \mathbf{t}$ можно было опустить; в действительности таких слагаемых нет — см. предложение 96.2], мы получаем $G = \left(\prod \mathrm{R}_i\right)(\mathbf{t}) = Rh_1 \oplus \ldots \oplus Rh_k \oplus H'(\mathbf{t})$, откуда и следует сепарабельность группы G. Остается применить следствие 87.3, и достаточность будет доказана.

Чтобы доказать обратное, возьмем сепарабельную и однородную группу A типа $\mathbf{t}$. В силу предложения 87.2 для каждого элемента $a \neq 0$ из группы A подгруппа $\langle a \rangle_*$ выделяется в A прямым слагаемым. Значит, существует эпиморфизм $\pi_a\colon A \to R$ [где R — рациональная

группа типа **t**], причем $\pi_a a \neq 0$. Отсюда следует, что A является подпрямой суммой рациональных групп R_i типа **t**; более того, группа A, очевидно, содержится в группе $(\prod R_i)(\mathbf{t})$, и ее сервантность в этой группе следует из того, что элемент $\pi_a a$ имеет ту же характеристику, что и элемент a. ∎

Следующая теорема представляет собой основной результат о сепарабельных группах.

Теорема 87.5 (Фукс [26]). *Прямые слагаемые сепарабельных групп сепарабельны.*

Пусть $A = B \oplus C$ — прямое разложение сепарабельной группы A. При заданных элементах $b_1, \ldots, b_k \in B$ найдется прямое слагаемое G группы A, которое имеет конечный ранг, вполне разложимо и содержит элементы $b_1, \ldots, b_k$. Пусть $A = G \oplus H$ для некоторого $H \subseteq A$.

Группу G представим в виде $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, где каждое G_i — вполне разложимая однородная группа типа $\mathbf{t}_i$. Сейчас мы проведем наиболее существенную часть доказательства. Мы убедимся в том, что существует такое прямое разложение $A = G' \oplus H'$, что $G \subseteq G' = G_1' \oplus \ldots \oplus G_n'$, где каждое G_i' — вполне разложимая однородная группа типа $\mathbf{t}_i$ и $H' = (H' \cap B) \oplus (H' \cap C)$. Воспользуемся индукцией по n.

Пусть $n = 1$. В этом случае G — однородная группа, тип которой мы обозначим через **t**. Группы $A(\mathbf{t}) = G \oplus H(\mathbf{t})$ и $A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t}) = \overline{G} \oplus H(\mathbf{t})/H^*(\mathbf{t})$ сепарабельны [см. п. г) и е)], здесь черта сверху означает образ подгруппы G в группе $A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t})$ при естественном отображении. В силу следствия 87.3 в разложении

$$A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t}) = B(\mathbf{t})/B^*(\mathbf{t}) \oplus C(\mathbf{t})/C^*(\mathbf{t})$$

оба слагаемых сепарабельны; следовательно, существуют такие разложения

$$B(\mathbf{t})/B^*(\mathbf{t}) = \overline{B}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{B}_r \oplus \overline{X}$$

и

$$C(\mathbf{t})/C^*(\mathbf{t}) = \overline{C}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{C}_s + \overline{Y},$$

что $\overline{B}_i$, $\overline{C}_j$ — группы ранга 1 и типа **t**, а группа $\overline{G}$ содержится в группе

$$\overline{G}' = \overline{B}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{B}_r \oplus \overline{C}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{C}_s.$$

Ввиду предложения 86.5 существуют такие подгруппы B_i и C_j групп B и C соответственно, что $r(B_i) = r(C_j) = 1$, а группы $\overline{B}_i$ и $\overline{C}_j$ являются образами этих подгрупп при естественных отображениях $B \to B/B^*(\mathbf{t})$ и $C \to C/C^*(\mathbf{t})$. Группы $B_1, \ldots, B_r$, очевидно, содержатся в прямом слагаемом J группы A, где J — вполне разложимая группа конечного ранга. Не нарушая общности, можно считать, что $J(\mathbf{t}) = J$. Так как $\overline{B}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{B}_r$ — прямое слагаемое в группе

$A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t})$ и, значит, в группе $J/J^*(\mathbf{t})$, то $B_1 \oplus \ldots \oplus B_r \oplus J^*(\mathbf{t})$ — прямое слагаемое в группе J. Мы получаем, что $B_1 \oplus \ldots \oplus B_r$ служит прямым слагаемым для A и, значит, для B, т. е.

$$B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_r \oplus B_0 \quad \text{для некоторого} \quad B_0 \subseteq B.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_s \oplus C_0 \quad \text{для некоторого} \quad C_0 \subseteq C.$$

Существуют такие рациональные группы $\overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_l$ типа $\mathbf{t}$, что $\overline{G}' = \overline{G} \oplus \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_l$. Возьмем такие подгруппы $K_1, \ldots, K_l$ ранга 1 группы A, что при отображении $A \to A/A^*(\mathbf{t})$ их образы совпадают с группами $\overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_l$ соответственно. Тогда группа $G' = G \oplus K_1 \oplus \ldots \oplus K_l$ будет вполне разложимой подгруппой группы A, а ее образ в группе $A/A^*(\mathbf{t})$ совпадет с группой $\overline{G}'$. Мы хотим показать, что

$$A = G' \oplus B_0 \oplus C_0.$$

Прежде всего, $G' + A^*(\mathbf{t}) = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_r \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_s) + A^*(\mathbf{t})$. Так как $A^*(\mathbf{t}) \subseteq B_0 \oplus C_0$, то подгруппы G', B_0 и C_0 вместе порождают группу $B \oplus C = A$. Далее, пусть $g \in G' \cap (B_0 \oplus C_0)$. Тогда $g = a + b + c$ [где $a \in A^*(\mathbf{t})$, $b \in B_1 \oplus \ldots \oplus B_r$, $c \in C_1 \oplus \oplus \ldots \oplus C_s$], следовательно, $b + c = g - a \in B_0 \oplus C_0$. Отсюда получаем, что $g - a = 0$ и $g \in G' \cap A^*(\mathbf{t}) = 0$. Итак, подгруппу G мы вложили в прямое слагаемое G' группы A, где G' — вполне разложимая однородная группа, а дополнительным к ней слагаемым является $H' = B_0 \oplus C_0$, причем $B_0 \subseteq B$, $C_0 \subseteq C$.

Пусть $n > 1$. Типы $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$ можно считать различными. Пусть $\mathbf{t}_n$ — максимальный среди них. По предположению индукции существует прямое разложение $A = K' \oplus L$, которое обладает следующими свойствами: группа K' содержит подгруппу $K = G_1 \oplus \ldots \oplus G_{n-1}$ и является вполне разложимой группой конечного ранга, причем ее слагаемые ранга 1 могут иметь лишь типы $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$; кроме того, $L = (L \cap B) \oplus (L \cap C)$. Так как $A(\mathbf{t}_n) = K'(\mathbf{t}_n) \oplus L(\mathbf{t}_n) = L(\mathbf{t}_n)$, то $G_n \subseteq L$ и, значит, G_n — прямое слагаемое в группе L. Из определения сепарабельности легко получить, что прямое слагаемое L сепарабельной группы A, обладающее дополнением конечного ранга, само является сепарабельным. Таким образом, в силу первой части доказательства существует разложение $L = G_n' \oplus H'$, где G_n' — вполне разложимая однородная группа конечного ранга. При этом $G_n \subseteq G_n'$ и

$$H' = (H' \cap L \cap B) \oplus (H' \cap L \cap C) = (H' \cap B) \oplus (H' \cap C).$$

Положив $G' = K' \oplus G_n'$, получим $A = G' \oplus H'$ — искомое разложение группы A.

Теперь мы без труда закончим доказательство теоремы 87.5. Заметим, что из разложения

$$A = G' \oplus (H' \cap B) \oplus (H' \cap C)$$

следуют разложения

$$B = (H' \cap B) \oplus B' \quad \text{и} \quad C = (H' \cap C) \oplus C',$$

где $B' = [G' \oplus (H' \cap C)] \cap B$ и $C' = [G' \oplus (H' \cap B)] \cap C$. Следовательно,

$$A = (H' \cap B) \oplus (H' \cap C) \oplus B' \oplus C',$$

причем $b_1, \ldots, b_k \in B'$. Мы получаем, что группа B' вполне разложима в силу изоморфизма $G' \cong B' \oplus C'$ и первой части доказательства теоремы 86.7. Таким образом, группа B сепарабельна. ∎

Непосредственным обобщением понятия сепарабельности является понятие $\mathfrak{m}$-сепарабельности, где $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Группа A называется *$\mathfrak{m}$-сепарабельной*, если каждое ее подмножество мощности $< \mathfrak{m}$ может быть вложено во вполне разложимое прямое слагаемое группы A. Никаких серьезных результатов, касающихся этих групп, пока нет.

Гриффит [5] называет группу A *косепарабельной*, если при условии, что A/B — конечно порожденная группа, подгруппа B содержит прямое слагаемое C группы A, имеющее конечно порожденное дополнение. С помощью этого понятия Гриффит изучал W-группы [см. § 99].

Упражнения

1 (Бэр [6]). Группа без кручения A сепарабельна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(1) каждое конечное подмножество группы A лежит в некотором прямом слагаемом, являющемся прямой суммой однородных групп;

(2) для каждого типа $\mathbf{t}$ группа $A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t})$ сепарабельна. [*Указание*: прямые слагаемые в условии (1) сепарабельны.]

2. Всякая сервантная подгруппа конечного ранга служит для A прямым слагаемым в том и только в том случае, когда редуцированная часть группы A является однородной сепарабельной группой.

3* (Нунке). Используя обозначения и результаты § 94, показать, что для любого простого числа p группа $A = pP + S$ не является сепарабельной. [*Указание*: так как Z — узкая группа, то для любого гомоморфизма $\varphi\colon A \to Z$ имеет место $\varphi(p, \ldots, p, \ldots) \in pZ$.]

4 (Шарль [8]). Однородная группа A типа $(0, \ldots, 0, \ldots)$ сепарабельна тогда и только тогда, когда для каждого простого числа p имеет место равенство $\bigcap \varphi^{-1}(pZ) = pA$, где φ пробегает множество всех гомоморфизмов $\varphi\colon A \to Z$. [*Указание*: при доказательстве достаточности показать, что каждая сервантная подгруппа ранга 1 выделяется прямым слагаемым.]

5*. Показать, что группа $\left(\prod_{i \in I} R_i\right)(\mathbf{t})$ из предложения 87.4 не служит прямым слагаемым для группы $\prod_{i \in I} R_i$, если только эти группы не совпадают; предположить, что множество I имеет неизмеримую мощность. [*Указание*: § 94, упр. 8.]

6 (Сонсяда). Существуют неизоморфные сепарабельные группы, каждая из которых изоморфна некоторой сервантной подгруппе другой. [*Указание*: $\prod Z$ и $\prod Z \oplus (\oplus Z)$.]

7. Для всякой группы A группа Hom (A, Z) сепарабельна. [*Указание*: предложение 87.4.]

8. Тензорное произведение двух сепарабельных групп без кручения также сепарабельно.

9 (Бэр [6]). Элемент $a \in A$ назовем *примитивным* типа $\mathbf{t}$, если $a \in A(\mathbf{t}) \setminus A^*(\mathbf{t})$ и a — собственный элемент относительно $A^*(\mathbf{t})$. Множество элементов $\{a_1, \ldots, a_k\}$ назовем примитивным, если его члены примитивны и имеют различные типы. Пусть A — сепарабельная группа. Тогда

(а) множество $\{a_1, \ldots, a_k\}$ примитивно тогда и только тогда, когда элементы a_i имеют различные типы, а сервантная подгруппа, порожденная этим множеством, служит для A прямым слагаемым, причем $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle_* = \langle a_1 \rangle_* \oplus \ldots \oplus \langle a_k \rangle_*$;

(б) пусть имеются два примитивных множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $\{b_1, \ldots, b_k\}$; автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\, A$, удовлетворяющий условию $\varphi a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, k$, существует в том и только в том случае, когда $\chi(a_i) = \chi(b_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

§ 88. Неразложимые группы

Группа называется *неразложимой*, если она обладает лишь тривиальными прямыми слагаемыми. Среди периодических групп только коциклические группы неразложимы. Никакая смешанная группа не является неразложимой [см. следствие 27.4]. Цель настоящего параграфа — получить информацию о неразложимых группах без кручения.

Прежде всего, естественно, возникает вопрос, какими кардинальными числами могут быть ранги неразложимых групп. Основной результат [см. следующий параграф] покажет, что существуют неразложимые группы любого ранга $\mathfrak{m}$, меньшего первого сильно недостижимого кардинального числа.

Неразложимые группы ранга $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ легче всего строить с помощью целых p-адических чисел.

Теорема 88.1 (Бэр [6]). *p-сервантные подгруппы группы целых p-адических чисел неразложимы.*

Пусть $A \neq 0$ — сервантная подгруппа группы J_p, и пусть $0 \neq \pi \in A$. Если $\pi = s_k p^k + s_{k+1} p^{k+1} + \ldots$ $(s_k \neq 0)$ — канонический вид числа π, то в силу p-сервантности $s_k + s_{k+1} p + \ldots \in A$. Таким образом, группа A содержит p-адическую единицу и, следовательно, $A + pJ_p = J_p$. В силу p-сервантности $pA = A \cap pJ_p$, откуда

$$A/pA = A/(A \cap pJ_p) \cong \langle A + pJ_p \rangle / pJ_p = J_p/pJ_p \cong Z(p).$$

Пусть $A = B \oplus C$, где $B \neq 0$, $C \neq 0$. Поскольку подгруппы B и C также p-сервантны в группе J_p, имеем $A/pA \cong B/pB \oplus C/pC \cong Z(p) \oplus Z(p)$. Мы пришли к противоречию, следовательно, группа A неразложима. ∎

Поскольку ранг группы J_p равен $2^{\aleph_0}$, теорема 88.1 показывает, что существуют неразложимые группы произвольного ранга $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Следующим этапом наших рассмотрений будет получение примеров неразложимых групп в более явном виде. В дальнейших построениях мы будем использовать те или иные обозначения, руководствуясь соображениями удобства. Например, мы будем писать $p^{-\infty}a$ вместо бесконечного множества $p^{-1}a, \ldots, p^{-n}a, \ldots$. Группу A окажется удобным строить с помощью векторного пространства V над полем $\mathbf{Q}$. В пространстве V мы будем брать независимые элементы a_n и затем описывать в этом пространстве систему образующих группы A. Мы также будем строить группу A, беря прямую сумму некоторых групп и присоединяя к ней элементы ее делимой оболочки. Буквы $a_n, b_n, e_n, \ldots$ будут обозначать независимые элементы некоторого векторного пространства над полем $\mathbf{Q}$. Во всяком случае наши обозначения не будут требовать дополнительных разъяснений.

Пример 1. Произвольная группа без кручения ранга 1 неразложима.

Пример 2. Рассмотрим некоторое (конечное или бесконечное) множество $\{q, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ различных простых чисел и для каждого n положим

$$E_n = \langle p_n^{-\infty} e_n \rangle \quad \text{и} \quad G_n = \langle p_n^{-\infty} e_n, q^{-1} e_n \rangle.$$

Тогда подгруппа E_n имеет индекс q в группе G_n. Группу A $[\subseteq \bigoplus_n G_n]$ определим следующим образом:

$$A = \langle \bigoplus_n E_n;\ q^{-1}(e_1 + e_2), \ldots, q^{-1}(e_1 + e_n), \ldots \rangle.$$

Покажем, что группа A неразложима. Допустим, что $A = B \oplus C$. Заметим, что если $n \neq m$, то не существует ненулевых гомоморфизмов группы E_n в группу G_m, так как элементы группы E_n делятся на любую степень числа p_n, а среди элементов группы G_m таким свойством обладает лишь нуль. Таким образом, E_n — вполне характеристические подгруппы группы A и по лемме 9.3 мы получаем $E_n = (E_n \cap B) \oplus$ $\oplus (E_n \cap C)$. В этом разложении одно из слагаемых равно нулю, поскольку группа E_n неразложима как группа ранга 1. Это означает, что либо $E_n \subseteq B$, либо $E_n \subseteq C$. Предположим, что $E_1 \subseteq B$ и $E_n \subseteq C$ для некоторого $n > 1$. Пусть $q^{-1}(e_1 + e_n) = b + c$, где $b \in B$, $c \in C$. Тогда $qb = e_1$ и $qc = e_n$, что невозможно, так как ни один из элементов e_n не делится на q в группе A. Следовательно, все подгруппы E_n содержатся либо в группе B, либо в группе C. А так как $\bigoplus_n E_n$ — существенная подгруппа группы A, то либо $B = 0$, либо $C = 0$.

Пример 3. Предыдущий пример можно модифицировать. Положим

$$A=\langle \bigoplus_n E_n,\ q^{-\infty}(e_1+e_2),\ \ldots,\ q^{-\infty}(e_1+e_n),\ \ldots\rangle.$$

То же доказательство дает неразложимость группы A.

Пример 4. Легко видеть, что группа

$$A=\langle \bigoplus_n E_n,\ q^{-1}(e_1-e_2),\ \ldots,\ q^{-1}(e_n-e_{n+1}),\ \ldots\rangle$$

также неразложима.

В дальнейших построениях неразложимых групп основным понятием будет следующее. Множество $\{G_i\}_{i\in I}$ ненулевых групп без кручения называется *жесткой системой* [см. Фукс [18]], если

$$\operatorname{Hom}(G_i, G_j)\cong\begin{cases}\text{некоторая подгруппа } R\subseteq Q, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Другими словами, для групп из жесткой системы не существует эндоморфизмов, кроме умножений на рациональные числа, и не существует нетривиальных гомоморфизмов из одной группы системы в другую. В частности, среди эндоморфизмов групп из жесткой системы идемпотентами являются лишь нулевые и тождественные эндоморфизмы. Следовательно, группы из жесткой системы должны быть неразложимыми. Группа G называется *жесткой*, если одноэлементное семейство $\{G\}$ образует жесткую систему.

Простейшим примером жесткой системы является семейство групп ранга 1 с несравнимыми типами. Действительно, это сразу следует из предложения 85.4. Мощность континуума служит верхней гранью для мощностей жестких систем групп ранга 1 [см. следствие 85.2]. Более того, имеет место

Лемма 88.2. *Существует жесткая система $\{A_i\}_{i\in I}$ групп ранга* 1, *где* $|I|=2^{\aleph_0}$.

Пусть $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n, \ldots$ — различные простые числа. Рассмотрим всевозможные множества $S_i=\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$, где для каждого n либо $r_n=p_n$, либо $r_n=q_n$. Очевидно, что i пробегает множество индексов I мощности $2^{\aleph_0}$ и никакое множество S_i не содержит множества S_j, если $i\neq j$. Для каждого S_i определим группу A_i как рациональную группу типа $\mathbf{t}_i=(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, где $k_n=\infty$, если n-е простое число принадлежит множеству S_i, и $k_n=0$ в противном случае. Типы $\mathbf{t}_i$ попарно несравнимы, следовательно, $\{A_i\}$ — жесткая система. ■

Следующая лемма играет существенную роль при доказательстве неразложимости некоторых групп.

Лемма 88.3 (Фукс [18]). *Пусть E_0, E_i $(i\in I)$ — жесткая система групп, и пусть p_i $(i\in I)$ — [не обязательно различные] простые числа,*

причем для каждого $i \in I$ найдутся элементы $u_i \in E_0$ и $v_i \in E_i$, которые не делятся на p_i. Тогда группа

$$A = \langle E_0 \oplus \bigoplus_i E_i;\ p_i^{-1}(u_i + v_i) \text{ для всех } i \in I\rangle$$

неразложима. Это утверждение остается справедливым, если p_i^{-1} заменить на $p_i^{-\infty}$ или на n_i^{-1}, где каждое из целых чисел $n_i > 1$ взаимно просто как с u_i, так и с v_i.

Из условия следует, что E_0, E_i — вполне характеристические подгруппы группы A. Таким образом, если $A = B \oplus C$, то $E_i = (E_i \cap B) \oplus \oplus (E_i \cap C)$, где $i \in I$ или $i = 0$. Так как E_0, E_i — неразложимые группы, то мы получаем, что каждая из них целиком содержится либо в группе B, либо в группе C. Пусть $E_0 \subseteq B$ и $E_j \subseteq C$ для некоторого $j \in I$. Тогда $p_j^{-1}(u_j + v_j) = b + c$ для некоторых $b \in B$, $c \in C$ и оба элемента u_j, v_j делятся на p_j в группе A. Отсюда сразу следует, что элементы u_j, v_j делятся на p_j в подгруппе $E_0 \oplus \bigoplus_i E_i$. Последнее невозможно, следовательно, все подгруппы E_0, E_i лежат в одном и том же слагаемом группы А и, таким образом, A — неразложимая группа. ∎

С помощью лемм 88.2 и 88.3 легко строятся неразложимые группы произвольного ранга $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Для этого достаточно выбрать жесткую систему, как это делалось в доказательстве леммы 88.2, потребовав к тому же, чтобы фиксированное простое число p не встречалось среди p_n, q_n. Далее, в качестве групп E_0, E_i из леммы 88.3 можно взять группы A_i из доказательства леммы 88.2 и, кроме того, положить $p_i = p$ для всех $i \in I$.

Построение однородных неразложимых групп ранга $\mathfrak{m} \geqslant 2$ не может, очевидно, опираться на лемму 88.3. Следует, однако, заметить, что с помощью теоремы 88.1 такие группы могут быть построены. Приведем конкретные примеры.

Пример 5. Пусть G — вполне разложимая однородная группа конечного ранга $r \geqslant 2$ и типа $(0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$, где символ ∞ стоит на месте, соответствующем простому числу p. Итак, мы можем записать

$$G = Q^{(p)}a_1 \oplus \ldots \oplus Q^{(p)}a_r.$$

Выберем $r - 1$ алгебраически независимых [над полем $\mathbf{Q}$] p-адических единиц $\pi_2, \ldots, \pi_r$, и положим $\pi_1 = 1$. Для $n = 1, 2, \ldots$ полагаем

$$x_n = p^{-n}(a_1 + \pi_{2n}a_2 + \ldots + \pi_{rn}a_r) \in G, \tag{1}$$

где $\pi_{in} = s_{i0} + s_{i1}p + \ldots + s_{i,\,n-1}p^{n-1}$ есть $(n-1)$-я частичная сумма канонического представления

$$\pi_i = s_{i0} + s_{i1}p + \ldots + s_{in}p^n + \ldots \quad (0 \leqslant s_{in} < p).$$

Подгруппу A группы G определим как

$$A = \langle a_1, \ldots, a_r, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle.$$

Она имеет ранг r. Мы покажем, что A — жесткая группа. Прежде всего заметим, что для каждого n имеет место $px_{n+1} = x_n + s_{2n}a_2 + \ldots + s_{rn}a_r$. Отсюда следует, что элементы из разности $A \setminus A_0$, где $A_0 = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$, имеют вид $kx_n + k_2a_2 + \ldots + k_ra_r$, где $k, k_2, \ldots, k_r$ — некоторые целые числа, причем $p \nmid k$, а n — некоторый номер. Более того, пусть

$$p^m (kx_n + k_2a_2 + \ldots + k_ra_r) = l_2a_2 + \ldots + l_ra_r \quad (l_i \in \mathbf{Z}).$$

Подставляя в это равенство выражение x_n через (1), получим, что коэффициент при a_1 должен равняться нулю. Следовательно, $k = 0$ и подгруппа $\langle a_2, \ldots, a_r \rangle$ является [p-сервантной и, значит,] сервантной в группе A. Группа A однородна и имеет тип $(0, \ldots, 0, \ldots)$. Действительно, допустим, что для всех n имеет место $p^{-n} (k_1 a_1 + \ldots + k_ra_r) \in A$. Тогда

$$p^{-n} (k_1a_1 + \ldots + k_ra_r - k_1p^nx_n) \in A.$$

Подставляя вместо x_n выражение (1) и учитывая сервантность подгруппы $\langle a_2, \ldots, a_r \rangle$ в группе A, получим, что $p^n \mid k_i - k_1\pi_{in}$ для всех n. Это означает, что последовательность $\{k_i - k_1\pi_{in}\}_n$ есть 0-последовательность, т. е. $k_i = k_1\pi_i$, где $i = 2, \ldots, r$. Таким образом, π_i — рациональные числа, что противоречит их алгебраической независимости.

Докажем, наконец, что A — жесткая группа. Пусть $\eta \neq 0$ — эндоморфизм группы A. Не теряя общности, можно считать, что эндоморфизм η переводит подгруппу A_0 в себя [иначе заменим η некоторым $m\eta \neq 0$]. Эндоморфизм η полностью определяется своими значениями на элементах a_i. Пусть

$$\eta\colon a_i \mapsto \sum_{j=1}^{r} t_{ij}a_j \quad (t_{ij} \in \mathbf{Z}).$$

Тогда

$$\eta x_n = p^{-n} \sum_i \pi_{in}\eta a_i = p^{-n} \sum_j \Big(\sum_i \pi_{in}t_{ij}\Big) a_j = \\ = k_nx_n + l_{2n}a_2 + \ldots + l_{rn}a_r$$

для некоторых целых чисел $k_n, l_{2n}, \ldots, l_{rn}$. Мы получаем

$$\sum_{i=1}^{r} \pi_{in}t_{i1} = k_n$$

и

$$p^{-n} \sum_{j=2}^{r} \Big[\sum_{i=1}^{r} \pi_{in}t_{ij} - k_n\pi_{jn}\Big] a_j \in \langle a_2, \ldots, a_r \rangle.$$

При этом коэффициенты в квадратных скобках делятся на p^n. При $n \to \infty$ для каждого $j = 2, \ldots, r$ имеем равенство

$$\sum_{i=1}^{r} \pi_i t_{ij} - \varkappa \pi_j = 0, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{r} \pi_i t_{i1} = \varkappa.$$

В силу алгебраической независимости p-адических чисел π_i отсюда следует, что $t_{jj} = t_{11}$, в то время как $t_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Эндоморфизм η действует, таким образом, как умножение на целое число t_{11}, и $\mathbf{Z}$ является кольцом эндоморфизмов группы A.

Пусть $\pi_2, \ldots, \pi_r, \pi'_2, \ldots, \pi'_s$ — алгебраически независимые p-адические единицы. Построим группу A, как это делалось выше, и аналогично построим группу A', используя $\pi'_1 = 1, \pi'_2, \ldots, \pi'_s$. Произвольный гомоморфизм η: $A \to A'$ должен быть нулевым — в этом можно убедиться, дословно повторив предыдущие рассуждения. Заметим, что множество алгебраически независимых p-адических единиц имеет мощность континуума. Мы можем, таким образом, построить жесткую систему однородных групп типа $(0, \ldots, 0, \ldots)$, имеющих конечные ранги $r \geqslant 2$, причем мощность этой системы будет $2^{\aleph_0}$. Этот результат выделим как теорему.

Теорема 88.4. *Существует жесткая система* $\{A_i\}_{i \in I}$ *групп* A_i, *имеющих всевозможные конечные ранги* $r \geqslant 2$ *и являющихся однородными группами типа* $(0, \ldots, 0, \ldots)$. *При этом* $|I| = 2^{\aleph_0}$. ∎

Следующее свойство значительно сильнее неразложимости. Группу A назовем *сервантно неразложимой*, если всякая сервантная подгруппа группы A неразложима. Теорема 88.1 показывает, что сервантные подгруппы группы целых p-адических чисел сервантно неразложимы. Следующая теорема дает достаточно полную информацию о сервантно неразложимых группах.

Теорема 88.5 (Гриффит [1]). *Всякая редуцированная сервантно неразложимая группа без кручения изоморфна некоторой подгруппе группы* $J = \prod_p J_p$. *В частности, мощность ее не превосходит мощности континуума.*

Пусть A — редуцированная сервантно неразложимая группа без кручения и $a \neq 0$ — элемент из A. Группа A хаусдорфова в своей Z-адической топологии. Следовательно, группу A можно рассматривать как сервантную подгруппу ее Z-адического пополнения $\hat{A}$ [см. § 39]. В силу предложения 40.1 можно записать $\hat{A} = \prod_p \hat{A}_p$, где каждый сомножитель $\hat{A}_p$ — модуль над кольцом целых p-адических чисел. Соответственно $a = (\ldots, a_p, \ldots)$, где $a_p \in \hat{A}_p$. Если $a_p \neq 0$, то элемент a_p содержится в некотором сервантном Q_p^*-подмодуле $C_p \cong J_p$ модуля $\hat{A}_p$. В силу алгебраической компактности подмодуль C_p слу-

жит для $\hat{A}_p$ прямым слагаемым. Можно, таким образом, считать, что элемент a содержится в слагаемом $C = \prod_p C_p$ группы $\hat{A}$ [где $C_p = 0$, если $a_p = 0$]. Пусть $\hat{A} = C \oplus D$. Так как подгруппа $A \cap C$ сервантна в группе C, а подгруппа $A \cap D$ — в группе D, то подгруппа $G = (A \cap C) \oplus (A \cap D)$ сервантна в группе $\hat{A}$ и, значит, в группе A. По условию G — неразложимая группа и в силу $0 \neq a \in C \cap A$ мы получаем, что $D \cap A = 0$. Таким образом, проекция $\hat{A} \to C$ изоморфно отображает группу A на некоторую подгруппу группы $C = \prod_p C_p$. А группа C изоморфна некоторому прямому слагаемому группы J. ∎

Упражнения.

1 (а) (Боньяр [1]). Показать, что если $p_1, \ldots, p_n$ — различные нечетные простые числа, то группа

$$\left\langle p_1^{-\infty}a_1, \ldots, p_n^{-\infty}a_n; \frac{1}{2}(a_1+a_2), \frac{1}{2}(a_1+a_3), \ldots, \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)\right\rangle$$

неразложима.

(б) Это неверно, если одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$ заменить на 2.

2 (де Гроот [2]). Если $p, p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа, то группа

$$\langle p_1^{-\infty}a_1, \ldots, p_n^{-\infty}a_n, p^{-1}(a_1 + \ldots + a_n)\rangle$$

неразложима.

3. Пусть p, q, r — различные простые числа $\geqslant 5$. Доказать, что группа

$$A = \langle p^{-\infty}a, p^{-\infty}q^{-\infty}b, r^{-\infty}c, 2^{-1}(b+c), 3^{-1}(a+c)\rangle$$

неразложима. [*Указание*: в нетривиальном разложении одним из слагаемых должна быть подгруппа $\langle b, c\rangle_*$; сравнить координаты элементов a и $3^{-1}(a+c)$.]

4. Существует $2^{\aleph_0}$ попарно неизоморфных неразложимых групп ранга $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Сколько таких групп имеет конечный [или счетный] ранг?

5. (а) Группа A из примера 5 останется неразложимой, если ее тензорно умножить на произвольную группу R ранга 1 со свойством $pR \neq R$.

(б) Доказать, что для любого типа $\mathbf{t} \neq (\infty, \ldots, \infty, \ldots)$ и любого конечного $r \geqslant 2$ существует неразложимая однородная группа типа $\mathbf{t}$ и ранга r.

6. (а) Если подгруппа группы A из примера 5 имеет ранг, не превосходящий $r - 1$, то она свободна.

(б) Для любой сервантной подгруппы C этой же группы A из того, что $r(C) = r - 1$, следует, что $A/C \cong Q^{(p)}$.

7. (а) (Фукс и Лунстра [2]). Существует группа без кручения G ранга 2, обладающая следующими свойствами:

(1) всякая подгруппа ранга 1 группы G является циклической;

(2) всякая факторгруппа группы G, являющаяся группой без кручения ранга 1, делима;

(3) кольцо эндоморфизмов группы G изоморфно $\mathbf{Z}$.

Показать, что для любого n имеет место $G/nG \cong Z(n)$. [*Указание*: видоизменить пример 5.]

(б) * Доказать, что для каждого $r \geqslant 2$ существует группа G ранга $2r$, удовлетворяющая таким условиям:

(1′) подгруппы группы G, имеющие ранг, не превосходящий r, свободны.

(2′) факторгруппа группы G, являющаяся группой без кручения ранга, не превосходящего r, делима.

(3′) утверждение (3) предыдущего пункта.

8 (Корнер). Для данного целого $n \geqslant 2$ существует группа без кручения A ранга n со следующими свойствами:

(1) все подгруппы группы A, имеющие ранг $n - 1$, свободны;

(2) все факторгруппы группы A, имеющие ранг 1, делимы;

(3) кольцо эндоморфизмов группы A изоморфно $\mathbf{Z}$ ∎.

9 (Прохазка [2]). Найти такую группу без кручения A ранга 2, что для любой ее циклической подгруппы C группа A/C является смешанной и не расщепляется.

10. Пусть редуцированная группа $A = B \oplus C$ содержит подгруппу $G \cong J_p$. Тогда либо $G \subseteq B$, либо $G \cap B = 0$. [*Указание*: подгруппа $G \cap B$ сервантна в группе G, откуда при $G \cap B \neq 0$ следует, что $G / (G \cap B)$—делимая группа.]

11. Пусть A — группа без кручения со следующими свойствами: для каждого простого числа p имеет место $|A/pA| \leqslant p$ и группа A не содержит ни одной подгруппы, которая была бы p-делимой для бесконечного множества простых чисел p. Доказать, что A сервантно неразложима. [*Указание*: используя доказательство теоремы 35.2, показать, что $|G/pG| \leqslant p$ для всякой сервантной подгруппы G.]

12. Привести пример сервантно неразложимой группы, которая не изоморфна никакой сервантной подгруппе группы $J = \prod_p J_p$.

13 (де Гроот [2]). (а) Группа без кручения A сервантно неразложима, если любые два независимых элемента из A имеют несравнимые типы.

(б) Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbf{Q}$ с базисом $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Линейные комбинации вида $b = k_1 a_{n_1} + \ldots + k_r a_{n_r}$, где $n_1 < \ldots < n_r$, целые числа k_i отличны от нуля, $k_1 > 0$ и $(k_1, \ldots, k_r) = 1$, упорядочим в последовательность $\{b_j\}$. Припишем члену b_j этой последовательности характеристику $(0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$, где символ ∞ стоит только на j-м месте, и построим таким образом подгруппу A в V. Доказать, что группа A сервантно неразложима.

14. (а) С помощью леммы 88.2 и упражнения 13 (б) получить группы A вплоть до мощности континуума, в которых любые две изоморфные сервантные подгруппы совпадают.

(б) Показать, что группа мощности $\mathfrak{m} > 2^{\aleph_0}$ не может обладать свойством, указанным в п. (а).

15. (Гриффит [1]). Показать, что существует $2^{2^{\aleph_0}}$ неизоморфных сервантно неразложимых групп. [*Указание*: упр. 14 (а)].

16* (Гриффит [1]). Пусть A — такая редуцированная группа без кручения, что ее p-базисные подгруппы изоморфны либо Z, либо 0. Тогда группа A сервантно неразложима в том и только в том случае, когда ненулевые эндоморфизмы сервантных подгрупп группы A являются мономорфизмами. [*Указание*: $\hat{A}$ — прямое слагаемое группы J.]

17 (Д. Дюбуа [1]). Группу без кручения A назовем *связной*, если для всякой ненулевой сервантной подгруппы G группы A факторгруппа A/G делима. Доказать:

(а) сервантные подгруппы группы целых p-адических чисел связны;

(б) редуцированная связная группа сервантно неразложима;

(в) группа A связна в том и только в том случае, когда для любого простого числа p группа A либо p-делима, либо изоморфна некоторой p-сервантной подгруппе группы J_p. [*Указание*: если $pA \neq A$, то существует нетривиальный гомоморфизм $A \to J_p$, который должен быть мономорфизмом; p-базисные подгруппы группы A должны быть циклическими.]

§ 89. Большие неразложимые группы

Проблема построения неразложимых групп больших мощностей — предмет исследования настоящего параграфа. Построение опирается на трансфинитную индукцию. Идея построения восходит к работе Фукса [18]; теоретико-множественное обоснование было проведено Корнером [8]. Конструкция возможна только для кардинальных чисел, меньших первого сильно недостижимого кардинального числа. Кардинальное число $\mathfrak{m}^* > \aleph_0$ называется *сильно недостижимым*, если:

а) $\sum_{i \in I} \mathfrak{m}_i < \mathfrak{m}^*$, как только $\mathfrak{m}_i < \mathfrak{m}^*$ для всех $i \in I$ и мощность множества индексов I меньше, чем $\mathfrak{m}^*$.

б) $2^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{m}^*$ для всякого кардинального числа $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}^*$.

Сильно недостижимые кардинальные числа необычайно велики, их существование не зависит, по-видимому, от стандартных аксиом теории множеств. В теоремах, касающихся сильно недостижимых кардинальных чисел, иногда постулируются дополнительные аксиомы.

Для построения больших неразложимых групп нам понадобится один результат из теории множеств. Пусть $\tau > 1$ — порядковое число. *Регрессивной функцией* для τ назовем функцию f_τ на множестве $W^*(\tau)$ ненулевых порядковых чисел, меньших τ, со значениями в мно-

жестве $W(\tau)$ всех порядковых чисел, меньших τ, обладающую таким свойством:

$$f_\tau(\sigma) < \sigma \quad \text{для любого} \quad \sigma \in W^*(\tau).$$

Докажем следующую лемму о регрессивных функциях.

Лемма 89.1 (Корнер [8]). *Пусть τ — такое порядковое число, что $\aleph_\tau$ меньше первого сильно недостижимого кардинального числа. Тогда для τ существует регрессивная функция f_τ, удовлетворяющая условию*

$$|f_\tau^{-1}(\sigma)| \leqslant 2^{\aleph_\sigma} \quad \textit{для всех} \quad \sigma \in W(\tau). \qquad (1)$$

Доказательство проведем с помощью трансфинитной индукции. Если $\tau < \omega_1$, то $|\tau| \leqslant \aleph_0$, и функция f_τ, где $f_\tau(\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in W^*(\tau)$, очевидно, удовлетворяет неравенству (1). Таким образом, в дальнейшем мы предполагаем, что $\tau \geqslant \omega_1$ и для каждого порядкового числа $\rho < \tau$ существует регрессивная функция f_ρ, удовлетворяющая (1).

Случай 1. Число τ не является предельным. Пусть $\tau = \rho + 1$ для некоторого порядкового числа ρ. Тогда мы можем положить $f_\tau(\sigma) = f_\rho(\sigma)$ при $0 < \sigma < \rho$ и $f_\tau(\rho) = 0$. Полученная функция f_τ — регрессивная функция для τ требуемого рода.

Для предельных порядковых чисел мы различаем два подслучая в соответствии с тем, сингулярно ли τ [т. е. существует ли возрастающая последовательность порядковых чисел σ_α ($\alpha < \rho$), где ρ — некоторое порядковое число, меньшее τ, для которой $\lim\limits_{\alpha<\rho} \sigma_\alpha = \tau$] или регулярно [т. е. не сингулярно].

Случай 2. τ — регулярное предельное число. По условию $\aleph_\tau$ не является сильно недостижимым кардинальным числом. Поскольку условие а) выполняется для $\mathfrak{m}^* = \aleph_\tau$, должно существовать такое порядковое число $\rho < \tau$, что $\aleph_\tau \leqslant 2^{\aleph_\rho}$. Так как $\rho + 1 < \tau$, то по предположению индукции существует регрессивная функция $f_{\rho+1}$, удовлетворяющая неравенству (1). И чтобы получить регрессивную функцию f_τ для τ, мы можем положить

$$f_\tau(\sigma) = f_{\rho+1}(\sigma) \quad \text{при} \quad 0 < \sigma \leqslant \rho$$

и

$$f_\tau(\sigma) = \rho \quad \text{при} \quad \rho < \sigma < \tau.$$

Функция f_τ, очевидно, удовлетворяет (1).

Случай 3. τ — сингулярное предельное число. Выберем последовательность σ_α, как указано выше, и предположим, что $0 < \sigma_0 < \ldots \ldots < \sigma_\alpha < \sigma_{\alpha+1} < \ldots$. В этом случае множество $W(\tau)$ является теоретико-множественным объединением попарно непересекающихся множеств $W(\sigma_0)$, $W(\sigma_1) \setminus W(\sigma_0)$, ..., $W(\sigma_{\alpha+1}) \setminus W(\sigma_\alpha)$, ... Каждое из этих множеств вполне упорядочено и, значит, множество $W(\sigma_{\alpha+1}) \setminus W(\sigma_\alpha)$ изоморфно (как упорядоченное множество) множеству $W(\rho_\alpha)$ для некоторого порядкового числа $\rho_\alpha \leqslant \sigma_{\alpha+1}$. Следовательно,

по функции f_{ρ_α} мы можем, очевидным образом, построить регрессивную функцию g_{ρ_α} на множестве $W(\sigma_{\alpha+1}) \setminus W(\sigma_\alpha)$. Используя функцию g_{ρ_α}, а также функцию f_ρ, положим

$$f_\tau(\sigma) = \begin{cases} g_{\rho_\alpha}(\sigma), & \text{если} \quad \sigma_\alpha < \sigma < \sigma_{\alpha+1}, \\ \sigma_{f_\rho(\alpha)}, & \text{если} \quad \sigma = \sigma_\alpha. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что функции g_{ρ_α}, а также функция f_ρ удовлетворяют неравенству (1). Значит, и функция f_τ удовлетворяет этому неравенству. ■

Теперь мы в состоянии доказать основной результат о неразложимых группах больших мощностей.

Теорема 89.2. *Для любого бесконечного кардинального числа* $\mathfrak{m}$, *меньшего первого сильно недостижимого кардинального числа, существует жесткая система, состоящая из* $2^{\mathfrak{m}}$ *групп, каждая из которых имеет мощность* $\mathfrak{m}$ ■.

В силу леммы 88.2 наше утверждение верно для случая $\mathfrak{m} = \aleph_0$. Таким образом, можно считать, что $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_1$. Пусть $P(\mathfrak{m})$ обозначает систему групп $\{B_i\}_{i \in I}$, обладающую следующими свойствами:

1) $|B_i| = \mathfrak{m}$ для каждого $i \in I$;

2) $|I| = 2^{\mathfrak{m}}$;

3) для каждого $i \in I$ выделены элемент $b_i \in B_i \setminus 2B_i$ и сервантная подгруппа $\overline{B}_i \subset B_i$, причем подгруппа, порожденная в B_i подгруппами $B_i(\mathbf{t}_0)$ [где $\mathbf{t}_0 = (\infty, 0, \ldots, 0, \ldots)$], $\langle b_i \rangle$ и $\overline{B}_i$, является их прямой суммой; кроме того, $|\overline{B}_i / 2\overline{B}_i| = \mathfrak{m}$;

4) для групп $B_i^* = \langle B_i, 2^{-\infty} b_i, 2^{-\infty}\overline{B}_i \rangle$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(B_i, B_j^*) \cong \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \text{подгруппа группы } Q & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Трансфинитной индукцией по индексу τ, где $\mathfrak{m} = \aleph_\tau$, мы установим существование такой системы $P(\mathfrak{m})$ для каждого кардинального числа $\mathfrak{m}$ ($\geqslant \aleph_1$), меньшего первого сильно недостижимого кардинального числа. Этого будет достаточно, поскольку $P(\mathfrak{m})$, очевидно, является жесткой системой.

1°. Первый шаг состоит в построении системы $P(\mathfrak{m})$ для $\mathfrak{m} = \aleph_1$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 88.2, легко построить такую жесткую систему групп A_k ранга 1, что $2A_k \neq A_k \neq 3A_k$, где k пробегает множество индексов K мощности $\aleph_1$. Образуем подмножества K_i ($i \in I$) множества K, подчиняющиеся следующим условиям:

(α) $|K_i| = \aleph_1$;

(β) $|I| = 2^{\aleph_1}$;

(γ) некоторый фиксированный, но произвольно выбранный индекс k_0 принадлежит всем подмножествам K_i;

(δ) $K_i \subseteq K_j$ влечет за собой $i = j$.

Это легко можно сделать с помощью стандартных теоретико-множественных рассуждений. Для каждого $k \in K$ выберем $a_k \in A_k \setminus 3A_k$, а для каждого $i \in I$ положим

$$B_i = \langle \bigoplus_{k \in K_i} A_k, \quad 3^{-\infty}(a_{k_0} + a_k) \quad \text{при всех} \quad k \neq k_0 \quad \text{из} \quad K_i \rangle.$$

Тогда $|B_i/2B_i| = \aleph_1$ и, значит, можно выбрать b_i и $\overline{B}_i$ так, как это требуется в условии 3). Покажем теперь, что система $\{B_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет также и условию 4). Пусть дан гомоморфизм η: $B_i \to B_j^*$. Если $i \neq j$, то найдется индекс k_1, лежащий в K_i, но не в K_j. Поскольку группа B_j^* не содержит ненулевых элементов типа $\mathbf{t} \geqslant \mathbf{t}(A_{k_1})$, обязательно имеем $\eta A_{k_1} = 0$. Но в этом случае элемент $\eta(a_{k_0} + a_{k_1}) = \eta a_{k_0}$ имеет тип $\mathbf{t} \geqslant \mathbf{t}(A_{k_0})$ и в то же время делится на любые степени числа 3, а значит, он равен нулю: $\eta a_{k_0} = 0$. Аналогичным образом теперь легко получить, что $\eta a_k = 0$ для всех $k \in K_i$. Это означает, что гомоморфизм η принимает нулевые значения на максимальной независимой системе группы B_i, следовательно, $\eta = 0$. Пусть теперь $i = j$. Поскольку A_k — вполне характеристические подгруппы группы B_i, для каждого $k \in K_i$ мы получаем $\eta a_k = r_k a_k$, где r_k — некоторое рациональное число. Так как элемент $\eta(a_{k_0} + a_k) = r_{k_0}(a_{k_0} + a_k) + (r_k - r_{k_0}) a_k$ делится на любые степени числа 3, то элемент $(r_k - r_{k_0}) a_k \in B_i^*$ должен, очевидно, равняться нулю. Следовательно $r_k = r_{k_0}$ — константа, и гомоморфизм η — не что иное как умножение на эту константу.

2°. На втором этапе доказательства мы покажем, как получить систему $P(\mathfrak{n})$ из системы $P(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{n}$ — такое кардинальное число, что $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Пусть $\{B_i\}_{i \in I}$ — система $P(\mathfrak{m})$. Возьмем какой-нибудь индекс $i_0 \in I$ и образуем подмножества I_j множества I, где j пробегает множество J, которые удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (α) — (δ), где $\aleph_1$ нужно заменить на $\mathfrak{n}$. С помощью подмножеств I_j ($j \in J$) определим

$$C_j = \langle \bigoplus_{i \in I_j} B_i, \; 2^{-\infty}(b_{i_0} + b_i) \quad \text{для всех} \quad i \neq i_0 \quad \text{из} \quad I_j \rangle.$$

В соответствии со свойством 3) системы $\{B_i\}$ выберем $c_j \in \overline{B}_{i_0} \setminus 2\overline{B}_{i_0}$, а в качестве $\overline{C}_j$ возьмем прямую сумму подгрупп $\overline{B}_i$ ($i \in I_j$), пропустив при этом $\overline{B}_{i_0}$. Тогда система $\{C_j\}$, очевидно, будет обладать свойствами 1) — 3).

Докажем 4). Пусть дан гомоморфизм η: $C_j \to C_l^* = \langle C_l, \; 2^{-\infty} c_l, \; 2^{-\infty}\overline{C}_l \rangle$. Если $j \neq l$ и $m \in I_j \setminus I_l$, то $\eta B_m \subseteq C_l^* \subseteq \bigoplus_{i \in I_l} B_i^*$. Отсюда в силу свойства 4) системы $\{B_i\}$ следует, что $\eta B_m = 0$. Таким образом, элемент $\eta(b_{i_0} + b_m) = \eta b_{i_0}$ имеет тип $\mathbf{t} \geqslant \mathbf{t}_0$. Очевидно, гомоморфизм η

отображает группу B_{i_0} в группу $B_{i_0}^*$, значит, $\eta b_{i_0}=rb_{i_0}$ для некоторого рационального числа r. Но для типа $\mathfrak{t}$ элемента rb_{i_0} в группе C_l^* неравенство $\mathfrak{t}\geqslant\mathfrak{t}_0$ возможно только в случае, когда $r=0$. Следовательно, $\eta B_{i_0}=0$. Аналогичным образом получаем, что $\eta B_i=0$ для всех $i\in I_j$, т. е. $\eta=0$. Если $j=l$, то на каждой из групп B_i гомоморфизм η должен действовать как умножение на рациональное число r_i, в частности $\eta b_i=r_ib_i$ для всех $i\in I_j$. Так как $\eta(b_{i_0}+b_i)=$ $=r_{i_0}(b_{i_0}+b_i)+(r_i-r_{i_0})b_i$, то элемент $(r_i-r_{i_0})b_i$ имеет тип $\mathfrak{t}'\geqslant\mathfrak{t}_0$, откуда следует, что $r_i=r_{i_0}$. Таким образом гомоморфизм η действует как умножение на число r_{i_0}.

3°. Заключительным и наиболее трудным этапом доказательства является построение системы $P(\mathfrak{m})$ для предельного кардинального числа $\mathfrak{m}$. Допустим, что $\mathfrak{m}=\aleph_\tau$ и для каждого $\sigma<\tau$ мы уже построили систему $P(\aleph_\sigma)$ групп B_i^σ, обладающую свойствами 1) — 4). Более того, мы можем считать, что группы $B_j^{\sigma+1}$ из системы $P(\aleph_{\sigma+1})$ построены с помощью групп B_i^σ, как показано в п. 2° [в частности, $B_i^\sigma\subset B_j^{\sigma+1}$ для индексов i, j, выбранных подходящим образом]. Мы также можем считать, что для предельного порядкового числа $\sigma<\tau$ каждая группа из системы $P(\aleph_\sigma)$ является объединением возрастающей цепочки групп

$$A_k\subset B_i^{(1)}\subset B_j^{(2)}\subset\ldots\subset B_l^\rho\subset\ldots,$$

где $\rho<\sigma$, причем A_k — группа ранга 1, а каждая группа B_l^ρ лежит в системе $P(\aleph_\rho)$.

Группы B_m^τ системы $P(\aleph_\tau)$ будут построены как объединения трансфинитных последовательностей

$$A_k\subset B_i^{(1)}\subset\ldots\subset B_j^\sigma\subset\ldots\ \text{при}\ \sigma<\tau,\tag{2}$$

где группы B_j^σ лежат в системах $P(\aleph_\sigma)$, $\sigma<\tau$. Заметим, что различные последовательности могут давать одну и ту же группу B_m^τ [например, если две последовательности совпадают, начиная с некоторого номера]. Одна и та же группа A_k также по-разному может быть вложена в группу B_m^τ. Если группа A_k рассматривается как подгруппа объединения B_m^τ цепочки (2), то, подчеркивая это, вместо A_k мы можем писать $A_{kij\ldots l\ldots}$.

Прежде всего покажем, как выбирать элемент $b_m^\tau\in B_m^\tau$ и подгруппу $\overline{B}_m^\tau\subset B_m^\tau$, чтобы выполнялось условие 3). Пусть $f_\tau=f$ — регрессивная функция для τ, удовлетворяющая условию (1). Ради удобства мы примем обобщенную гипотезу континуума, т. е. будем считать, что $2^{\aleph_\rho}=\aleph_{\rho+1}$ [однако, как будет отмечено ниже, без этого легко можно обойтись].

Функция f удовлетворяет неравенству $|f^{-1}(\sigma)|\leqslant\aleph_{\sigma+1}$ для каждого $\sigma<\tau$. Следовательно, мы можем определить отображение h_σ множества таких предельных порядковых чисел $\rho\leqslant\tau$, что $f(\rho)=\sigma$, в мно-

жество индексов L мощности $\aleph_{\sigma+1}$, где $h_\sigma(\rho) \neq h_\sigma(\rho')$, если $\rho \neq \rho'$. Базис $\{\tilde{a}_l^{\sigma+1}\}$ группы $\overline{B}_{i_0}^{\sigma+1}/2\overline{B}_{i_0}^{\sigma+1}$ [где $\tilde{a}_l^{\sigma+1} = a_l^{\sigma+1} + 2\overline{B}_{i_0}^{\sigma+1}$] заиндексируем множеством L, причем будем считать, что элемент c_j, где c_j — выбранный в п. 2° элемент, лежит в этом базисе, но ему не приписано никакого индекса. Специально условимся, что для предельных порядковых чисел $\rho < \tau$ элементы $b_j^\rho \in \overline{B}_{i_0}^{\sigma+1}$ выбраны следующим образом: при эпиморфизме $\overline{B}_{i_0}^{\sigma+1} \to \overline{B}_{i_0}^{\sigma+1}/2\overline{B}_{i_0}^{\sigma+1}$ элемент b_j^ρ переходит в некоторый элемент $\tilde{a}_l^{\sigma+1}$, причем порядковое число ρ переводится при отображении h_σ в индекс l. В соответствии с этим правилом выберем также элемент b_m^τ. Наконец, определим подгруппу $\overline{B}_m^\tau$ как объединение цепочки подгрупп $\overline{B}_i^{(1)} \subset \ldots \subset \overline{B}_j^\sigma \subset \ldots$ $(\sigma < \tau)$, отвечающей цепочке (2). При этом мы оговариваем, что $i \neq i_0$, $j \neq j_0, \ldots$, и гарантируем тем самым, что подгруппа $\overline{B}_m^\tau$ имеет нулевое пересечение с подгруппой $B_m^\tau(\mathbf{t}_0)$.

Теперь ясно, что в определении системы $\{B_i\}$ элементы b_i из условия 3) были введены для того, чтобы использовать их для получения последующей системы из предыдущей [см. п. 2°]. Очевидно, подгруппы $\overline{B}_i^\sigma$ с отмеченными индексами $i = i_0$ нужны для того, чтобы с их помощью выбирать элементы b_j^ρ при предельном порядковом числе ρ, в то время как остальные подгруппы $\overline{B}_i^\sigma$ служат для построения подгруппы $\overline{B}_j^\rho$ при бóльших ρ.

Убедимся теперь, что система $\{B_m^\tau\}$, построенная указанным способом, обладает свойствами 1) — 4). Поскольку в цепочке (2) для каждого σ выполняется $|B_j^\sigma| = \aleph_\sigma$, легко видеть, что $|B_m^\tau| = \sum_{\sigma<\tau} \aleph_\sigma = \aleph_\tau$. Таким образом, условие 1) выполнено. Из построения непосредственно следует, что условие 3) также выполняется. Докажем 4). Пусть дан гомоморфизм η: $B_m^\tau \to B_m^{\tau *}$. Очевидно, каждую подгруппу $A_{kij\ldots l\ldots} \subseteq B_m^\tau$ гомоморфизм η отображает либо в нуль, либо на подгруппу группы $B_m^{\tau *}$, изоморфную группе A_k. Если на подгруппе $A_{kij\ldots l\ldots}$ гомоморфизм η нетривиален, то $\eta A_{kij\ldots l\ldots} = A_{k'i'j'\ldots l'\ldots}$ влечет за собой $k = k'$, $i = i'$, $\ldots$, $l = l'$, $\ldots$. Действительно, иначе для первой пары различных индексов $l \neq l'$ мы получили бы нетривиальный гомоморфизм η: $B_l^\tau \to B_{l'}^{\sigma *}$. Противоречие. Таким образом, если $\eta \neq 0$, то $m = n$ и подгруппа $A_{ki\ldots l\ldots}$ отображается при гомоморфизме η в себя. Теперь легко получить, что гомоморфизм η действует как умножение на рациональное число.

Чтобы доказать свойство 2), поступим следующим образом. Сначала разобьем семейство групп A_k $(k \neq k_0)$ на $2^{\aleph_1}$ попарно непересекающихся подсемейств, каждое из которых имеет мощность $2^{\aleph_1}$. Будем рассматривать только такие группы B_l^σ, что их подгруппы A_k $(k \neq k_0)$ лежат в одном и том же подсемействе. Этот процесс повторим для отобранных групп $B_i^{(1)}$. А именно, всякое множество групп $B_i^{(1)}$ $(i \neq i_0)$,

построенных с помощью подгрупп A_k из одного и того же подсемейства, разобьем на $2^{\aleph_2}$ попарно непересекающихся подмножеств, каждое мощности $2^{\aleph_2}$. Для $\sigma \geqslant 2$ построим только такие группы B_l^σ, что их подгруппы $B_i^{(1)}$ $(i \neq i_0)$ лежат в одном и том же подмножестве, и т. д. Пусть группы B_m^τ и B_n^τ таковы, что при некотором порядковом числе $\sigma < \tau$ подгруппа $B_l^{\sigma+1}$ $[\subset B_m^\tau]$ построена с помощью групп B_j^τ, не встречающихся в построении группы B_n^τ. Ясно, что в этом случае группы B_m^τ и B_n^τ не могут быть изоморфными. Строя указанным способом группы из $P(\aleph_\tau)$, мы можем выбирать группы A_k из $2^{\aleph_1}$ попарно непересекающихся подсемейств, затем группы $B_i^{(1)}$ — из $2^{\aleph_2}$ попарно непересекающихся подсемейств, и т. д. Отсюда следует, что существует по крайней мере $\prod\limits_\sigma 2^{\aleph_\sigma} = 2^{\sum \aleph_\sigma} = 2^{\aleph_\tau}$ неизоморфных групп B_m^τ. Поскольку неизомофрных групп мощности $\aleph_\tau$ не может быть больше, чем $2^{\aleph_\tau}$, свойство 2) доказано. ∎

Замечание. В последней части доказательства мы приняли обобщенную гипотезу континуума. Этого легко можно избежать, если от построения системы $P(\mathfrak{n})$ сразу переходить к построению системы $P(2^{\mathfrak{n}})$. При этом рассуждения п. 3° останутся теми же.

С помощью больших жестких систем для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$, меньшего первого сильно недостижимого кардинального числа, можно построить группу без кручения мощности $\mathfrak{m}$, которая имеет $2^{\mathfrak{m}}$ попарно неизоморфных неразложимых прямых слагаемых мощности $\mathfrak{m}$ [см. Фукс [28]].

Упражнения

1. Показать, что в формулировке теоремы 89.2 можно дополнительно потребовать, чтобы кольцо эндоморфизмов каждой из групп B_i было изоморфно $\mathbf{Z}$.

2. Пользуясь рассуждениями, приведенными перед теоремой 88.4, получить систему $P(\aleph_1)$ групп B_i, которые, помимо свойств 1) — 4), являются однородными группами типа (0, . . ., 0, . . .). [*Указание*: строить группы B_i, как в п. 1°, применяя при этом методику примера 5 из § 88, чтобы избавиться от элементов $3^{-\infty}(a_{k_0}+a_k)$.]

3*. Доказать, что теорема 89.2 останется верной, даже если потребовать, чтобы группы B_i были однородными группами типа (0, ..., 0, . . .).

4* (Корнер). Доказать утверждение, аналогичное упр. 3, для любого типа $\mathbf{t} \neq (\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$.

5*. Пусть A_i $(i \in I)$ — жесткая система узких групп [см. § 94]. При этом $2A_i \neq A_i$, $i \in I$. Выберем элементы $a_i \in A_i \setminus 2A_i$, $i \in I$, и положим $A = \left\langle \prod A_i, \ \frac{1}{2}(a_i + a_j) \text{ при } i, j \in I \right\rangle$. Показать, что группа A неразложима. [*Указание*: как прямая сумма групп A_i, так и элементы

$\frac{1}{2}(a_i + a_j)$ лежат в одном и том же слагаемом; применить упр. 8 из § 94.]

6. Пусть g_i $(i \in I)$ — такие элементы неразложимой группы G, что $\{g_i + 2G\}_{i \in I}$ — независимая система элементов группы $G/2G$. Пусть H — такая группа без кручения, что $\operatorname{Hom}(G, H) = 0$, и, кроме того, h_i $(i \in I)$ — такие элементы группы H, что $\{h_i + 2H\}_{i \in I}$ — независимая система элементов группы $H/2H$. Если все ненулевые слагаемые группы $\left\langle H, \frac{1}{2}h_i\,(i \in I)\right\rangle$ имеют ненулевые пересечения с подгруппой $\langle h_i\ (i \in I)\rangle$, то группа

$$A = \left\langle G \oplus H, \quad \frac{1}{2}(g_i + h_i) \quad \text{при всех} \quad i \in I\right\rangle$$

неразложима. [*Указание*: если $A = X \oplus Y$, то группа G лежит в одном из слагаемых, например в X; если при этом в группе A/G элемент $\left(\frac{1}{2}\sum n_i h_i\right) + G$ лежит в Y, то обратить внимание на элемент $\frac{1}{2}\sum n_i (g_i + h_i)$.]

7 (Сонсяда [3]). (а) Пусть группа G, а также множество индексов I из упр. 6 имеют мощность $\mathfrak{m}$. В качестве H возьмем прямое произведение $\mathfrak{m}$ групп, изоморфных подходящей рациональной группе R. Используя упр. 8 из § 94, показать, что группа A будет неразложимой группой мощности $2^{\mathfrak{m}}$.

(б)* С помощью п. (а) и трансфинитной индукции получить неразложимые группы произвольной мощности $\mathfrak{n} \leqslant \aleph_{\omega_1}$.

§ 90. Прямые разложения групп конечного ранга

С точки зрения прямых разложений существование больших неразложимых групп без кручения является главным отличием групп без кручения от периодических групп. Но еще удивительней, быть может, то, что при прямых разложениях абелевых групп без кручения даже в случае групп конечного ранга возможны разнообразные неожиданности. Некоторые из них будут рассмотрены в этом параграфе.

Группа без кручения A конечного ранга может, очевидно, разлагаться в прямую сумму лишь конечного числа неразложимых групп. Возникает вопрос: нет ли в каком-нибудь смысле изоморфизма или единственности разложений группы A на неразложимые слагаемые? В силу доказанных в этом параграфе результатов нашим ответом на этот вопрос будет определенное «нет».

Первый из приводимых ниже результатов показывает, что в таких разложениях даже число прямых слагаемых может быть различным. [В дальнейшем «слагаемое» означает «ненулевое слагаемое».]

Теорема 90.1. *Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ существует группа конечного ранга, обладающая прямыми разложениями как на 2, так и на n неразложимых слагаемых.*

Пусть $p, q, p_1, \ldots, p_{n-1}$ — различные простые числа и $n \geqslant 3$. Положим

$$A = \langle p_1^{-\infty}a_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle p_{n-1}^{-\infty}a_{n-1}\rangle \oplus \langle p_1^{-\infty}b_1, \ldots, p_{n-1}^{-\infty}b_{n-1}, p^{-1}q^{-1}(b_1+b_2), \ldots \\ \ldots, p^{-1}q^{-1}(b_1+b_{n-1})\rangle,$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}$ — независимые элементы. Первые $n-1$ слагаемых группы A имеют ранг 1. Из леммы 88.3 следует неразложимость последнего слагаемого. Пусть s, t — такие целые числа, что $ps - qt = 1$. Возьмем $c_i = pa_i + tb_i$ и $d_i = qa_i + sb_i$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$. Положим

$$C = \langle p_1^{-\infty}c_1, \ldots, p_{n-1}^{-\infty}c_{n-1}, p^{-1}(c_1+c_2), \ldots, p^{-1}(c_1+c_{n-1})\rangle,$$
$$D = \langle p_1^{-\infty}d_1, \ldots, p_{n-1}^{-\infty}d_{n-1}, q^{-1}(d_1+d_2), \ldots, q^{-1}(d_1+d_{n-1})\rangle.$$

Группы C и D являются подгруппами группы A. Очевидно, что они неразложимы. Все образующие группы A лежат в $C \oplus D$, это сразу следует из равенств $a_i = sc_i - td_i$, $b_i = pd_i - qc_i$ и $b_1 + b_i = p(d_1+d_i) - q(c_1+c_i)$. Таким образом, $A = C \oplus D$. ■

Если требовать, чтобы в прямом разложении число неразложимых слагаемых было фиксированным, то изоморфизма все равно не возникает. Это видно из следующего поразительного результата.

Теорема 90.2. (Корнер [1]) *Пусть даны натуральные числа n и k, причем $n \geqslant k$. Существует группа без кручения A ранга n со следующим свойством. Для любого разбиения числа n на k натуральных слагаемых $r_i \geqslant 1$, $n = r_1 + \ldots + r_k$, найдется прямое разложение*

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k,$$

где A_i — неразложимая группа ранга r_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Пусть $p, p_1, \ldots, p_{n-k}, q_1, \ldots, q_{n-k}$ — различные простые числа. Для независимых элементов $u_1, \ldots, u_k, x_1, \ldots, x_{n-k}$ положим

$$A = \langle p^{-\infty}u_1, \ldots, p^{-\infty}u_k, p_1^{-\infty}x_1, \ldots, p_{n-k}^{-\infty}x_{n-k}, \\ q_1^{-1}(u_1+x_1), \ldots, q_{n-k}^{-1}(u_1+x_{n-k}\rangle.$$

Покажем, что группа A обладает указанным свойством. Пусть $n = r_1 + \ldots + r_k$ — разбиение числа n, где $r_i \geqslant 1$. Заметим, что если $s_1, \ldots, s_k$ — такие целые числа, что $s_1 + \ldots + s_k = 1$, то определитель системы

$$\begin{aligned} s_1v_1 + s_2v_2 + \ldots + s_kv_k &= u_1, \\ -v_1 + v_2 \qquad\qquad &= u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -v_1 \qquad\qquad + v_k &= u_k \end{aligned}$$

с неизвестными $v_1, \ldots, v_k$ равен 1. Отсюда следует, что эта система имеет решение $v_1, \ldots, v_k \in A$, причем такое, что $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle =$

$= \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$. Для полученных v_i положим

$$A_i = \langle p^{-\infty} v_i,\ p_j^{-\infty} x_j,\ q_j^{-1}(v_i + x_j) \quad \text{при} \quad j = t_i + 1, \ldots, t_{i+1} \rangle,$$

где $t_1 = 0$ и $t_i = (r_1 - 1) + \ldots + (r_{i-1} - 1)$ для $i = 2, \ldots, k$. В силу равенства

$$u_1 + x_j = (v_i + x_j) + s_1 v_1 + \ldots + s_{i-1} v_{i-1} + (s_i - 1) v_i + \ldots + s_k v_k$$

мы заключаем, что числа $s_1, \ldots, s_k$ выбраны таким образом, что
q_j делит $s_i - 1$ при $j = t_i + 1, \ldots, t_{i+1}$ и
q_j делит s_i при остальных j.
Значит, все группы A_i $(i = 1, \ldots, k)$ лежат в группе A и каждый образующий группы A принадлежит сумме $A_1 + \ldots + A_k$. Отсюда сразу следует, что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, причем по построению $r(A_i) = r_i$. Неразложимость групп A_i следует из леммы 88.3. [Числа s_i могут быть выбраны, например, следующим образом: $s_i = m_{t_i+1} \hat{q}_{t_i+1} + \ldots + m_{t_{i+1}} \hat{q}_{t_{i+1}}$, где $\hat{q}_j = q_1 \ldots q_{j-1} q_{j+1} \ldots q_{n-k}$ и $\sum_j m_j \hat{q}_j = 1$.] ■

Стараясь получить какого-либо рода единственность, мы можем принять дополнительное ограничение и сравнивать лишь разложения на неразложимые слагаемые с одним и тем же распределением рангов. Однако и этого недостаточно для существования изоморфизма:

Теорема 90.3 (Фукс и Лунстра [1]). *Пусть дано произвольное натуральное число $m \geqslant 2$. Существуют две неразложимые группы без кручения A и C, имеющие ранг 2 и такие, что изоморфизм $A \oplus \ldots \oplus A \cong C \oplus \ldots \oplus C$ (n слагаемых) возможен тогда и только тогда, когда m делит n.*

Первая часть предыдущего доказательства дает наводящие соображения для получения искомых групп. Прежде всего возьмем два непересекающихся бесконечных множества P_1 и P_2 простых чисел. При этом предположим, что $p \notin P_1 \cup P_2$, где простое число p будет выбрано впоследствии надлежащим образом. Построим следующие группы ранга 1:

$$X_i = \langle p_1^{-1} x_i \mid p_1 \in P_1 \rangle, \quad Y_i = \langle p_2^{-1} y_i \mid p_2 \in P_2 \rangle \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Имеем $p \nmid x_i$ в группе X_i и $p \nmid y_i$ в группе Y_i, следовательно, группы

$$A_i = \langle X_i \oplus Y_i,\ p^{-1}(x_i + y_i) \rangle \quad (i = 1, \ldots, n)$$

неразложимы. Заметим, что эти группы изоморфны. Возьмем группы $U_i \cong X_i$ и $V_i \cong Y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $u_i \leftrightarrow x_i$, $v_i \leftrightarrow y_i$ $(u_i \in U_i,\ v_i \in V_i)$ при некоторых фиксированных изоморфизмах. Выбрав произвольное $k = 1, \ldots, p - 1$, мы можем построить изоморфные группы

$$C_i = \langle U_i \oplus V_i,\ p^{-1}(u_i + k v_i) \rangle \quad (i = 1, \ldots, n),$$

которые также неразложимы.

Допустим, что существует изоморфизм

$$\varphi: A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \to C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_m.$$

Указанный выбор групп X_i и Y_i гарантирует, что группы $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$ и $Y = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_m$ отображаются при изоморфизме φ на группы $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ и $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ соответственно. Таким образом, имеем

$$\varphi: x_i \mapsto \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j \quad \text{и} \quad y_i \mapsto \sum_{j=1}^{m} s_{ij} v_j. \tag{1}$$

При этом числа r_{ij}, s_{ij} должны быть такими, чтобы матрицы $[r_{ij}]$ и $[s_{ij}]$ были обратимы, т. е.

$$\det [r_{ij}] = \pm 1, \quad \det [s_{ij}] = \pm 1. \tag{2}$$

Элемент, делящийся на p, изоморфизм переводит в элемент с тем же свойством. Следовательно, из

$$\varphi: x_i + y_i \mapsto \sum_{j=1}^{m} r_{ij}(u_j + kv_j) + \sum_{j=1}^{m} (s_{ij} - kr_{ij}) v_j, \tag{3}$$

а также из независимости элементов v_j получаем

$$s_{ij} \equiv kr_{ij} \pmod p \quad \text{для всех } i, j. \tag{4}$$

С другой стороны, соотношения (4) вместе с равенствами (2) показывают, что изоморфизм $\varphi: A \to C$ полностью определяется соотношениями (1) [а именно, если $p \mid x_i + y_i$ в группе A для всех i, то $p \mid u_j + kv_j$ в группе C для всех j, и обратно].

Наша цель состоит в таком выборе матриц $[r_{ij}]$, $[s_{ij}]$ и целого числа k, чтобы изоморфизм $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \cong C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$ имел место при $n = m$ и не имел места при $m \nmid n$. С помощью соотношений (2) и (4) мы получаем, что p делит $k^m + 1$ или $k^m - 1$. Во избежание изоморфизма при $n < m$ выберем k таким образом, чтобы выполнялись условия

$$k^m \equiv -1 \pmod p, \quad \text{но} \quad k^n \not\equiv \pm 1 \pmod p$$
$$\text{для} \quad n = 1, \ldots, m-1. \tag{5}$$

[Мы опускаем случай, когда $k^m \equiv 1 \pmod p$, так как это возможно лишь для нечетных m, если учесть второе из условий (5).] Подобрав p, найдем k, удовлетворяющее условиям (5). Пусть p — такое простое число, что $2m \mid p - 1$. Согласно теореме Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях, простое число с таким свойством существует. Пусть t — представитель первообразного корня по модулю p. Тогда $k = t^{\frac{p-1}{2m}}$ удовлетворяет условиям (5). Заметим, что в силу (5) условие $k^n \equiv \pm 1 \pmod p$ выполняется тогда и только тогда, когда m делит n.

С помощью полученного k построим матрицы $[r_{ij}]$ и $[s_{ij}]$ следующим образом. Поскольку $k^m \equiv -1 \pmod p$, определители в соотношениях (2) должны иметь разные знаки. Пусть l — такое целое число, что $kl \equiv 1 \pmod p$. Определим $[r_{ij}]$ как нижнюю треугольную $m \times m$-матрицу

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ l & 1 & & & & & & & \\ 0 & l & 1 & & & & & & \\ l & 1 & l & 1 & & & & & \\ 0 & l & 1 & l & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & l & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & l & 1 & l & -1 \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали стоят единицы, за исключением правого нижнего угла, под диагональю в первом столбце стоят по очереди l и 0, а в остальных столбцах под диагональю l и 1. Таким образом, $\det [r_{ij}] = -1$. Чтобы получить матрицу, определитель которой равен 1, мы в соответствии с условием (4) умножаем полученную матрицу $[r_{ij}]$ на число k и все элементы заменяем на сравнимые с ними по модулю p:

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} k & & & & & & & & & k' \\ 1 & k & & & & & & & & \\ 0 & 1 & k & & & & & & & \\ 1 & k & 1 & k & & & & & & \\ 0 & 1 & k & 1 & k & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k & 1 & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & k & 1-k \end{bmatrix}.$$

Матрицу $[s_{ij}]$ мы получили из матрицы $[r_{ij}]$, заменив везде 1 на k и l на 1 и поместив $k' = (-1)^{m+1} (k^m + 1)$ в правый верхний угол. Итак, числа r_{ij}, s_{ij} и k могут быть выбраны таким образом, что выполняются условия (2), (4) и (5), следовательно, группы A и C обладают требуемым свойством. ∎

Последняя попытка получить единственность связана со свойством сокращения. Будем говорить, что группа B обладает *свойством сокращения*, если для любых групп H и K из изоморфизма $B \oplus H \cong B \oplus K$ следует изоморфизм $H \cong K$. Данному определению эквивалентно следующее. Для любых групп H и K из равенства $B \oplus H = C \oplus K$ при условии $B \cong C$ следует изоморфизм $H \cong K$. Следующий результат показывает, что даже группы ранга 1 не обязаны обладать свойством сокращения.

Теорема 90.4 (Фукс и Лунстра [1]). *Пусть $m \geqslant 2$ — натуральное число. Существует группа без кручения A ранга 3, обладающая прямыми*

разложениями

$$A = B_i \oplus C_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $B_1, \ldots, B_m$ — *изоморфные группы ранга* 1, *а* $C_1, \ldots, C_m$ — *попарно неизоморфные неразложимые группы ранга* 2.

Так же как в доказательстве теоремы 90.3, начнем с того, что возьмем непересекающиеся бесконечные множества P_1 и P_2 простых чисел и простое число p, не лежащее ни в одном из этих множеств. Положим

$$B_1 = \langle p_1^{-1}b \mid p_1 \in P_1 \rangle, \quad X = \langle p_1^{-1}x \mid p_1 \in P_1 \rangle, \quad Y = \langle p_2^{-1}y \mid p_2 \in P_2 \rangle.$$

Тогда $C_1 = \langle X \oplus Y,\ p^{-1}(x + y) \rangle$ будет неразложимой группой ранга 2. Положим

$$A = B_1 \oplus C_1.$$

Пусть q_i, r_i, s_i, t_i — такие целые числа, что $q_i t_i - r_i s_i = 1$; положим

$$b_i = q_i b + s_i x, \quad x_i = r_i b + t_i x \quad (i = 2, \ldots, m).$$

Тогда для сервантных подгрупп $B_i = \langle b_i \rangle_*$ и $X_i = \langle x_i \rangle_*$, изоморфных группе B_1, имеет место $B_i \oplus X_i = B_1 \oplus X$. Мы хотим выбрать такие подгруппы B_i и X_i, чтобы для некоторых целых чисел k_i $(1 < k_i < p)$ имели место равенства

$$A = B_i \oplus C_i, \quad C_i = \langle X_i \oplus Y,\ p^{-1}(k_i x_i + y) \rangle, \tag{6}$$

где C_i — неразложимая группа. В этом случае элемент

$$k_i x_i + y = k_i r_i b + (k_i t_i - 1)\, x + (x + y)$$

должен делиться на p, следовательно, выполняются условия

$$p \mid k_i r_i \quad \text{и} \quad p \mid k_i t_i - 1. \tag{7}$$

При данных k_i, где $1 < k_i < p$, мы можем взять числа $r_i = p$, $q_i = k_i$, а затем числа s_i, t_i, для которых $q_i t_i - r_i s_i = 1$. Тогда имеют место условия (7), а значит, и равенства (6).

Теперь мы позаботимся о том, чтобы группы C_i были попарно неизоморфными. Заметим что изоморфизм $\varphi\colon C_i \to C_j$ должен отображать подгруппу X_i на подгруппу X_j, а подгруппу Y — на себя, причем $x_i \mapsto \pm x_j$ и $y \mapsto \pm y$ [единственными автоморфизмами групп X_i и Y являются умножения на ± 1]. Следовательно, элемент $k_i x_i + y$ переходит в элемент $\pm(k_i x_j \pm y)$. Благодаря сохранению делимости $k_j \equiv \pm k_i \pmod p$. Итак, если взять $[k_1 = 1]$, $k_2 = 2, \ldots, k_m = m$ и $p > 2m - 1$, то $k_j \not\equiv \pm k_i \pmod p$, и, значит, никакие две из групп $C_1, \ldots, C_m$ не являются изоморфными. ∎

Заметим, что теорема 90.4 показывает также следующее. *Для любого ранга* $r \geqslant 3$ *и любого натурального числа* m *существует группа без кручения ранга* r, *имеющая по крайней мере* m *попарно неизоморфных разложений на неразложимые слагаемые*. Возникает естественный вопрос, существуют ли группы конечного ранга с бесконечным числом прямых разложений.

Упражнения

1. Пусть $m > n \geqslant 2$. Существует группа конечного ранга, разлагающаяся в прямые суммы как m, так и n неразложимых слагаемых.

2. Пусть $r_1, \ldots, r_{k-1}$ — натуральные числа и $r = r_1 + \ldots + r_{k-1}$. Существует такая группа A ранга $2r$, что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_{k-1} \oplus \oplus A_k = B \oplus C$, где каждое A_i — неразложимая группа ранга r_i ($i = 1, \ldots, k-1$), в то время как A_k, B, C — неразложимые группы ранга r. [*Указание*: в доказательстве теоремы 90.1 заменить группы ранга 1 группами из подходящей жесткой системы.]

3 (Корнер [1]). Показать, что при любом прямом разложении группы A, определенной в доказательстве теоремы 90.2, на неразложимые группы число ненулевых компонент в точности равно k.

4. Пусть n, k, r — такие натуральные числа, что $kr \leqslant n$. Построить группу A ранга n со следующим свойством. Для разбиения $n = = r_1 + \ldots + r_k$, где $r_i \geqslant 1$, разложение группы A на неразложимые слагаемые рангов r_i найдется в том и только в том случае, когда $r_i \geqslant r$, $i = 1, \ldots, k$. [*Указание*: в доказательстве теоремы 90.2 группу $\langle p^{-\infty}u \rangle$ заменить подходящей жесткой группой ранга r.]

5. Показать, что не существует группы A ранга 4, которая разлагалась бы в прямую сумму двух групп ранга 1 и группы ранга 2, а также в прямую сумму группы ранга 1 и неразложимой группы ранга 3. [*Указание*: обратить внимание на типы подгрупп ранга 1.]

6. (Фукс и Лунстра [1]). Для любого $m \geqslant 2$ существуют такие попарно неизоморфные группы $B, C_1, \ldots, C_m$ ранга 2, что $B \oplus \ldots \ldots \oplus B \cong C_1 \oplus \ldots \oplus C_m$ (m слагаемых), но прямая сумма n ($< m$) групп, изоморфных группе B, не изоморфна прямой сумме никаких n из групп $C_1, \ldots, C_m$. [*Указание*: провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 90.3.]

7. Показать, что теорема 90.3 остается верной, если потребовать, чтобы группы A_i и C_i имели произвольный ранг $r > 2$. [*Указание*: группы X_i, Y_i заменить на жесткую систему таких групп, что единственными их автоморфизмами являются умножения на ± 1.]

8. Для любого нечетного натурального числа m и любого натурального числа t существует t таких групп ранга 2, что любые две из них ведут себя так же, как и группы A и C в теореме 90.3. [*Указание*: вместо простого числа p следует использовать произведение простых чисел.]

9. Для любого натурального n существует такая неразложимая группа A ранга n, что $A \oplus B \cong A \oplus C$ при некоторых неизоморфных неразложимых группах B и C конечного ранга. [*Указание*: см. 90.4.]

10 (Сонсяда [7]). Пусть $p = 5$ и либо $q = 3$, $r = 2$, либо $q = 2$, $r = 3$. Положим

$$X_i = \langle p^{-\infty}x_i,\ q^{-\infty}y_i,\quad r^{-1}(x_i + y_i) \rangle$$

для $i = 1, \ldots, k$. Показать, что всякое неразложимое прямое слагаемое группы $A = X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$ изоморфно группе X_1. [*Указание*:

если $A = U \oplus V$, $U \neq 0$, то некоторое $n_1x_1 + \ldots + n_kx_k = u_0 \in U$ (или же $n_1y_1 + \ldots + n_ky_k = u_0 \in U$), где $(n_1, \ldots, n_k) = 1$; если $\sum r^{-1}n_i(x_i + y_i) = u + v$, то $r^{-1}u - u_0$ есть линейная комбинация элементов y_i и подгруппа $\langle u_0, u\rangle_*$ служит для U прямым слагаемым.]

11 (Фукс и Лунстра [2]). Пусть A — группа без кручения ранга 1. Будем говорить, что A обладает *свойством поднятия*, если для каждого $n > 0$ автоморфизмы группы A/nA индуцируются автоморфизмами группы A.

Доказать, что группа без кручения A ранга 1, не являющаяся циклической, обладает свойством поднятия в том и только в том случае, когда для каждого n выполняется следующее условие. Для любой группы G и такой подгруппы $G_0 \subseteq G$, что $G/G_0 \cong Z(n)$, все подпрямые суммы групп A и G с ядрами nA и G_0 изоморфны. [*Указание*: при доказательстве необходимости использовать упр. 7(а) из § 88 и показать, что любой изоморфизм между двумя подпрямыми суммами переводит подгруппы nA и G_0 в себя.]

12* (Фукс и Лунстра [2]). Группа без кручения A ранга 1, не являющаяся циклической, обладает свойством сокращения, если она обладает свойством поднятия. [*Указание*: если $A \oplus H = C \oplus K$ при $A \cong C$, свести рассмотрение к случаю, когда ни одна из этих групп не содержит другую. Пусть B — проекция подгруппы C в группе H и $D = (A \oplus B) \cap K$. Тогда $B \cong D \cong A$. Показать, что группы H и K изоморфны подпрямым суммам групп A и $H/(H \cap K) \cong$ $\cong K/(H \cap K)$ с ядрами конечного индекса. Ср. упр. 11.]

13 (а) (Корнер). Пусть A — группа без кручения конечного ранга n и B, C — ее изоморфные сервантные подгруппы ранга $n-1$. Доказать, что $A/B \cong A/C$. [*Указание*: рассмотрение свести к случаю $n = 2$, $B \neq C$, двумя способами исследовать структуру периодической группы $A/(B + C)$ и вывести отсюда, что $\mathbf{t}(A/B) : \mathbf{t}(C) =$ $= \mathbf{t}(A/C) : \mathbf{t}(B)$.]

(б) Сокращение на группу без кручения конечного ранга допустимо, если дополнительные слагаемые имеют ранг 1.

§ 91. Прямые разложения счетных групп

Обратимся к исследованию прямых разложений групп без кручения счетного ранга. В отличие от групп конечного ранга счетные группы не обязаны быть прямыми суммами неразложимых групп. Некоторые парадоксальные примеры таких групп появятся в теоремах 91.5 и 91.6. Но сначала мы подробно рассмотрим случай групп, которые ведут себя не так плохо и допускают прямые разложения на неразложимые группы. Ввиду наших сведений о группах конечного ранга нет ничего удивительного в том, что в случае групп счетного ранга возникают почти все осложнения, которые можно себе представить.

Так же, как и раньше, рассмотрим прежде всего вопрос о числе слагаемых.

Теорема 91.1 (Корнер [1]). *Существует группа A, имеющая два прямых разложения*

$$A = B \oplus C = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} E_n,$$

где B, C — неразложимые группы ранга $\aleph_0$, а E_n — неразложимые группы ранга 2.

Пусть $\{p_n\}_n$, $\{q_n\}_n$ и $\{r_n\}_n$ — три попарно непересекающихся бесконечных множества простых чисел, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Для независимых b_n и c_n положим

$$B = \langle p_n^{-\infty} b_n, \ q_n^{-1}(b_n + b_{n+1}) \quad \text{при всех } n \rangle,$$

$$C = \langle p_n^{-\infty} c_n, \ r_n^{-1}(c_n + c_{n+1}) \quad \text{при всех } n \rangle.$$

Группы B и C имеют ранг $\aleph_0$ и по лемме 88.3 неразложимы. Возьмем целые числа k_n [позднее будет указано, какие] и с помощью элементов

$$u_n = (1 + k_n) b_n - k_n c_n, \qquad v_n = k_n b_n + (1 - k_n) c_n$$

определим

$$E_n = \langle p_n^{-\infty} u_n, \ p_{n+1}^{-\infty} v_{n+1}, \ q_n^{-1} r_n^{-1}(u_n + v_{n+1}) \rangle, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

Группы E_n имеют ранг 2 и неразложимы. Очевидно, что прямая сумма подгрупп $\langle b_n \rangle_*$ и $\langle c_n \rangle_*$ совпадает с прямой суммой подгрупп $\langle u_n \rangle_*$ и $\langle v_n \rangle_*$. Из равенства

$$u_n + v_{n+1} = (b_n + b_{n+1}) + k_n(b_n - c_n) + (k_{n+1} - 1)(b_{n+1} - c_{n+1})$$

видно, что для выполнения условия $q_n \mid u_n + v_{n+1}$ целые числа k_n необходимо выбрать так, чтобы $q_n \mid k_n$ и $q_n \mid k_{n+1} - 1$. Аналогично, в силу равенства

$$u_n + v_{n+1} = (c_n + c_{n+1}) + (1 + k_n)(b_n - c_n) + k_{n+1}(b_{n+1} - c_{n+1})$$

получаем, что в случае, когда $r_n \mid u_n + v_{n+1}$, числа k_n должны удовлетворять условиям $r_n \mid k_{n+1}$ и $r_n \mid k_n + 1$. Таким образом, если

$$q_n r_{n-1} \mid k_n,$$

$$q_{n-1} \mid k_n - 1,$$

$$r_n \mid k_n + 1,$$

то E_n — подгруппы группы $A = B \oplus C$. Но если числа k_n выбраны указанным образом, то из условия $q_n \mid u_n + v_{n+1}$ будет следовать условие $q_n \mid b_n + b_{n+1}$, а из условия $r_n \mid u_n + v_{n+1}$ — условие $r_n \mid c_n + c_{n+1}$ в группе $\oplus E_n$. Следовательно, $A = \oplus E_n$. ∎

Из теоремы 91.1 мы получаем, в частности, что в отличие от теоремы 86.7 *прямые слагаемые прямых сумм групп конечного ранга не обязаны снова быть прямыми суммами групп конечного ранга.*

С некоторыми изменениями метод доказательства теоремы 90.1 позволяет получить аналогичное утверждение и в случае групп счетного ранга.

Теорема 91.2. *Существует группа G, которую можно представить в виде $G = A \oplus B$, а также $G = C \oplus D$, где B, C и D — неразложимые группы ранга $\aleph_0$, а группа A вполне разложима и имеет ранг $\aleph_0$.*

Пусть p, q и p_n ($n = 1, 2, \ldots$) — различные простые числа. Для независимых элементов a_n, b_n определим группы

$$A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle p_n^{-\infty} a_n \rangle$$

и

$$B = \langle p_n^{-\infty} b_n,\ p^{-1}q^{-1}(b_n - b_{n+1}) \quad \text{при всех } n \rangle.$$

Группа A вполне разложима. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 88.3, получим неразложимость группы B. Пусть s, t — такие целые числа, что $ps - qt = 1$. Для элементов $c_n = pa_n + tb_n$ и $d_n = qa_n + sb_n$ положим

$$C = \langle p_n^{-\infty} c_n,\ p^{-1}(c_n - c_{n+1}) \quad \text{при всех } n \rangle,$$
$$D = \langle p_n^{-\infty} d_n,\ q^{-1}(d_n - d_{n+1}) \quad \text{при всех } n \rangle.$$

Группы C и D неразложимы. Так же как в доказательстве теоремы 90.1, получим равенство $A \oplus B = C \oplus D$. ∎

Последнюю конструкцию нетрудно видоизменить таким образом, чтобы получить пример, в котором группа A вполне разложима и имеет произвольный конечный ранг $r \geqslant 1$. Положим

$$A = \langle p_1^{-\infty} a_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle p_r^{-\infty} a_r \rangle,$$
$$B = \langle p_1^{-\infty} b_1, \ldots, p_r^{-\infty} b_r, X, Y, p^{-1}(b_n + x), q^{-1}(b_n + y) \quad \text{при } n = 1, \ldots, r \rangle.$$

Здесь p, q, $p_1, \ldots, p_r$ — различные простые числа, а X, Y — такие неразложимые группы ранга $\aleph_0$, что группы $\langle p_1^{-\infty} b_1 \rangle, \ldots, \langle p_r^{-\infty} b_r \rangle$, X, Y образуют жесткую систему, причем $p \nmid x \in X$, $q \nmid y \in Y$. Результаты § 88 гарантируют существование таких групп X, Y. Из того что X, Y — вполне характеристические подгруппы группы B, следует, что группа B неразложима. Пусть s, t, c_n, d_n обозначают то же, что и раньше. Легко видеть, что группы

$$C = \langle p_1^{-\infty} c_1, \ldots, p_r^{-\infty} c_r, X, p^{-1}(qc_n - x) \quad \text{при } n = 1, \ldots, r \rangle,$$
$$D = \langle p_1^{-\infty} d_1, \ldots, p_r^{-\infty} d_r, Y, q^{-1}(pd_n + y) \quad \text{при } n = 1, \ldots, r \rangle$$

неразложимы и удовлетворяют равенству $A \oplus B = C \oplus D$.

Свой аналог в случае групп счетного ранга имеет и теорема 90.2.

Теорема 91.3 (Корнер [1]). *Существует группа A ранга $\aleph_0$ со следующим свойством. Пусть $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ — произвольная последовательность натуральных чисел, в которой бесконечное число членов*

больше единицы. Тогда найдутся такие подгруппы A_n группы A, что

$$A=\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$$

и каждое слагаемое A_n — неразложимая группа ранга r_n.

Пусть $r'_1, \ldots, r'_n, \ldots$ обозначают те r_n, которые больше 1. Кроме того, пусть p, p_n, q_n $(n=1, 2, \ldots)$ — различные простые числа и u_n, x_n $(n=1, 2, \ldots)$ — независимые элементы. Положим

$$A=\bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{где} \quad B_n=\langle p^{-\infty}u_n, \; p_n^{-\infty}x_n, \; q_n^{-1}(u_n+x_n)\rangle.$$

Как видно из доказательства теоремы 90.2, прямая сумма m таких групп B_n разлагается в прямую сумму неразложимой группы ранга $m-1$ [того же вида, что и группы A_i в доказательстве теоремы 90.2] и $m-1$ групп ранга 1 [вида $\langle p^{-\infty}v\rangle$]. Разложим указанным способом группы $C_n=B_{t_n+1}\oplus\ldots\oplus B_{t_{n+1}}$, где $t_1=0$, $t_n=(r'_1-1)+\ldots$ $\ldots+(r'_{2n-2}-1)$. Мы получаем разложение группы A на неразложимые слагаемые, бесконечное число которых имеет ранг 1, а остальные имеют ранги $r'_1+r'_2-1, \ldots, r'_{2n-1}+r'_{2n}-1, \ldots$. Все эти слагаемые являются группами того же вида, что и группы A_i в доказательстве теоремы 90.2. Применяя метод доказательства теоремы 90.2, прямую сумму групп ранга $r'_{2n-1}+r'_{2n}-1$ и ранга 1 мы можем разложить в прямую сумму групп ранга r'_{2n-1} и ранга r'_{2n}. Очевидно, эти прямые суммы можно подобрать таким способом, что слагаемых ранга 1 группы A останется столько же, сколько имеется членов последовательности $\{r_n\}$, равных 1. ■

Группа A из теоремы 91.3 допускает континуальное множество прямых разложений на неразложимые слагаемые. Действительно, множество подмножеств множества натуральных чисел $r\geqslant 2$ имеет мощность континуума. Благодаря теореме 91.3 каждое такое подмножество дает прямое разложение группы A на неразложимые слагаемые, ранги которых составляют в точности это подмножество. Следующая теорема дает пример счетной группы, имеющей континуум неизоморфных неразложимых прямых слагаемых.

Теорема 91.4. (Фукс [28]). *Существует такая группа A ранга $\aleph_0$, что равенство*

$$A=B_j\oplus C_j, \quad \text{где} \quad B_j\cong C_j,$$

имеет место для континуального семейства попарно неизоморфных неразложимых групп B_j.

Пусть $P_1, \ldots, P_i, \ldots, Q_1, \ldots, Q_j, \ldots$ — попарно непересекающиеся бесконечные множества простых чисел и p, q, r — нечетные простые числа, не лежащие в объединении этих множеств. Взяв неза-

висимые элементы a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, \ldots)$, определим группы

$B = \langle P_i^{-1}a_i,\ Q_i^{-1}b_i,\ p^{-1}(a_i + a_{i+1}),\ q^{-1}(b_i + b_{i+1}),\ r^{-1}(a_i + b_i)$ при всех $i\rangle$,

$C = \langle P_i^{-1}c_i,\ Q_i^{-1}d_i,\ p^{-1}(c_i + c_{i+1}),\ q^{-1}(d_i + d_{i+1}),\ r^{-1}(c_i + d_i)$ при всех $i\rangle$,

где $P_i^{-1}a$ обозначает множество $\{p_i^{-1}a$ при всех $p_i \in P_i\}$. Группы B и C изоморфны и неразложимы. Положим $A = B \oplus C$. Для каждого i выберем целое число k_i [позднее будет указано, какое именно] и положим

$$u_i = a_i, \qquad v_i = k_ib_i + (k_i^2 - 1)d_i,$$
$$x_i = k_ia_i + c_i, \qquad y_i = b_i + k_id_i.$$

Наша цель теперь — выбрать числа k_i таким образом, чтобы выполнялось $A = U \oplus X$, где

$$U = \langle P_i^{-1}u_i,\ Q_i^{-1}v_i,\ p^{-1}(u_i + u_{i+1}),\ q^{-1}(v_i + v_{i+1}),$$
$$r^{-1}(u_i + k_iv_i) \quad \text{при всех } i\rangle,$$
$$X = \langle P_i^{-1}x_i,\ Q_i^{-1}y_i,\ p^{-1}(x_i + x_{i+1}),\ q^{-1}(y_i + y_{i+1}),$$
$$r^{-1}(x_i + k_iy_i) \quad \text{при всех } i\rangle.$$

Исследуя делимость на простые числа p, q и r и пользуясь привычной техникой доказательства, мы получаем, что равенство $A = U \oplus X$ имеет место в том и только в том случае, когда числа k_i удовлетворяют условиям

$$k_i \equiv k_{i+1} \pmod{pq} \quad \text{и} \quad k_i^2 \equiv 1 \pmod{r} \quad \text{при всех } i. \tag{1}$$

Возьмем такое целое число l, что $l \equiv 1 \pmod{pq}$ и $l \equiv -1 \pmod{r}$. При $k_i = 1$ или $k_i = l$ последовательность $\{k_i\}$ удовлетворяет условиям (1), и мы получаем разложение $A = U \oplus X$, где U, X — изоморфные неразложимые группы.

Положим $k_1 = 1$ и покажем, что если последовательности $k_2, \ldots, k_i, \ldots$ и $k_2', \ldots, k_i', \ldots$ различны, то соответствующие им группы U и U' не изоморфны. Пусть $\varphi\colon U \to U'$ — изоморфизм. Он может действовать на образующие только следующим образом: $u_i \mapsto \pm u_i'$, $v_i \mapsto \pm v_i'$. В силу

$$p \mid u_i + u_{i+1} \mapsto \pm(u_i' \pm u_{i+1}'),$$
$$q \mid v_i + v_{i+1} \mapsto \pm(v_i' \pm v_{i+1}'),$$
$$r \mid u_1 + v_1 \mapsto \pm(u_1' \pm v_1')$$

мы заключаем, что знаки при элементах u_i' и v_i' должны быть одни и те же, скажем $+1$. Так как $u_i \mapsto u_i'$ и $v_i \mapsto v_i'$, то $r \mid u_i + k_iv_i \mapsto u_i' + k_i'v_i'$ для каждого i. Не может быть, чтобы одно из чисел k_i, k_i' равнялось 1, а другое l, поскольку $l \not\equiv 1 \bmod r$. Для завершения доказательства нам остается лишь заметить, что семейство последовательностей $k_2, \ldots, k_i, \ldots$ имеет мощность континуума. ∎

До сих пор нам не встретилось ни одной счетной группы, которая не была бы прямой суммой неразложимых групп. Следующий результат дает нам пример такой группы. Более того, оказывается верным весьма замечательный факт: существуют группы, у которых вовсе нет неразложимых слагаемых.

Теорема 91.5 (Корнер [3]). *Существует счетная группа, не имеющая ни одного ненулевого неразложимого прямого слагаемого.*

Доказательство основывается на теореме 110.1 о существовании кольца эндоморфизмов. Поэтому сначала мы зададимся кольцом $\mathbf{R}$, а затем определим A как группу, кольцо эндоморфизмов которой есть $\mathbf{R}$.

Пусть Λ— полугруппа с элементами λ_r. Индекс r пробегает множество неотрицательных рациональных чисел, а умножение в полугруппе Λ подчинено закону

$$\lambda_r\lambda_s = \lambda_{\max(r,\ s)}.$$

Пусть $\mathbf{R}$ — полугрупповое кольцо полугруппы Λ над кольцом $\mathbf{Z}$ целых чисел. В этом случае $\mathbf{R}$ — счетное [коммутативное] кольцо с единицей λ_0, причем его аддитивная группа свободно порождается элементами λ_r. По теореме 110.1 существует счетная группа без кручения A, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно $\mathbf{R}$.

Пусть элемент $\varepsilon = n_1\lambda_{r_1} + \ldots + n_k\lambda_{r_k}$, где $0 \neq n_i \in \mathbf{Z}$ и $r_1 < \ldots < r_k$, является идемпотентом кольца $\mathbf{R}$. Имеем

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j (2n_1 + \ \ldots \ + 2n_{j-1} + n_j)\, \lambda_{r_j}.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем, что $2n_1 + \ldots + 2n_{j-1} + n_j = 1$ при $j = 1, \ldots, k$. Отсюда следует, что $n_j = (-1)^{j-1}$ при $j = 1, \ldots, k$ и, значит, $\varepsilon = \lambda_{r_1} - \lambda_{r_2} + \ldots + (-1)^{k-1}\lambda_{r_k}$. Если $k > 1$, выберем такие рациональные числа s и t, что $r_1 < s < t < r_2$ [если $k = 1$, то последнее неравенство не имеет смысла], и положим $\xi = \lambda_s - \lambda_t$. Этот элемент является идемпотентом кольца $\mathbf{R}$, причем $\varepsilon\xi = \xi\varepsilon = \xi \neq \varepsilon$. Итак, для всякого идемпотента $\varepsilon \neq 0$ кольца $\mathbf{R}$ найдется такой ненулевой идемпотент $\xi \in \mathbf{R}$, что $\xi = \varepsilon\xi = \xi\varepsilon \neq \varepsilon$.

Покажем, что группа A не имеет ненулевых неразложимых слагаемых. Пусть $B \neq 0$ — прямое слагаемое группы A и ε: $A \to B$ — соответствующая проекция. Тогда $C = \xi A$ — ненулевое прямое слагаемое группы A, которое в силу $\varepsilon\xi = \xi$ содержится в подгруппе B. Мы получаем $B = C \oplus (\varepsilon - \xi) B$, где оба слагаемых ненулевые. ■

Следующая теорема свидетельствует об еще одном интересном явлении.

Теорема 91.6 (Корнер [4]). *Пусть m — натуральное число. Существует счетная группа без кручения A со следующим свойством:*

прямая сумма n_1 групп, изоморфных A, изоморфна прямой сумме n_2 групп, изоморфных A, тогда и только тогда, когда $m \mid n_1 - n_2$.

Заметим сразу же, что в этом случае $A \cong A \oplus \ldots \oplus A$ для $m+1$ слагаемых, но не для меньшего числа ($\geqslant 2$) слагаемых. Обратно, если группа A обладает этим свойством, то она удовлетворяет условию теоремы 91.6. Действительно, чтобы это доказать, достаточно добавить необходимое количество групп, изоморфных A, по обе стороны от знака изоморфизма и заменить прямые суммы $m+1$ слагаемых A на одну группу A.

Построение искомой группы A снова опирается на теорему 110.1. Поэтому вначале мы определим кольцо $\mathbf{R}$, аддитивная группа которого является счетной свободной группой.

Пусть Λ — полугруппа с 1, порожденная символами ρ_i, σ_i ($i = 0, 1, \ldots, m$), подчиняющимися следующим соотношениям:

$$\rho_j \sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{S}$ — полугрупповое кольцо полугруппы Λ над кольцом $\mathbf{Z}$, причем нуль полугруппы Λ отождествлен с нулем кольца $\mathbf{S}$. Аддитивная группа кольца $\mathbf{S}$ свободна. Действительно, различные ненулевые произведения символов ρ_i и σ_i образуют базис. Каждое такое произведение имеет вид

$$\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_k}\rho_{j_l} \ldots \rho_{j_2}\rho_{j_1}, \tag{2}$$

где k, $l \geqslant 0$, а индексы i, j принимают одно из значений $0, 1, \ldots, m$. Главный идеал $\mathbf{I}$ кольца $\mathbf{S}$, порожденный элементом $\tau = 1 - \sigma_0\rho_0 - \ldots - \sigma_m\rho_m$, аддитивно порождается элементами вида

$$\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_k}\tau\rho_{j_l} \ldots \rho_{j_2}\rho_{j_1}, \tag{3}$$

поскольку $\rho_i\tau = 0 = \tau\sigma_i$ для всех i. Легко видеть, что если базисные элементы вида (2), где k, $l \geqslant 1$ и $j_l = i_k = 0$, заменить элементами вида (3), то новая система элементов по-прежнему будет аддитивным базисом для кольца $\mathbf{S}$. Следовательно, аддитивная группа кольца $\mathbf{R} = \mathbf{S}/\mathbf{I}$ свободна, причем кольцо $\mathbf{R}$, очевидно, счетно.

Следующим шагом является построение группового гомоморфизма ψ: $\mathbf{S} \to Z(m)$, который переводит идеал $\mathbf{I}$ в нуль и удовлетворяет условиям

$$\psi(1) = 1_m \quad \text{и} \quad \psi(\xi\eta) = \psi(\eta\xi) \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbf{S}.$$

Пусть ψ действует на образующие вида (2) следующим образом:

$$\psi(\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_k}\rho_{j_l} \ldots \rho_{j_2}\rho_{j_1}) = \begin{cases} 1_m, & \text{если } k=l \text{ и } i_t=j_t \text{ для всех } t, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Такой гомоморфизм ψ, очевидно, переводит в нуль элементы вида (3), кроме случая $k = l$ и $i_t = j_t$ ($t = 1, \ldots, k$). В последнем случае его

значением является $1_m - (m+1)\,1_m$, что также равно нулю в группе $Z(m)$. Остается проверить, что $\psi(\xi\eta) = \psi(\eta\xi)$, где ξ имеет вид (2), а η — либо ρ_i, либо σ_i. Эта проверка предоставляется читателю в виде упражнения.

По теореме 110.1 существует счетная группа без кручения A, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно определенному выше кольцу $\mathbf{R}$. Отождествим кольцо $\mathbf{R}$ с кольцом эндоморфизмов группы A. Тогда $\sigma_i\rho_i = \varepsilon_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — попарно ортогональные идемпотенты, сумма которых равна 1. Следовательно, $A = \varepsilon_0 A \oplus \oplus \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_m A$. Но из равенств $\sigma_i\rho_i = \varepsilon_i$ и $\rho_i\sigma_i = 1$ вытекает, что $\varepsilon_i A \cong A$ [см. § 106, п. ж)]. Значит, группа A изоморфна прямой сумме $m+1$ групп, изоморфных A. Если же группа A изоморфна прямой сумме $n+1$ групп, изоморфных A $(0 < n \leqslant m)$, то ввиду п. ж) из § 106 это означает существование таких двух эндоморфизмов α и β группы A, что $\alpha\beta = 1$ и $\beta\alpha = \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n$. Но равенство $1_m = \psi(\alpha\beta) = \psi(\beta\alpha) = \psi(\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n) = (n+1)\,1_m$ невозможно ни для какого n при $0 < n < m$, что и завершает доказательство. ■

Упражнения

1. Показать, что теорема 91.1 остается верной, если потребовать, чтобы группы E_n имели произвольный конечн или счетный ранг $r > 2$. [*Указание*: заменить группы $\langle p_n^{-\infty} b_n \rangle$ подходящей жесткой системой групп.]

2. Доказать, что теорема 91.2 остается верной, если вместо полной разложимости группы A потребовать, чтобы группа A была прямой суммой неразложимых групп заданных рангов $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$.

3 (Корнер [1]). (а) Пусть A — прямая сумма бесконечного множества неразложимых групп конечного ранга. Если почти все эти группы имеют ранг 1, то при любом разложении группы A на неразложимые слагаемые почти все компоненты должны быть группами ранга 1. [*Указание*: A/B — вполне разложимая группа, где B — некоторая подгруппа конечного ранга.]

(б) Доказать, что в теореме 91.3 требование, чтобы бесконечно много чисел r_n были больше единицы, может быть опущено.

(в) Показать, что утверждение (а) неверно, если не все компоненты имеют конечный ранг.

4. Обобщить теорему 91.4 на случай $m \geqslant 2$ изоморфных компонент, используя идеи доказательства теоремы 90.3.

5. Доказать существование счетной группы A, обладающей континуальным семейством разложений $A = B_j \oplus C_j$, где B_j, C_j — неразложимые группы и все B_j изоморфны друг другу. [*Указание*: применить метод доказательства теоремы 90.4.]

6. Показать, что любое слагаемое группы A из доказательства теоремы 91.5 является вполне характеристической подгруппой.

7 (Корнер [4]). Существуют такие счетные группы без кручения A, B, C, что $A \cong B \oplus C$, $B \cong A \oplus C$, но группы A и B не изоморфны. [*Указание*: в теореме 91.6 принять $m = 2$.]

8 (Корнер [4]). Пусть $m \geqslant 2$ — произвольное натуральное число. Существуют такие счетные группы без кручения A и B, что прямая сумма n групп, изоморфных A, изоморфна прямой сумме n групп, изоморфных B, тогда и только тогда, когда $m \mid n$.

9 (Корнер [4]). Существует счетная группа без кручения A со следующим свойством: группа A изоморфна прямой сумме произвольного конечного числа групп, изоморфных A, но не изоморфна никакой прямой сумме бесконечного множества групп, изоморфных A. [*Указание*: мощность множества эндоморфизмов прямой суммы бесконечного множества групп, изоморфных A, не меньше мощности континуума.]

10* (Фукс [28]). Пусть $\mathfrak{m}$ — произвольное бесконечное кардинальное число, меньшее первого сильно недостижимого кардинального числа. Доказать аналог теоремы 91.4 для группы мощности $\mathfrak{m}$ с $2^{\mathfrak{m}}$ неизоморфными слагаемыми B_j. [*Указание*: теорема 89.2.]

11. Для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует группа ранга $\mathfrak{m}$, не имеющая неразложимых прямых слагаемых. [*Указание*: рассмотреть прямые суммы групп из доказательства теоремы 91.5; доказать утверждение для суммы конечного числа групп, затем — для счетного числа и применить предложение 9.10.]

§ 92*. Квазипрямые разложения

Результаты предыдущего параграфа показывают, что при изучении прямых разложений групп без кручения на получение какого-либо рода единственности в традиционном смысле надеяться не приходится. Йонсон [2] предложил радикально новую идею и показал, что она приводит к теореме единственности в несколько ослабленном смысле.

Идея состоит в замене понятия изоморфизма более слабым понятием квазиизоморфизма. Пусть A, C — группы без кручения конечного ранга и группа A содержится в делимой оболочке D группы C [мы для удобства считаем, что все рассматриваемые группы лежат в данной делимой группе]. Группу A в этом случае назовем *квазивложенной* в группу C [обозначение: $A \prec C$], если для некоторого натурального числа n имеет место включение $nA \subseteq C$. Группа A *квазиравна* группе C, $A \approx C$, если $A \prec C$ и $C \prec A$. Как сразу видно, квазиравенство означает просто, что подгруппа $A \cap C$ имеет конечный индекс как в A, так и в C.

Далее, группы A и C называются *квазиизоморфными* [обозначение: $A \sim C$], если они изоморфны квазиравным подгруппам некоторой делимой группы D.

Понятие квазиизоморфизма для групп без кручения произвольного ранга будет введено во второй части этого параграфа.

Всякая подгруппа конечного индекса группы A ранга 1 изоморфна группе A. Таким образом, *для групп ранга* 1 *из квазиизоморфизма следует изоморфизм*. В более общем случае имеет место

Предложение 92.1 (Прохазка [12]). *Пусть A — такая группа без кручения конечного ранга, что для каждого простого числа p имеет*

место неравенство $|A/pA| \leqslant p$. *Если группа без кручения* C *квазиизоморфна группе* A, *то* $C \cong A$.

Изоморфизм $C \cong A$ достаточно доказать для подгруппы C группы A, имеющей в A простой индекс p. В этом случае $pA \neq A$ и $pA \subseteq C$. Следовательно, по условию $C = pA$. Поскольку $pA \cong A$, требуемое утверждение очевидно. ∎

Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — подгруппы делимой оболочки D группы A. Группу A назовем *квазипрямой суммой* этих подгрупп, если имеет место квазиравенство $A \approx C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$. В этом случае мы будем говорить также о *квазипрямом разложении* группы A, а группы C_i называть *квазипрямыми слагаемыми* группы A. Непосредственно проверяются следующие утверждения:

а) $A \oplus B \approx A \oplus C$ *влечет за собой* $B \sim C$;
б) *если* $A \approx B \oplus C$ *и* $B \prec X \prec A$, *то* $X \approx B \oplus (X \cap C)$.

Группа, имеющая лишь тривиальные квазипрямые разложения, называется *сильно неразложимой*.

Пример 1. Группа A из примера 2 в § 88 квазиравна прямой сумме $\bigoplus_n E_n$, но это неверно для группы A из примера 5. Последняя группа сильно неразложима.

Пример 2. Жесткие группы сильно неразложимы.

Пусть A — группа без кручения конечного ранга и D — делимая оболочка группы A. Эндоморфизм φ группы D называется *квазиэндоморфизмом* группы A, если имеет место квазивложение

$$\varphi A \prec A.$$

Квазиэндоморфизмы группы A образуют подкольцо $\tilde{\mathrm{E}}(A)$ кольца всех эндоморфизмов группы D. Обратимые элементы кольца $\tilde{\mathrm{E}}(A)$ называются *квазиавтоморфизмами* группы A. Отметим, что верны следующие утверждения.

в) *Кольцо* $\tilde{\mathrm{E}}(A)$ *является* $\mathbb{Q}$*-алгеброй с единицей и произвольный левый идеал кольца* $\tilde{\mathrm{E}}(A)$ — *векторное пространство над полем* $\mathbb{Q}$. Поскольку ясно, что деление на целое число $n \neq 0$ является квазиэндоморфизмом, утверждение очевидно.

г) *В кольце* $\tilde{\mathrm{E}}(A)$ *выполнено условие минимальности для левых* [*и для правых*] *идеалов*. Это следует из п. в) и того, что размерность D конечна.

д) *Для любого идемпотента* $\varepsilon \in \tilde{\mathrm{E}}(A)$ *имеет место квазипрямое разложение* $A \approx \varepsilon A \oplus (1 - \varepsilon) A$. *Обратно, если* $A \approx B \oplus C$, *то найдется такой идемпотент* $\varepsilon \in \tilde{\mathrm{E}}(A)$, *что* $B \approx \varepsilon A$ *и* $C \approx (1 - \varepsilon) A$. Доказательство этого утверждения можно провести непосредственно, что и представляется читателю.

Следующая лемма имеет место для любых конечных разложений. Мы ограничимся рассмотрением случая двух слагаемых.

Лемма 92.2 (Рейд Дж. Д. [1]). *Соответствие*

$$A \approx \varepsilon_1 A \oplus \varepsilon_2 A \mapsto \tilde{\mathsf{E}}(A) = \tilde{\mathsf{E}}(A)\varepsilon_1 \oplus \tilde{\mathsf{E}}(A)\varepsilon_2$$

между квазипрямыми разложениями группы без кручения A конечного ранга и разложениями кольца $\tilde{\mathsf{E}}(A)$ в прямую сумму левых идеалов является взаимно однозначным. Здесь ε_1, $\varepsilon_2 = 1 - \varepsilon_1$ — идемпотентные квазиэндоморфизмы группы A.

Доказательство аналогично доказательству п. д) из § 106. ∎

Давно известно, что артиново кольцо с единицей не имеет разложений в прямую сумму ненулевых левых идеалов в том и только в том случае, когда оно является локальным кольцом [т. е. его необратимые элементы образуют идеал]. Таким образом, из п. г) и последней леммы легко получить следующее важное

Предложение 92.3 (Рейд Дж. Д. [2]). *Кольцо квазиэндоморфизмов группы без кручения A конечного ранга локально в том и только в том случае, когда A — сильно неразложимая группа.* ∎

Следующая лемма играет центральную роль в нашем исследовании квазипрямых разложений. В ней говорится о свойстве группы, очевидно, аналогичном свойству замены в § 72.

Лемма 92.4. *Сильно неразложимая группа A конечного ранга обладает следующим свойством: пусть B, C_1, ..., C_m — группы без кручения конечного ранга. При условии, что*

$$G \approx A \oplus B \approx C_1 \oplus \ldots \oplus C_m, \tag{1}$$

найдутся такой индекс i и такая подгруппа $C'_i \subseteq C_i$, что

$$G \approx A \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C'_i \oplus \ldots \oplus C_m.$$

Пусть ε, π и θ_i — идемпотентные квазиэндоморфизмы группы G, соответствующие квазипрямым разложениям (1). Тогда ограничение квазиэндоморфизма $\varepsilon = \varepsilon\theta_1 + \ldots + \varepsilon\theta_m$ на подгруппу A является квазиавтоморфизмом группы A. В силу предложения 92.3 отсюда следует, что один из квазиэндоморфизмов $\varepsilon\theta_i$, скажем $\varepsilon\theta_1$, является квазиавтоморфизмом группы A [мы для удобства пишем θ_i вместо $\theta_i \mid A$]. Таким образом, группа $\theta_1 A$ квазиизоморфна группе A. Поскольку квазиэндоморфизм ε отображает группу $\theta_1 A$ на группу, квазиравную группе A, мы получаем $G \approx \theta_1 A \oplus B$. Следовательно, $C_1 \approx \theta_1 A \oplus C'_1$, где $C'_1 = C_1 \cap B$. Но квазиэндоморфизм θ_1 изоморфно отображает группу A на группу $\theta_1 A$, значит, $G \approx A \oplus C'_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_m$. ∎

Всякая группа без кручения конечного ранга, очевидно, квазиравна некоторой конечной прямой сумме сильно неразложимых групп.

В отличие от теоремы 90.3 для квазипрямых разложений такого рода имеет место единственность, как показывает следующий основной результат о квазипрямых разложениях.

Теорема 92.5 (Йонсон [2]). *Пусть A — группа без кручения конечного ранга и выполняются квазиравенства*

$$A \approx A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \approx C_1 \oplus \ldots \oplus C_n,$$

где все группы A_i и C_j сильно неразложимы. Тогда $m = n$ и при подходящей перенумерации $A_i \sim C_i$ для всех i.

Поскольку все группы C_j сильно неразложимы, из леммы 92.4 сразу следует, что в квазипрямом разложении группы A одну из групп C_i, скажем C_1, можно заменить на группу A_1, т. е. $A \approx A_1 \oplus \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n$. Отсюда и из п. a) следует квазиизоморфизм $A_1 \sim \sim C_1$. Мы заключаем также, что $A_2 \oplus \ldots \oplus A_m \sim C_2 \oplus \ldots \oplus C_n$, или $A_2 \oplus \ldots \oplus A_m \approx C_2' \oplus \ldots \oplus C_n'$, где $C_i' \sim C_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пользуясь индукцией, завершаем наше доказательство. ∎

Пример 3. Все группы, встречающиеся в доказательствах § 90, квази изоморфны вполне разложимым группам.

Теперь рассмотрим случай групп бесконечного ранга. Пусть A, C — группы без кручения произвольного ранга. Группу A назовем *квазивложенной* в группу C, $A \prec C$, если A содержится в делимой оболочке D группы C, причем для каждого слагаемого E группы D, имеющего конечный ранг, выполняется $A \cap E \prec C \cap E$ в прежнем смысле. Ясно, как определить понятия *квазиравенства*, *квазиизоморфизма* и т. д. в общем случае. [Такое определение квазиизоморфизма для групп без кручения бесконечного ранга отличается от определений этого понятия, используемых разными авторами, например Рейдом Дж. Д. [4].]

Пример 4. Группа A из теоремы 91.1 квазиизоморфна некоторой вполне разложимой группе. Это неверно, однако, для группы

$$B = \langle p_n^{-\infty} b_n,\ q_n^{-\infty}(b_n + b_{n+1}) \quad \text{при всех целых числах } n \rangle.$$

При распространении предыдущих результатов на общий случай неизбежно возникает необходимость наложить определенное ограничение на прямые суммы. Разложение $A \approx B \oplus C$ будем называть *допустимым* квазипрямым разложением группы A [обозначение: $A \approx \approx B \mathbin{\hat{\oplus}} C$], если для проекций π и ρ делимой оболочки группы A на делимые оболочки групп B и C соответственно имеют место вложения $n\pi A \subseteq B$, $nB \subseteq A$ для некоторого $n \neq 0$ и $m\rho A \subseteq C$, $mC \subseteq A$ для некоторого $m \neq 0$. Бесконечная квазипрямая сумма $A \approx \bigoplus_{i \in I} A_i$ по определению допустима, если аналогичное условие выполняется для каждой проекции π_i. В этом случае мы пишем $A \approx \hat{\bigoplus}_{i \in I} A_i$. Читатель легко может убедиться в том, что все квазипрямые разложения группы конечного ранга обязательно допустимы.

Следующие утверждения легко следуют из определений.

а′) Если $X \approx A \hat{\oplus} B$ и $X \approx A \hat{\oplus} C$, то $B \sim C$.

б′) Если $A \approx B \hat{\oplus} C$ и $B \prec X \prec A$, где группа X имеет конечный ранг, то $X \approx B \hat{\oplus} (X \cap C)$.

в′) Если $A_i \approx C_i$ для всех $i \in I$, то для прямой суммы $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ выполняется $A \approx \hat{\bigoplus}_{i \in I} C_i$.

В оставшейся части параграфа мы построим теорию квазипрямых разложений, аналогичную тем разделам теории прямых разложений, которые рассмотрены в § 86 и 87. Для достижения разумной общности мы будем рассматривать группы произвольного конечного ранга в тех ситуациях, в которых в § 86 и 87 рассматривались только группы ранга 1.

В соответствии со сказанным, назовем группу A *вполне квазиразложимой*, если $A \approx \hat{\bigoplus}_{i \in I} A_i$, где каждое слагаемое A_i — группа конечного ранга. Итак, мы будем рассматривать только допустимые квазипрямые разложения. Не изменяя смысла данного определения, мы можем дополнительно считать, что группы A_i сильно неразложимы. В этом случае мы получаем точный аналог предложения 86.1.

Теорема 92.6 (Вильоен [2]). *Пусть даны два допустимых квазипрямых разложения группы A,*

$$A \approx \hat{\bigoplus_{i \in I}} A_i \quad \text{и} \quad A \approx \hat{\bigoplus_{j \in J}} C_j,$$

где A_i и C_j — сильно неразложимые группы конечного ранга. Тогда найдется такое взаимно однозначное соответствие f между множествами I и J, что

$$A_i \sim C_{f(i)} \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Если множество I конечно, то и множество J конечно, и наше утверждение сводится к теореме 92.5. Пусть теперь множество I счетно, скажем $I = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Не теряя общности, можно считать, что $J = I$. Очевидно, для некоторого m группа A_1 содержится в делимой оболочке группы $C_1 \oplus \ldots \oplus C_m$. Отсюда в силу б′) следует, что A_1 — квазипрямое слагаемое группы $C_1 \oplus \ldots \oplus C_m$. По лемме 92.4 одно из этих C_i, скажем C_1, можно заменить на A_1 и получить $A \approx \approx A_1 \oplus \bigoplus_{n \geq 2} C_n$. В силу а′) отсюда следует, что $A_1 \sim C_1$. Положим $A' = \hat{\bigoplus}_{n \geq 2} A_n$. Заменяя, если понадобится, группы C_n на изоморфные, получаем $A' \approx \hat{\bigoplus}_{n \geq 2} C_n$. Для группы C_2 проведем те же рассуждения, что и для группы A_1, и получим квазиизоморфизм, скажем $C_2 \sim A_2$.

Попеременно рассматривая первую из оставшихся групп A_n или C_n и рассуждая указанным образом, мы найдем требуемое соответствие.

Если множества индексов I и J несчетны, применим метод доказательства предложения 9.10. Мы получим разбиения $I = \bigcup_{k \in K} I_k$ и $J = \bigcup_{k \in K} J_k$ на попарно непересекающиеся счетные подмножества I_k множества I и на такие же подмножества J_k множества J соответственно. При этом для каждого $k \in K$ группы $\bigoplus_{i \in I_k} A_i$ и $\bigoplus_{j \in J_k} C_j$ квазиизоморфны. Для завершения доказательства остается сослаться на то, что в счетном случае утверждение теоремы уже доказано. ∎

Группа без кручения A называется *квазисепарабельной*, если каждое конечное подмножество $\{a_1, \ldots, a_k\}$ группы A содержится в некотором квазипрямом слагаемом группы A, имеющем конечный ранг [или, что эквивалентно, в некотором вполне квазиразложимом квазипрямом слагаемом группы A]. Здесь также все рассматриваемые квазипрямые суммы допустимы. В качестве легкого упражнения можно доказать аналог теоремы Бэра 87.1: *счетная квазисепарабельная группа вполне квазиразложима.* Относительно нетрудно установить следующий результат, аналогичный теореме 87.5.

Теорема 92.7 (Вильоен [2]). *Всякое слагаемое в допустимом квазипрямом разложении квазисепарабельной группы также квазисепарабельно.*

Пусть A — квазисепарабельная группа, $A \approx B \hat{\oplus} C$ и $b_1, \ldots, b_k \in B$. Тогда $b_1, \ldots, b_k \in X$ для некоторого квазипрямого слагаемого X группы A, имеющего конечный ранг. Пусть $A \approx X \hat{\oplus} Y$. Запишем $X \approx X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$, где X_j — сильно неразложимые группы. Легко проверить, что лемма 92.4 остается верной, если не требовать, чтобы группы B и C_i имели конечный ранг. Следовательно, каждая группа X_j обладает свойством, установленным в лемме 92.4. Отсюда мы сразу получаем, что этим свойством обладает и группа X [ср. п. в) из § 72]. Таким образом, существуют такие подгруппы $B' \subseteq B$ и $C' \subseteq C$, что $A \approx X \hat{\oplus} B' \hat{\oplus} C'$. Так как B — допустимое квазипрямое слагаемое в A, то легко видеть, что $B \approx B' \hat{\oplus} [B \cap (X \hat{\oplus} C')]$. В этой сумме второе квазипрямое слагаемое имеет конечный ранг и содержит элементы $b_1, \ldots, b_k$. Квазисепарабельность группы B установлена. ∎

Последний результат дает нам возможность доказать следующий аналог теоремы 86.7.

Следствие 92.8. *Квазипрямые слагаемые вполне квазиразложимых групп также вполне квазиразложимы.*

Очевидное видоизменение доказательства предложения 9.10 приводит нас к заключению, что квазипрямое слагаемое квазиизоморфно

прямой сумме счетных групп. По теореме 92.7 и замечанию, предшествовавшему этой теореме, в счетном случае наше утверждение очевидно. ∎

В работе Уокера [7] было отмечено, что вместо категории групп без кручения можно рассматривать ее факторкатегорию по модулю конечных групп. В новой категории теорема 92.5 эквивалентна теореме единственности, с точностью до изоморфизма, прямых разложений объектов на неразложимые объекты.

Упражнения

1. Если для группы A выполняются условия предложения 92.1, то подгруппами вида nA ($n > 0$) исчерпываются все подгруппы конечного индекса в группе A.

2. Пусть A — такая неразложимая группа без кручения конечного ранга, что для каждого простого числа p выполняется $|A/pA| \leqslant \leqslant p$. Доказать, что A — сильно неразложимая группа.

3. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, где A_i, C_j — неразложимые группы конечного ранга, удовлетворяющие условию упр. 2. Тогда указанные два разложения группы A изоморфны.

4. Пусть A — группа без кручения конечного ранга и F, F' — свободные подгруппы группы A, имеющие ранг n. В этом случае факторгруппы A/F и A/F' изоморфны таким подгруппам группы $\bigoplus_{i=1}^{n} Q/Z$, что $A/F \oplus G \cong A/F' \oplus G'$ для некоторых конечных групп G и G'.

5. Пусть A — группа без кручения конечного ранга. Если φ — изоморфное отображение группы A в себя, то подгруппа φA имеет конечный индекс в группе A. [*Указание*: если F — свободная подгруппа группы A того же ранга, что и A, то подгруппа $F \cap \varphi F$ имеет конечный индекс в группе F. Рассмотреть подгруппу $\varphi A/(F \cap \varphi F) \subseteq \subseteq A/(F \cap \varphi F)$ и применить упр. 4, заметив, что $A/F \cong \varphi A/\varphi F$.]

6 (Вильоен [2]). Пусть $A = \langle a_n\ (n \geqslant 1);\ p^{-n}(a_1 + a_{n+1})$ при всех $n \rangle$, где p — простое число. Показать, что $A \approx \oplus \langle a_n \rangle$, но это разложение не является допустимым.

7. Доказать а$'$) — в$'$).

8. Доказать лемму 92.2 для допустимых конечных разложений $A \approx \varepsilon_1 A \mathbin{\widehat{\oplus}} \ldots \mathbin{\widehat{\oplus}} \varepsilon_n A$ групп A бесконечного ранга.

9 (Рейд Дж. Д. [2]). Пусть кольцо $\tilde{\mathrm{E}}(A)$ удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов.

(а) Произвольное квазипрямое разложение группы A имеет лишь конечное число слагаемых.

(б) Группа A сильно неразложима в том и только в том случае, когда кольцо $\tilde{\mathrm{E}}(A)$ локально.

(в) Для группы A верна лемма 92.4.

10. (а) Пусть G — группа из теоремы 91.2. Показать, что никакая подгруппа H группы G, для которой факторгруппа G/H ограниченная, не может быть прямой суммой групп конечного ранга.

(б) Если называть группу A квазиизоморфной группе C при условии, что $C \cong A' \subseteq A$, где A/A' — ограниченная группа, то счетная квазисепарабельная группа не обязательно будет вполне квазиразложимой.

11 (Прохазка [12]). Если A и C — квазиизоморфные группы без кручения конечного ранга, то $\operatorname{Ext}(A, G) \cong \operatorname{Ext}(C, G)$ для любой группы G.

§ 93*. Счетные группы без кручения

Для групп без кручения ранга $\mathfrak{m} > 1$ до сих пор не было получено никакой удовлетворительной структурной теории. Несмотря на то что известно несколько схем для построения групп без кручения не более чем счетного ранга, с их помощью не удается окончательно решить проблему изоморфности. А именно, различные построения могут приводить к изоморфным группам, а инвариантами служат классы эквивалентности матриц или других параметров, для которых вопрос о принадлежности одному и тому же классу эквивалентности так же труден, как и вопрос об изоморфности групп. Ввиду теоретической важности метода мы приводим теорию, разработанную для случая групп конечного ранга Курошем [2], Мальцевым [1] и Дэрри [1].

Основная идея этой теории — локализация, т. е. сведение структурной проблемы для групп без кручения A к рассмотрению $\mathbf{Q}_p^*$-модулей $J_p \otimes A$. Последние легко поддаются изучению, если имеют не более чем счетный ранг.

Введем следующие обозначения. Для группы без кручения A положим

$$A_p = Q_p \otimes A, \quad A_p^* = J_p \otimes A, \quad E = Q \otimes A \quad \text{и} \quad E_p^* = K_p \otimes A,$$

где K_p обозначает аддитивную группу поля p-адических чисел. При естественном отождествлении группу E можно считать делимой оболочкой группы A. Мы также имеем $A \subseteq A_p \subseteq A_p^* \subseteq E_p^*$. Будем записывать элементы группы A_p как конечные суммы $\sum q_i a_i$, где $q_i \in \mathbf{Q}_p$ и $a_i \in A$.

Лемма 93.1. *Если группы A_p рассматривать как подгруппы группы E, то $A = \bigcap_p A_p$.*

Пусть $x \in \bigcap_p A_p$. Для некоторого простого числа p запишем $x = \sum q_i a_i$, $q_i \in \mathbf{Q}_p$, $a_i \in A$. Существует такое целое число s, взаимно простое с p, что $sx \in A$. Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — все простые делители числа s. Для простого числа p_j выберем такое целое число s_j, взаимно простое с p_j, что $s_j x \in A$, $j = 1, \ldots, m$. Поскольку целые числа s, $s_1, \ldots, s_m$ взаимно просты, нетрудно установить включение $x \in A$. ∎

Лемма 93.2 (Дэрри [1]). *Для каждого простого числа p имеет место равенство $E \cap A_p^* = A_p$.*

Элемент $x \in A_p^*$ запишем в виде $x = \sum_{i=1}^{n} \pi_i a_i$, где $\pi_i \in Q_p^*$ и $a_i \in A$. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — независимые элементы группы A, а элементы $a_{k+1}, \ldots, a_n$ зависят от первых k элементов. Тогда без ограничения общности мы можем считать, что $\pi_{k+1}, \ldots, \pi_n$ — рациональные числа. Пусть $x \in E$. Тогда элемент x зависит от максимальной независимой системы $\{a_1, \ldots, a_k, a'_{k+1}, \ldots\}$ элементов группы A, скажем

$$x = \sum_{i=1}^{k} m_i a_i + \sum_{i=k+1}^{r} m_i a'_i, \quad \text{где } m_i \text{ — рациональные числа.}$$

При отождествлении $1 \otimes a \leftrightarrow a$ максимальная независимая система элементов группы A превращается в максимальную независимую систему элементов K_p-модуля E_p^* [где K_p — поле p-адических чисел]. Следовательно, возможно лишь одно соотношение зависимости элемента x от указанной системы. Таким образом, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — рациональные числа и $x \in A_p$. Мы доказали включение $E \cap A_p^* \subseteq A_p$. ∎

Последний вспомогательный результат носит структурный характер.

Лемма 93.3 (Прюфер [3]). *Редуцированный счетно порожденный Q_p^*-модуль без кручения свободен.*

Q_p^*-модуль без кручения ранга 1 является либо циклическим, либо инъективным модулем, так как все Q_p^*-модули, заключенные между J_p и K_p и не совпадающие с K_p, изоморфны J_p. Поскольку модуль J_p алгебраически компактен, мы легко получаем, что Q_p^*-модули без кручения ранга 1 выделяются прямыми слагаемыми везде, где они сервантны. Таким образом, конечно порожденные Q_p^*-модули без кручения свободны. Это же верно для редуцированных Q_p^*-модулей конечного ранга. Оставшаяся часть доказательства проводится аналогично тому, как доказывалась теорема 19.1. ∎

С этого места и до конца параграфа мы будем считать, что ранг r группы A не более чем счетен. Символ $\{a_i\}$ будет обозначать максимальную независимую систему элементов в группе E [или в группе A]. Здесь $i = 1, \ldots, r$ или $i = 1, 2, \ldots$ в соответствии с тем, конечен ранг r или нет.

Q_p^*-модуль A_p^* также имеет ранг r, и в силу леммы 93.3 его редуцированная часть свободна. Следовательно, существуют такие элементы $v_n, w_m \in A_p^*$, что имеет место разложение

$$A_p^* = \bigoplus_n K_p v_n \oplus \bigoplus_m Q_p^* w_m, \tag{1}$$

где n и m пробегают множества индексов мощностей, скажем, k_p и l_p соответственно и при этом $k_p + l_p = r$. [Для упрощения обозначений мы не указываем на зависимость элементов v_n и w_m от простого числа p.] Итак, мы можем записать

$$a_i = \sum_n \alpha_{in} v_n + \sum_m \beta_{im} w_m \quad (\alpha_{in}, \beta_{im} \in K_p), \tag{2}$$

где для фиксированного индекса i почти все коэффициенты α_{in}, β_{im} равны нулю. [Если $a_i \in A$, то $\beta_{im} \in \mathbb{Q}_p^*$.] Мы получаем таким образом $r \times r$-матрицу

$$\mathbb{M}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \ldots & \beta_{11} \ldots \beta_{1m} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i1} \ldots \alpha_{in} \ldots & \beta_{i1} \ldots \beta_{im} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}}_{k_p \qquad\qquad l_p} \quad (\alpha_{in}, \beta_{im} \in \mathsf{K}_p), \tag{3}$$

в которой каждая строка содержит лишь конечное число элементов, отличных от нуля [такая матрица называется конечно-строчной]. Поскольку система $\{v_n, w_m\}$ также является максимальной независимой над K_p системой в модуле A_p^*, эта матрица обратима над K_p. Итак, мы получили соответствие

$$A \mapsto (\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_3, \ldots, \mathbb{M}_p, \ldots), \tag{4}$$

где для каждого простого числа p матрица $\mathbb{M}_p$ состоит из p-адических чисел, обратима и конечно-строчна.

Соответствие (4) зависит не только от выбора системы $\{a_i\}$, но также от выбора системы $\{v_n, w_m\}$ для каждого простого числа p. Мы намерены выяснить теперь, как изменяется матрица (3) при переходе к новой максимальной независимой системе $\{a_i'\}$ и новой системе $\{v_n', w_m'\}$. Из соображений простоты r-мерные вектор-столбцы с координатами a_i и a_i' соответственно мы обозначим через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$. Мы также обозначим через $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix}$ вектор-столбцы с координатами v_n, w_m и v_n', w_m' соответственно.

Существует обратимая конечно-строчная $r \times r$-матрица $\mathbb{B}$, состоящая из рациональных чисел, которая переводит $\mathbf{a}$ в $\mathbf{a}'$, т. е.

$$\mathbf{a}' = \mathbb{B}\mathbf{a}.$$

Аналогично, для некоторой $r \times r$-матрицы $\mathbb{C}_p$, состоящей из p-адических чисел, обратимой и строчно-конечной, имеем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_p \begin{bmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix}.$$

Эта матрица $\mathbb{C}_p$ должна иметь обратную матрицу, удовлетворяющую аналогичному равенству. Следовательно, матрица $\mathbb{C}_p$ имеет вид

$$\mathbb{C}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{V} & 0 \\ \mathbb{W}_1 & \mathbb{W}_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}_2$ — матрицы над $\mathbb{Q}_p^*$ размеров $k_p \times k_p$ и $l_p \times l_p$ соответственно, обладающие обратными матрицами, элементы которых также лежат в $\mathbb{Q}_p^*$, а $\mathbb{W}_1$ есть $l_p \times k_p$-матрица над K_p. Каждая из матриц $\mathbb{V}$,

$\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$ является конечно-строчной. Матрицы $\mathbb{C}_p$ вида (5) образуют группу $\Gamma_p(k_p, l_p)$ относительно умножения матриц.

Очевидно, вектор $\mathbf{a} = \mathbb{M}_p \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ переходит в вектор $\mathbf{a}' = \mathbb{B}\mathbf{a} = \mathbb{B}\mathbb{M}_p\mathbb{C}_p \begin{bmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix}$. Соответствие (4) принимает вид $A \mapsto \{\mathbb{M}'_2, \ldots, \mathbb{M}'_p, \ldots\}$, где $\mathbb{M}'_p = \mathbb{B}\mathbb{M}_p\mathbb{C}_p$ для всех простых p. Ввиду сказанного две последовательности матриц $\{\mathbb{M}_2, \ldots, \mathbb{M}_p, \ldots\}$ и $\{\mathbb{M}'_2, \ldots, \mathbb{M}'_p, \ldots\}$ назовем *эквивалентными*, если существуют такая обратимая конечно-строчная $r \times r$-матрица $\mathbb{B}$ с рациональными элементами и такие матрицы $\mathbb{C}_p \in \Gamma_p(k_p, l_p)$, где p пробегает все простые числа, что для каждого простого числа p имеет место равенство

$$\mathbb{M}'_p = \mathbb{B}\mathbb{M}_p\mathbb{C}_p.$$

Это понятие эквивалентности дает нам возможность получить следующий результат.

Теорема 93.4. *Ранги k_p и l_p [удовлетворяющие равенству $k_p + l_p = r(A)$], где p пробегает все простые числа, а также класс эквивалентности последовательностей матриц из соответствия* (4) *образуют полную систему инвариантов для счетных групп без кручения A.*

Из предыдущих рассмотрений очевидным образом следует инвариантность рангов k_p и l_p, а также класса эквивалентности последовательностей матриц из соответствия (4). Итак, нам остается доказать, что группы A и A' изоморфны, если они для каждого простого числа p имеют одинаковые ранги k_p и l_p, а соответствующие последовательности матриц $\{\mathbb{M}_2, \ldots, \mathbb{M}_p, \ldots\}$ и $\{\mathbb{M}'_2, \ldots, \mathbb{M}'_p, \ldots\}$ эквивалентны. Более того, достаточно рассмотреть случай, когда эти последовательности совпадают. Для группы A' образуем группы A'_p, A'^*_p, E', E'^*_p. Из определений видно, что группы E и E' имеют максимальные независимые системы $\{a_i\}$ и $\{a'_i\}$ соответственно, а для групп A_p и A'_p имеют место разложения вида (1). При этом для соответствующих векторов выполняются равенства $\mathbf{a} = \mathbb{M}_p \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ и $\mathbf{a}' = \mathbb{M}_p \begin{bmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix}$.

Соответствие $a_i \mapsto a'_i$ (при всех i) можно продолжить единственным образом до изоморфизма $\varphi\colon E \to E'$. Этот изоморфизм в свою очередь индуцирует единственный $\mathbb{Q}^*_p$-изоморфизм $\varphi^*_p\colon E^*_p \to E'^*_p$. Поскольку матрицы перехода от вектора $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ к вектору $\mathbf{a}$ и от вектора $\begin{bmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix}$ к вектору $\mathbf{a}'$ одинаковы, изоморфизм φ_p переводит элемент v_n в элемент v'_n, а элемент w_m в элемент w'_m. Отсюда следует, что $\varphi_p \mid A^*_p$ является изоморфизмом между A^*_p и A'^*_p. Следовательно, φ_p, а значит, и φ, изоморфно отображает группу $A_p = E \cap A^*_p$ на группу

$A'_p = E' \cap A'^*_p$ [см. лемму 93.2]. Мы получаем, что φ изоморфно отображает группу $A = \bigcap_p A_p$ на группу $A' = \bigcap_p A'_p$ [см. лемму 93.1]. ∎

Решая обратную задачу, можно задаться вопросом: каковы последовательности матриц, соответствующие счетным группам без кручения. Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема 93.5 (Курош [2]). *Пусть для каждого простого числа p даны конечные или счетные кардинальные числа k_p и l_p, причем сумма $k_p + l_p = r$ не зависит от p. Пусть $\{\mathbb{M}_2, \ldots, \mathbb{M}_p, \ldots\}$ — последовательность матриц вида (3). Эта последовательность соответствует некоторой счетной группе без кручения A в том и только в том случае, когда она эквивалентна последовательности $\{\mathbb{M}'_2, \ldots, \mathbb{M}'_p, \ldots\}$, для которой при каждом простом числе p элементы β'_{im} в последних l_p столбцах матрицы $\mathbb{M}'_p$ являются целыми p-адическими числами.*

При соответствующем выборе системы $\{a_i\}$ в группе A получаем необходимость условий теоремы. Докажем достаточность. Пусть даны числа k_p, l_p и последовательность $\{\mathbb{M}_2, \ldots, \mathbb{M}_p, \ldots\}$, где $\mathbb{M}_p$ — матрицы вида (3), причем $\beta_{im} \in \mathbf{Q}^*_p$. Сначала возьмем делимую группу $E = \oplus Qa_i$ ранга r. Для каждого простого числа p образуем группу $E^*_p = K_p \otimes E = \oplus K_p a_i$. Группу E можно рассматривать как подгруппу группы E^*_p. Матрица $\mathbb{M}_p$ обратима и конечно-строчна. Следовательно, существуют k_p- и l_p-мерные векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ соответственно, для которых $\mathbf{a} = \mathbb{M}_p \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$, где $\mathbf{a}$ — вектор-столбец из элементов a_i. С помощью координат векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ определим группу A^*_p в соответствии с равенством (1). Положим $A_p = E \cap A^*_p$. Покажем, что группа $A = \bigcap_p A_p$ обладает требуемыми свойствами.

Благодаря условию на матрицу $\mathbb{M}_p$ имеем $a_i \in A^*_p$. Отсюда следует, что $a_i \in A$, группа A имеет ранг r и E — делимая оболочка группы A. Таким образом, включение $J_p \otimes A \subseteq A^*_p$ очевидно. В силу $Q_p \otimes A \subseteq E$ и $Q_p \otimes A \subseteq J_p \otimes A$ мы получаем также $Q_p \otimes A \subseteq E \cap A^*_p = A_p$. Покажем, что последнее включение на самом деле — равенство. Элемент $b \in A_p$ запишем в виде $b = p^k n^{-1} a$, где $(n, p) = 1$ и $a \in A$. Если $k \geqslant 0$, то $b \in Q_p \otimes A$, так как $n^{-1} \in \mathbf{Q}_p$. Если $k < 0$, то $p^k a \in A$, так как $p^k a \in A_q$ для всех простых чисел $q \neq p$ и $p^k a = nb \in A_p$. Итак, $b \in Q_p \otimes A$, следовательно, $Q_p \otimes A = A_p$. Для завершения доказательства теоремы 93.5 нам остается доказать включение $A^*_p \subseteq J_p \otimes A$. Элемент $c \in A^*_p$ представим в виде $c = \sum_{i=1}^{m} \rho_i a_i$, где $\rho_i \in \mathbf{K}_p$. Пусть $\rho_i = p^{-l} s_i + \sigma_i$, где s_i — целое рациональное число, а σ_i — целое p-адическое число. Тогда $c - p^{-l} \sum s_i a_i = \sum \sigma_i a_i \in J_p \otimes A \subseteq A^*_p$. Отсюда следует, что $p^{-l} \sum s_i a_i \in A^*_p \cap E = A_p \subseteq J_p \otimes A$, и мы получаем $c \in J_p \otimes A$. ∎

Пример. Пусть A — вполне разложимая группа конечного ранга r, $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$, где $r(A_i) = 1$. В этом случае группа A_p^* является прямой суммой k_p групп, изоморфных группе K_p, и $l_p = r - k_p$ групп, изоморфных группе J. Здесь k_p — число тех A_i, для которых $pA_i = A_i$. Пусть $\{a_1, \ldots, a_r\}$, где $a_i \in A_i$, — максимальная независимая система. В соотношении (1) выберем в качестве каждого v_n некоторое a_i, а каждого w_m — некоторое $p^{-e}a_i$ [где $e = h_p(a_i)$]. В этом случае матрица $\mathbb{M}_p$ диагональна и ее ненулевыми элементами являются либо единицы, либо степени числа p. По этим степеням можно определить типы групп A_i.

В заключение мы снова хотим подчеркнуть следующее: в том, что касается структурных вопросов, теория имеет невысокую практическую ценность. Из этой теории не удается извлечь удобного способа, с помощью которого можно было бы решить, изоморфны ли две счетные группы без кручения. В действительности, даже для случая групп ранга 2 приведенные результаты не удовлетворительны.

Упражнения

1. Пусть A — группа конечного ранга и B_p — ее p-базисная подгруппа. Показать, что $l_p = r(B_p)$ и $k_p = r(A/B_p)$.

2. Описать последовательности (4) матриц, которые соответствуют группам из § 88.

3. Пусть C — подгруппа счетной группы без кручения A. Тогда $k_p(C) \leqslant k_p(A)$ для каждого простого числа p. Аналогичное неравенство справедливо для l_p, если подгруппа C сервантна в группе A.

4. Группа A конечного ранга разлагается в нетривиальную прямую сумму групп в том и только в том случае, когда в соответствующем ей классе эквивалентности последовательностей матриц найдется последовательность $\{\mathbb{M}_2, \ldots, \mathbb{M}_p, \ldots\}$ со следующим свойством: все матрицы $\mathbb{M}_p$ с помощью одинаковых перестановок строк и столбцов можно привести к виду

$$\mathbb{M}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{N}_p & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{L}_p \end{bmatrix},$$

где $\mathbb{N}_p$ и $\mathbb{L}_p$ — квадратные матрицы порядка m и $r - m$ соответственно, причем $0 < m < r$ и эти порядки не зависят от p.

5 (Курош [2]). (а) Пусть A — группа конечного ранга r и $k_p = r - 1$, $l_p = 1$ для некоторого простого числа p. Если группа A разлагается в прямую сумму групп, то в подходящем базисе матрица $\mathbb{M}_p$ будет иметь вид, указанный в упр. 4. В любой матрице, эквивалентной матрице $\mathbb{M}_p$, столбец из элементов β содержит не более чем $r - m$ рационально независимых p-адических чисел.

(б) Вывести из этого существование неразложимых групп без кручения произвольного конечного ранга.

6. Кардинальные числа k_p и l_p инвариантны относительно квазиизоморфизмов.

7 (Ротман [4]). Пусть A — группа без кручения конечного ранга n и $0 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = A$ — такая последовательность сервантных подгрупп группы A, что все факторы этой последователь-

ности имеют ранг 1. Тогда для каждого простого числа p число p-делимых факторов — инвариант группы A.

8 (Чекереш [1]). Подполе поля K_p, полученное присоединением к полю $\mathbf{Q}$ чисел β_{im} из последних l_p столбцов матрицы $\mathbb{M}_p$,— инвариант группы A.

§ 94. Узкие группы

Лось открыл замечательный класс групп без кручения. Это класс узких групп.

Пусть P обозначает прямое произведение счетного числа бесконечных циклических групп,

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle, \quad \text{где} \quad o(e_n) = \infty.$$

Положим $S = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$. Элементы x группы P мы будем записывать либо в виде бесконечномерных векторов $x = (k_1 e_1, \ldots, k_n e_n, \ldots)$, где $k_n \in \mathbf{Z}$, либо как формальные бесконечные суммы $x = \sum_{i=1}^{\infty} k_n e_n$, где $k_n \in \mathbf{Z}$.

Группа без кручения G называется *узкой*, если при любом гомоморфизме η: $P \to G$ для почти всех n выполняется равенство $\eta e_n = 0$. Из определения очевидным образом вытекают следующие утверждения:

а) Подгруппы узких групп узкие.

б) Группа Q рациональных чисел не является узкой.

в) Группа P не является узкой.

г) Группа J_p целых p-адических чисел не является узкой. Действительно, для свободной группы S существует такой гомоморфизм φ: $S \to J_p$, что $\varphi e_n \neq 0$ при всех n. Поскольку S — сервантная подгруппа группы P, а J_p — сервантно инъективная группа, гомоморфизм φ можно продолжить до гомоморфизма η: $P \to J_p$.

д) *Узкая группа не может содержать никакой подгруппы, изоморфной Q, P или J_p.* В частности, узкая группа не содержит никакой ненулевой алгебраически компактной группы [см. следствие 40.4].

В силу последнего замечания справедлив следующий результат — частный случай теоремы 94.4.

е) *Пусть η — такой гомоморфизм группы P в узкую группу G, что $\eta S = 0$. Тогда $\eta = 0$. Следовательно, любой эпиморфный образ группы P в узкой группе G конечно порожден.*

Пусть $\eta S = 0$. Тогда $\operatorname{Im} \eta$ является эпиморфным образом алгебраически компактной группы P/S [см. следствие 42.2]. Таким образом, $\operatorname{Im} \eta$ в силу предложения 54.1 — копериодическая группа. По следствию 54.5 копериодическая группа без кручения алгебраически

компактна, и в силу $\operatorname{Im} \eta \subseteq G$ справедливо равенство $\operatorname{Im} \eta = 0$. Пользуясь определением узкой группы, второе утверждение получаем как простое следствие первого.

Полезным следствием из п. е) является

Лемма 94.1. *Произвольный гомоморфизм η из группы P в некоторую узкую группу полностью определяется ограничением $\eta \mid S$.* ∎

Заметим, что благодаря лемме 94.1 для каждого гомоморфизма η: $P \to G$, где G — узкая группа, можно записать

$$\eta\left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n (\eta e_n).$$

В правой части этого равенства почти все слагаемые равны нулю.

С помощью следующего результата можно построить довольно много узких групп.

Предложение 94.2 (Сонсяда [4]). *Счетная группа [точнее, группа, мощность которой меньше мощности континуума] является узкой в том и только в том случае, когда она редуцированная.*

Необходимость условий очевидна. Докажем достаточность.

Пусть G — редуцированная группа мощности $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ и η: $P \to G$ — такой гомоморфизм, что для бесконечного числа номеров n имеет место условие $\eta e_n \neq 0$. Опуская те циклические группы $\langle e_n \rangle$, для которых $\eta e_n = 0$, мы можем считать, что $\eta e_n \neq 0$ для всех n.

В силу редуцированности группы G имеем $\bigcap_m mG = 0$. Следовательно, существует такая последовательность целых чисел $1 = k_1 < \ldots < k_n < \ldots$, что $\eta\,(k_n! e_n) \notin k_{n+1}G$ при $n = 1, 2, \ldots$. Множество таких элементов $(g_1, \ldots, g_n, \ldots) \in P$, что при каждом n либо $g_n = 0$, либо $g_n = k_n!\, e_n$, имеет мощность континуума. Значит, в этом множестве найдутся два различных элемента из P, образы которых при гомоморфизме η совпадают. Пусть $a = (h_1, \ldots, h_n, \ldots)$ — разность этих элементов. Тогда при каждом n либо $h_n = 0$, либо $h_n = \pm k_n!\, e_n$ и, очевидно, $\eta a = 0$. Это невозможно. Действительно, пусть m — наименьший индекс, для которого $h_m \neq 0$. Тогда $\eta h_m \notin k_{m+1}G$ и в то же время

$$\eta h_m = \eta a - \eta\,(0, \ldots, 0, h_{m+1}, \ldots) = -\eta\,(0, \ldots, 0, h_{m+1}, \ldots) \in k_{m+1}G. \quad ∎$$

Следующий результат позволяет строить узкие группы произвольно больших мощностей.

Теорема 94.3 (Фукс [16]). *Прямые суммы узких групп узки.*

Пусть G_i $(i \in I)$ — узкие группы и $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$. Через π_i обозначим i-ю координатную проекцию $G \to G_i$. Пусть дан гомоморфизм η: $P \to G$. Из п. е) следует, что $\pi_i \eta P$ — конечно порожденные свобод-

ные подгруппы группы G. Кроме того, $\operatorname{Im}\eta \subseteq \bigoplus_i \pi_i\eta P$. Группа $\operatorname{Im}\eta$ конечно порожденная, иначе существовал бы эпиморфизм группы P на свободную группу счетного ранга, что противоречит предложению 94.2. Отсюда следует, что $\pi_i\eta = 0$ для почти всех $i \in I$, и η можно рассматривать как гомоморфизм группы P в прямую сумму конечного числа групп G_i, скажем $G_1 \oplus \ldots \oplus G_m$. Так как почти все элементы $\pi_1\eta e_n, \ldots, \pi_m\eta e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равны нулю, то $\eta e_n = 0$ для почти всех n. Итак, мы доказали, что G — узкая группа. ∎

Из последней теоремы сразу следует, что подгруппы прямых сумм счетных редуцированных групп узки.

Для множества индексов I мощности $\aleph_\sigma$ обозначим через P_σ и S_σ прямое произведение и прямую сумму соответственно групп без кручения A_i, где $i \in I$.

Напомним, что кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется *измеримым*, если множество X мощности $\mathfrak{m}$ допускает счетно аддитивную меру μ, принимающую лишь два значения 0 и 1 и такую, что

$$\mu(X) = 1, \quad \mu(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Из определения измеримости следует, что если кардинальное число неизмеримо, то и все кардинальные числа, меньшие, чем оно, также неизмеримы. Таким образом, если измеримые кардинальные числа вообще существуют, то среди них есть наименьшее и все большие его измеримы. Пока не известно, выводимо или нет существование измеримых кардинальных чисел из обычных аксиом теории множеств. Допустив существование сильно недостижимых кардинальных чисел, можно показать, что многие из них неизмеримы. [См. Куратовский К. и Мостовский А., Теория множеств, М., «Мир», 1970.]

Следующая теорема является основным результатом об узких группах.

Теорема 94.4 (Лось). *Пусть дан гомоморфизм* $\eta\colon P_\sigma \to G$, *где* G — *узкая группа. Справедливы следующие утверждения:*

1) *Равенство* $\eta A_i = 0$ *имеет место для почти всех* i.

2) *Если* $\aleph_\sigma$ — *неизмеримое кардинальное число и* $\eta S_\sigma = 0$, *то* $\eta = 0$.

Докажем первое утверждение. Допустим, что для бесконечного множества индексов i, скажем $i = i_1, \ldots, i_n, \ldots$, выполняется $\eta A_i \neq 0$. Выберем такие элементы $e_n \in A_{i_n}$, что $\eta e_n \neq 0$. Тогда ограничение гомоморфизма η на подгруппу $P' = \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$ окажется таким гомоморфизмом группы P' в G, которого не может быть.

Второе утверждение также доказывается от противного, но гораздо более изощренным способом. Допустим, что $\eta S_\sigma = 0$ и существует такой элемент $a \in P_\sigma$, что $\eta a \neq 0$. На подмножествах множества I следующим образом введем меру ν со значениями в группе G. Для подмножества J множества I положим $\nu(J) = \eta a_J$, где j-е координаты элемента a_J совпадают с j-ми координатами элемента a при $j \in J$,

а остальные координаты элемента a_J равны нулю. Для попарно непересекающихся подмножеств $J_1, \ldots, J_k$ множества I имеем

$$\nu(J_1 \cup \ldots \cup J_k) = \eta(a_{J_1 \cup \ldots \cup J_k}) = \\ = \eta(a_{J_1} + \ldots + a_{J_k}) = \nu(J_1) + \ldots + \nu(J_k).$$

Значит, мера ν аддитивна. Покажем, что она счетно аддитивна [т. е. σ-аддитивна]. Пусть $J_1, \ldots, J_k, \ldots$ — счетное семейство попарно непересекающихся подмножеств множества I, J_0 — дополнение к объединению этого семейства в множестве I. Тогда $P_0 = \prod_{k=0}^{\infty} \langle a_{J_k} \rangle$ — подгруппа группы P_σ. Мы заключаем, что почти все элементы $\eta a_{J_k} = \nu(J_k)$ равны нулю, и в силу леммы 94.1 должно выполняться равенство $\eta a = \sum_{k=0}^{\infty} \eta a_{J_k}$. Следовательно, мера ν счетно аддитивна.

Рассмотрим все такие подмножества J множества I, что $\nu(J') = 0$ для всех подмножеств J' множества J. Эти подмножества J образуют счетно аддитивный идеал **I** в булевой алгебре **B** всех подмножеств множества I. Мера ν индуцирует счетно аддитивную меру $\bar{\nu}$ на фактор-алгебре **B**/**I** со значениями в группе G. Пусть $\bar{J}_k$ — попарно непересекающиеся элементы из **B**/**I**. Выберем подмножества $\bar{J}'_k$ множеств $\bar{J}_k$, для которых $\bar{\nu}(\bar{J}'_k) \neq 0$, затем в множестве I выберем такие представители J'_k множеств $\bar{J}'_k$, что J'_k по-прежнему являются попарно непересекающимися. Как было показано выше, условие $\nu(J'_k) \neq 0$ может выполняться лишь для конечного множества индексов k. Другими словами, **B**/**I** — конечная булева алгебра. Она имеет, таким образом, лишь конечное число атомов. На этих атомах мера $\bar{\nu}$ принимает ненулевые значения. Из меры $\bar{\nu}$ получим двузначную меру $\bar{\mu}$ на алгебре **B**/**I**: отметим некоторый атом в алгебре **B**/**I** и положим $\bar{\mu}(\bar{J})$ равным 1 или 0 в соответствии с тем, содержит или нет множество $\bar{J}$ отмеченный атом. Мера $\bar{\mu}$ очевидным образом дает меру μ на алгебре **B**, т. е. множество индексов I измеримо. Это противоречит нашим условиям, следовательно, второе утверждение доказано. ∎

Замечание. Отметим, что утверждение 2) — наилучший из возможных результатов в том смысле, что для *измеримого кардинального числа* $\aleph_\sigma$ *из условия* $\eta S_\sigma = 0$ *уже не следует* $\eta = 0$. Покажем это. Для измеримого множества индексов I построим эпиморфизм η группы $P' = Z^I$ на группу Z, переводящий в нуль подгруппу $S' = \bigoplus Z$. Пусть μ — счетно аддитивная двузначная мера на множестве I. Для каждого элемента $a = (\ldots, n_i e_i, \ldots) \in P'$ положим $X_n(a) = \{i \in I \mid n_i = n\}$. Тогда $X_n(a)$ — попарно непересекающиеся подмножества множества I, а их объединение совпадает с I. Отсюда следует, что в точности одно из них, скажем $X_m(a)$, имеет меру 1. Мы полагаем $\eta a = m$. Из свойств меры μ сразу следует, что отображение η сохраняет сложение и $\eta S' = 0$.

Последняя теорема имеет многочисленные следствия. Мы приведем здесь некоторые из них.

Следствие 94.5. *Пусть G — узкая группа и A_i ($i \in I$) — группы без кручения, причем множество I неизмеримо. Существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}\,(\prod_{i\in I} A_i, G) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}\,(A_i, G).$$

Благодаря теореме 94.4 мы знаем, что любой гомоморфизм η: $\prod A_i \to G$ обязательно является гомоморфизмом $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \to G$ для некоторого [зависящего от η] конечного подмножества $\{1, \ldots, n\}$ множества I. ∎

Следствие 94.6 (Зиман [1]). *Пусть I — неизмеримое множество. Тогда существуют естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{Hom}\,(\bigoplus_{i\in I} Z, Z) \cong \prod_{i\in I} Z,$$

$$\mathrm{Hom}\,(\prod_{i\in I} Z, Z) \cong \bigoplus_{i\in I} Z.$$

Существование указанных изоморфизмов следует из теорем 43.1 и 94.5 соответственно. ∎

В заключение приведем результат, отражающий замечательную двойственность между прямыми произведениями и прямыми суммами бесконечных циклических групп.

Следствие 94.7. *Пусть G_i ($i \in I$) — группы без кручения и множество I неизмеримо. Всякое узкое слагаемое группы $\prod_{i\in I} G_i$ изоморфно некоторому слагаемому прямой суммы конечного числа групп G_i.*

Пусть H — узкое слагаемое группы $G = \prod_{i\in I} G_i = H \oplus K$. Тогда по теореме 94.4 проекция π: $G \to H$ переводит в нуль почти все компоненты G_i, а также прямое произведение этих компонент. Это произведение содержится, таким образом, в группе K. Если мы профакторизуем по нему группу G, то получим $H \oplus K' \cong G_{i_1} \oplus \ldots \oplus G_{i_n}$ для некоторой подгруппы $K' \subseteq K$ и некоторого конечного подмножества $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$. ∎

Упражнения

1 (Г. Э. Рейд [1]). Группа без кручения G узка в том и только в том случае, когда для любого гомоморфизма η: $P \to G$ группа $\mathrm{Im}\,\eta$ является конечно порожденной. [*Указание*: конечно порожденные группы узки.]

2. Показать, что группа G узка, когда сервантная подгруппа $H \subseteq G$, а также факторгруппа G/H узки.

3. Используя лишь редуцированные группы, построить классы групп аналогично построению классов Γ_σ в § 86, упр. 13. Показать, что все группы в этих классах узки.

4 (Нунке [2]). Доказать, что группа J_p неузкая. Для этого показать, что соответствие

$$(k_1e_1, \ldots, k_ne_n, \ldots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} p^n k_n$$

является гомоморфизмом группы P в группу J_p.

5 (Йен). Пусть P' — такая подгруппа группы P, что P'/S — максимальная делимая подгруппа группы P/S. Группа G узка в том и только в том случае, когда для каждого гомоморфизма η: $P' \to G$ для почти всех n выполняется равенство $\eta e_n = 0$. [*Указание*: соответствие $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \mapsto (a_1, \ldots, n!a_n, \ldots)$ является мономорфизмом группы P в группу P'.]

6. Доказать, что следствие 94.5 [изоморфизм — естественный!] не имеет места, если группа G не является узкой.

7. Доказать п. е) следующим образом. Выбрать некоторый элемент $x_1 = (k_1e_1, \ldots, k_ne_n, \ldots) \in P$, для которого $\eta x_1 \neq 0$. Показать, что гомоморфизм η индуцирует запрещенный гомоморфизм из группы $\prod \langle x_n \rangle$ в группу G, где $x_n = x_1 - k_1e_1 - \ldots - k_{n-1}e_{n-1}$.

8 (Лось). Пусть G_i $(i \in I)$— узкие группы, а множество I неизмеримо. Тогда группа $\prod G_i$ не имеет истинных слагаемых, содержащих подгруппу $\oplus\, G_i$. [*Указание*: рассуждение то же, что и в доказательстве следствия 94.7.]

9*. Пусть $\aleph_\sigma$ — неизмеримое кардинальное число. Допустим, что $2^{\aleph_\sigma} = \aleph_{\sigma+1}$. Установить существование $\aleph_{\sigma+1}$-сервантных подгрупп, не являющихся $\aleph_{\sigma+2}$-сервантными. [*Указание*: пусть $\bigoplus_{\mathbf{K}} Z \subset Z^{\mathfrak{m}}$, где $\mathbf{K}$ — идеал всех подмножеств мощности $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} = \aleph_{\sigma+1}$; применить упр. 8.]

10 (Корнер [2]). Пусть $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — бесконечные кардинальные числа, для которых $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{n}}$. Показать, что группа $Z^{\mathfrak{m}}$ обладает подгруппой ранга $\mathfrak{n}$, не содержащейся ни в каком собственном слагаемом.

11. (а) Пусть $P' = Z^{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ — неизмеримое кардинальное число. Показать, что каждое слагаемое группы P' снова является прямым произведением бесконечных циклических групп.

(б) В произвольном прямом разложении группы P' имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых, и одно из них должно быть изоморфно группе P'. [*Указание*: следствие 94.6.]

12 (Рейд Г. Э. [1]). Рассмотреть класс групп вида $\mathrm{Hom}(A, Z)$, где множество элементов группы A неизмеримо. Показать, что этот класс замкнут относительно взятия прямых сумм и прямых произведений.

13 (Рейд Г. Э. [1]). Пусть $A = Z^{\aleph_1}/\bigoplus_{\mathbf{K}} Z$, где $\mathbf{K}$ — идеал всех счетных подмножеств множества мощности $\aleph_1$. Показать, что группа A является $\aleph_1$-свободной и удовлетворяет равенству $\mathrm{Hom}(A, Z) = 0$.

14. (а) (Лось [1]) Прямое произведение счетных групп без кручения разлагается в прямую сумму счетных групп в том и только в том случае, когда почти все компоненты делимы. [*Указание*: редуцированная часть должна быть узкой.]

(б) Прямое произведение бесконечного числа ненулевых групп без кручения не может быть вложено в прямую сумму счетных редуцированных групп без кручения.

15 (Сонсяда [7]). Пусть p, q и r — такие же, как в упр. 10 § 90. Показать, что если $X_i = \langle p^{-\infty}x_i, q^{-\infty}y_i, r^{-1}(x_i + y_i)\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то всякое счетное слагаемое группы $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ изоморфно некоторой конечной сумме $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} X_i$. [*Указание*: следствие 94.7 и упр. 10 из § 90.]

16 (Сонсяда [7]). Пусть $A \oplus B = C \oplus D$, где A, B, C, D — неразложимые группы рангов 1, 3, 2 и 2 соответственно. Допустим, что любое неразложимое слагаемое группы $C \oplus \ldots \oplus C$ [с произвольным конечным числом слагаемых] изоморфно группе C, и то же верно для D. [Такой группой, например, является группа X_i из упр. 10 § 90.] При $C_i \cong C$ и $D_i \cong D$ положим $G = \prod\limits_{i=1}^{\infty} C_i \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ и $H = G \oplus A$. Показать, что каждая из групп G и H изоморфна некоторому слагаемому другой, но сами они не изоморфны. [*Указание*: запишем $\prod C_i \oplus \oplus D_i = \prod C_i' \oplus \oplus D_i' \oplus A$. Из того что группа $\oplus D_i' \oplus \oplus A$ узкая, вывести, что для некоторого n имеет место равенство

$$\bigoplus_{i=1}^{n} C_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} D_i = K \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} D_i' \oplus A,$$

где K — счетное прямое слагаемое группы $\prod C_i$. Применить упр. 15 к группе K и получить, что $r(K)$ — четное натуральное число и $K \oplus L \oplus A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i \oplus \bigoplus\limits_{j=1}^{m} D_j$; здесь ранг $r(L)$ четен, что дает противоречие.]

§ 95. Характеризация узких групп с помощью подгрупп

Настоящий параграф посвящен интересной характеризации узких групп. В своей работе [2] Нунке обнаружил, что среди всех групп без кручения узкие группы и только они не содержат Q, P или J_p ни для какого простого числа p. Доказательство этого факта основано на описании эпиморфных образов прямого произведения $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \langle e_n\rangle$ бесконечных циклических групп $\langle e_n\rangle$.

Заметим следующее. Пусть x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — элементы группы P. Тогда бесконечная сумма

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n \quad (s_n \in \mathbf{Z}) \tag{1}$$

имеет смысл в P в том и только в том случае, когда для каждого натурального числа m у почти всех элементов $s_n x_n$ координата с номером m равна нулю. Если для каждого m у почти всех элементов x_n координата с номером m равна нулю, то сумма (1) имеет смысл при любом выборе коэффициентов $s_n \in \mathbf{Z}$. В последнем случае подгруппу X, состоящую из всех таких сумм, мы можем обозначить через $\prod_{i=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$. Будем говорить, что X — *произведение* в группе P.

Лемма 95.1. *Пусть X — произведение в группе P. Существуют элементы $a_n \in P$ и целые числа k_n $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых*

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle \quad и \quad X = \prod_{n=1}^{\infty} \langle k_n a_n \rangle,$$

где $k_n \mid k_{n+i}$, если $k_n \neq 0$ при всех n, $i \geqslant 1$.

Если X — произведение конечного числа циклических групп, то в силу теоремы 19.2 и леммы 15.4 утверждение очевидно. Пусть X — бесконечное произведение. Если у всех элементов из X первая координата равна нулю, положим $a_1 = e_1$ и $k_1 = 0$. Если это не так, пусть $x = (l_1 e_1, \ldots, l_n e_n, \ldots) \in X$ — такой элемент, что среди всех элементов из X он обладает наименьшим наибольшим общим делителем $l > 0$ своих координат l_i. Тогда при некотором m имеем $l = (l_1, \ldots, l_m)$. В силу леммы 15.3 найдутся такие элементы $e'_1, \ldots, e'_m \in P$, что $\langle e'_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e'_m \rangle = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_m \rangle$, причем $l e'_1 = l_1 e_1 + \ldots + l_m e_m$. Таким образом, в представлении $x = (l'_1 e'_1, \ldots, l'_n e'_n, \ldots)$ [где $e'_n = e_n$ при $n > m$] первая координата есть l. Так же как в доказательстве леммы 15.4, мы получаем, что все координаты (относительно новых элементов e'_n) элементов из X делятся на число l. Положив $a_1 = (e'_1, l'_2 l^{-1} e'_2, \ldots, l'_n l^{-1} e'_n, \ldots)$ и $k_1 = l$, получим $P = \langle a_1 \rangle \oplus P'$ и $X = \langle k_1 a_1 \rangle \oplus X'$, где X' — произведение в группе $P' = \prod_{n=2}^{\infty} \langle e'_n \rangle$. Выберем тем же способом элемент $a_2 \in P'$ и число $k_2 \in \mathbf{Z}$ для групп P' и X'. Бесконечно продолжая этот процесс, найдем требуемые элементы $a_n \in P$ и числа $k_n \in \mathbf{Z}$. ■

Из доказанного результата теперь легко получить описание эпиморфных образов группы P.

Предложение 95.2 (Нунке [2]). *Произвольный эпиморфный образ группы P является прямой суммой копериодической группы и прямого произведения [не более чем счетного числа] бесконечных циклических групп.*

Пусть K — подгруппа группы P. Для каждого n выберем такой элемент

$$x_n = (0, \ldots, 0, s_n e_n, s_{n+1} e_{n+1}, \ldots) \in K,$$

что s_n делит t_n для всех элементов $a = (0, \ldots, 0, t_n e_n, t_{n+1} e_{n+1}, \ldots) \in K$. Если $t_n = 0$ для всех таких элементов $a \in K$, то положим $x_n = 0$. Теперь мы можем построить $X = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$ — произведение в группе P, содержащее подгруппу K. Выберем элементы $a_n \in P$ и числа $k_n \in \mathbf{Z}$, как указано в лемме 95.1. Пусть P_1 — прямое произведение групп $\langle a_n \rangle$, где n пробегает все значения, для которых $k_n \neq 0$, а P_2 — произведение остальных групп $\langle a_n \rangle$. Тогда $P = P_1 \oplus P_2$, причем $X \subseteq P_1$. Остается доказать, что группа P_1/K копериодическая. Из леммы 95.1 видно, что $P_1/X \cong \prod_n Z(k_n)$, следовательно, P_1/X — алгебраически компактная группа. Поскольку $\bigoplus_n \langle x_n \rangle \subseteq K$, факторгруппа X/K является копериодической как эпиморфный образ алгебраически компактной группы [см. следствие 42.2 и предложение 54.1]. По п. Г) из § 54 получаем, что P_1/K — копериодическая группа. ∎

Отсюда мы получим характеризацию узких групп, обещанную в начале параграфа.

Теорема 95.3 (Нунке [2]). *Группа без кручения узка в том и только в том случае, когда она не содержит никакой подгруппы, изоморфной одной из групп Q, P или J_p, где p — произвольное простое число.*

Необходимость условий очевидна. Допустим, что никакая подгруппа группы G не изоморфна ни одной из групп Q, P или J_p. Пусть дан гомоморфизм η: $P \to G$. В силу предложения 95.2 и следствия 54.5 мы получаем, что $\operatorname{Im} \eta$ — прямая сумма алгебраически компактной группы без кручения и прямого произведения бесконечных циклических групп. Так как подгруппы, изоморфные Q или J_p, отсутствуют, то первое слагаемое в этой сумме равно нулю [см. следствие 40.4]. А так как нет подгрупп, изоморфных P, то $\operatorname{Im} \eta$ — свободная группа конечного ранга. Такая группа узка по предложению 94.2. Следовательно, равенство $\eta e_n = 0$ имеет место для почти всех n. ∎

Достойно упоминания и такое следствие из предложения 95.2.

Следствие 95.4. *Если группа без кручения A содержит такую узкую подгруппу G, что A/G — редуцированная периодическая группа, то она сама является узкой группой.*

Пусть дан гомоморфизм η: $P \to A$, а φ: $A \to A/G$ — естественный эпиморфизм. Из предложения 95.2 следует, что $\operatorname{Im} \varphi\eta$ — копериодическая группа. Если копериодическая группа является редуцированной периодической, то она ограничена [см. следствие 54.4]. Отсюда следует, что найдется такое целое число n, что $n\eta$ является гомоморфизмом группы P в группу G. Ввиду того что G — узкая группа, мы сразу получаем наше утверждение. ∎

Упражнения

1 (Нунке [4]). Каждая подгруппа группы P, имеющая бесконечный ранг, изоморфна некоторой подгруппе, содержащей подгруппу S.

2 (Нунке [4]). Введем в группе Z дискретную топологию, а в группе P — соответствующую топологию произведения.

(а) Каждый гомоморфизм $P \to Z$ непрерывен.

(б) Эндоморфизмы группы P непрерывны.

(в) Топология в группе P не зависит от способа представления группы P в виде прямого произведения бесконечных циклических групп.

3 (Рейд Г. Э. [1]). Показать, что в условии теоремы 93.5 ни одна из групп Q, P, J_p не может быть опущена. [*Указание*: включение $J_p \subseteq P$ невозможно, поскольку группа P является $\aleph_1$-свободной. Следующим образом доказать, что не существует мономорфизма λ: $P \to J_p$: (1) показать, что для каждого n при почти всех k выполняется $\lambda e_k \in p^n J_p$; (2) выбрать такие последовательности $k_1 < k_2 < \ldots$ и $n_1 < n_2 < \ldots$, что $\lambda (m_i e_{n_i}) - p^{k_i} \in p^{k_{i+1}} J_p$ при подходящих $m_i \in \mathbf{Z}$; (3) найти целые числа l_i, для которых $\lambda (\sum l_i m_i e_{n_i}) = 0$.]

4 (Шпекер [1]). Элемент $a = \sum m_k e_k \in P$ назовем *монотонным*, если $0 < m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_k \leqslant \ldots$. Будем говорить, что подгруппа $T \subseteq P$ *монотонна*, если (1) $\sum m_k e_k \in T$ влечет за собой $\sum n_k e_k \in T$, где $n_k = \max(1, |m_1|, \ldots, |m_k|)$ и (2) если $\sum n_k e_k \in T$ и $0 \leqslant m_k \leqslant n_k$ при всех k, то $\sum m_k e_k \in T$.

(а) Показать, что для рационального числа $r \geqslant 0$ множество всех элементов $a = \sum n_k e_k$, где $|n_k| \leqslant s k^r$ при некоторой константе $s > 0$, зависящей от a, является монотонной подгруппой T_r группы P.

(б) Всякая монотонная подгруппа содержит элемент $a = \sum m_k e_k$, где $m_k \geqslant 0$ и $m_k \mid m_{k+1}$ для всех k.

5 (Рейд Г. Э. [1]). Произвольная монотонная собственная подгруппа T группы P является узкой. [*Указание*: выбрать элемент $a = \sum m_k e_k \notin T$ и найти такой элемент $b = \sum \pm m'_k e_k \in P$, где $\{m'_k\}$ — подпоследовательность последовательности $\{m_k\}$, что его образ лежит вне T.

6 (Фукс [27]). (а) Монотонная подгруппа T группы P, отличная от подгруппы T_0 [элементов, координаты которых ограничены в совокупности], удовлетворяет следующему условию. Если G — узкая группа мощности $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, то каждый гомоморфизм η: $T \to G$ переводит в нуль почти все элементы e_k. [*Указание*: то же рассуждение, что и в доказательстве предложения 94.2.]

(б)* Всякий такой гомоморфизм η полностью определяется ограничением $\eta \mid S$.

7 (Шпекер [1]). Произвольная монотонная подгруппа T, отличная от подгруппы T_0, содержит подгруппу мощности $\aleph_1$, не являющуюся свободной. [*Указание*: рассмотреть сервантную подгруппу, порожденную элементами e_k и некоторым элементом $\sum m_k e_k \in T$, где $m_k \mid m_{k+1}$.]

8. (а) (Фукс [27]). Пусть T_1, T_2 — монотонные подгруппы группы P и $\chi\colon T_1 \to T_2$ — такой гомоморфизм, что $S \subseteq \operatorname{Im}\chi$. Тогда $T_1 \subseteq T_2$.

(б) (Шпекер [1]). Две монотонные подгруппы группы P изоморфны в том и только том случае, когда они совпадают.

9* (Шпекер [1]). Семейство неизоморфных монотонных подгрупп группы P имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$, где $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. [*Указание*: найти множество мощности континуума таких элементов группы P, что ни один из них не содержится в монотонной подгруппе, порожденной остальными элементами из этого множества.]

10 (Чейз [4]). Пусть C — такая счетная сервантная подгруппа группы P, что $S \subseteq C$. Пусть, кроме того, X — произвольная счетная группа без кручения. Существует такая сервантная подгруппа A группы P, что $C \subseteq A$ и $A/C \cong X$. [*Указание*: P/C — алгебраически компактная группа без кручения той же структуры, что и группа P/S [см. упр. 7 из § 42], следовательно, группа X может быть вложена в группу P как сервантная подгруппа.]

11 (Чейз [4]). Пусть X_σ ($\sigma < \omega_1$) — счетные группы без кручения. Существует возрастающая цепочка свободных сервантных подгрупп A_σ ($\sigma < \omega_1$) группы P со следующими свойствами:

(1) $A_0 = S$;

(2) $A_\sigma = \bigcup\limits_{\rho<\sigma} A_\sigma$, если σ — предельное порядковое число;

(3) $A_{\sigma+1}/A_\sigma \cong X_\sigma$ при всех $\sigma < \omega_1$.

12 (Гриффит [10]). (а) Пусть A — группа мощности $\aleph_1$, являющаяся прямой суммой счетных групп C_i. Пусть A к тому же является объединением вполне упорядоченной возрастающей цепочки счетных групп A_σ ($\sigma < \omega_1$), для которой выполняется условие (2) из упр. 11. Тогда для каждого счетного порядкового числа ρ найдется такое предельное порядковое число $\sigma > \rho$, что A_σ служит прямым слагаемым для A. [*Указание*: показать, что искомое A_σ является прямой суммой некоторого подмножества групп из множества $\{C_i\}$.]

(б) Используя идею упр. 11, построить группу без кручения, которая не была бы свободной, но была бы объединением возрастающей цепочки счетных свободных сервантных подгрупп.

§ 96. Векторные группы

Под *векторной группой* мы будем подразумевать прямое произведение групп без кручения ранга 1, т. е. группу

$$V = \prod_{i \in I} R_i,$$

где R_i — рациональные группы. Этот параграф посвящен некоторым вопросам, касающимся векторных групп.

Началом наших рассмотрений послужит следующая лемма.

Лемма 96.1. *Если существует нетривиальный гомоморфизм* η *векторной группы* $V=\prod_{i\in I} R_i$ *в векторную группу* $W=\prod_{j\in J} S_j$, *то*

$$\mathbf{t}(R_i) \leqslant \mathbf{t}(S_j) \quad \text{для некоторых} \quad i \in I \quad \text{и} \quad j \in J.$$

Если $\eta \neq 0$, то для некоторого $j \in J$ композиция гомоморфизмов $V \to W \to S_j$ не равна нулю. Следовательно, без потери общности, мы можем считать, что $W = S$ — рациональная группа. Если $S \cong Q$, то доказывать нечего. Пусть S — узкая группа. Выберем такой элемент $v \in V$, что ηv — ненулевой элемент из S. Запишем $v = (\ldots, v_i, \ldots)$, где $v_i \in R_i$, и соберем в одно слагаемое те R_i, для которых совпадают характеристики $\chi(v_i)$. Пусть $T_\chi = \prod_{\chi(v_i)=\chi} R_i$. Мы получаем $V = \prod_\chi T_\chi$, где χ пробегает все характеристики $\chi \geqslant \chi(v)$. [Координате 0 мы приписываем характеристику $(\infty, \ldots, \infty, \ldots)$.] Слагаемых T_χ в последнем произведении не больше, чем континуум. Следовательно, по теореме 94.4 существует конечный набор $\chi_1, \ldots, \chi_k$, для которого образы $\eta T_{\chi_1}, \ldots, \eta T_{\chi_k}$ не равны нулю, но $\eta\left(\prod' T_\chi\right) = 0$ [штрих означает, что $\chi \neq \chi_1, \ldots, \chi_k$]. Представим элемент v в виде $v = (\ldots, v_\chi, \ldots)$, где $v_\chi \in T_\chi$. Тогда получим равенство $\eta v = \eta v_{\chi_1} + \ldots + \eta v_{\chi_k}$. Так как $\eta v \neq 0$, то хотя бы одно из слагаемых также не равно нулю. Пусть $\eta v_{\chi_1} \neq 0$. Из неравенства $\chi(\eta v_{\chi_1}) \geqslant \chi(v_{\chi_1}) = \chi_1$ мы заключаем, что тип группы S не меньше типа, соответствующего характеристике χ_1. Последний является типом любой группы R_i из произведения T_{χ_1}. ∎

Следующий результат не так очевиден, как кажется на первый взгляд.

Предложение 96.2 (Мишина [4]). *Произвольное прямое слагаемое ранга* 1 *векторной группы* $V = \prod_{i\in I} R_i$ *изоморфно одной из групп* R_i.

Соберем группы R_i одного и того же типа $\mathbf{t}$ и обозначим их произведение через $V_\mathbf{t} = \prod_{\mathbf{t}(R_i)=\mathbf{t}} R_i$. Тогда $V = \prod_\mathbf{t} V_\mathbf{t}$, и ненулевых групп $V_\mathbf{t}$ в этом произведении не больше, чем континуум. Пусть $V = A \oplus C$, где A — группа ранга 1. Тогда для проекции ε: $V \to A$ найдется не более чем конечное число ненулевых образов $\varepsilon V_{\mathbf{t}_1}, \ldots, \varepsilon V_{\mathbf{t}_k}$, а произведение остальных групп $V_\mathbf{t}$ гомоморфизм ε переводит в нуль. Следовательно, это произведение содержится в подгруппе C, и мы получаем $V_{\mathbf{t}_1} \oplus \ldots \oplus V_{\mathbf{t}_k} \cong A \oplus C'$ для некоторой подгруппы $C' \subseteq C$. В силу леммы 96.1 неравенство $\mathbf{t}(A) \geqslant \mathbf{t}_j$ имеет место при всех $j = 1, \ldots, k$. Но максимальный тип элементов из группы $V_{\mathbf{t}_j}$ равен $\mathbf{t}_j$. Следовательно, тип группы A не может быть строго больше, чем каждый из типов $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_k$. ∎

Теперь мы установим единственность представления векторной группы в виде произведения рациональных групп.

Теорема 96.3 (Сонсяда [5]). *Если*

$$V=\prod_{\mathbf{t}} V_{\mathbf{t}}=\prod_{\mathbf{t}} W_{\mathbf{t}},$$

где $V_{\mathbf{t}}$ и $W_{\mathbf{t}}$ — прямые произведения групп ранга 1 и типа $\mathbf{t}$, а $\mathbf{t}$ пробегает различные типы, то $V_{\mathbf{t}} \cong W_{\mathbf{t}}$ для каждого типа $\mathbf{t}$.

Пусть $V_{\mathbf{t}} = \prod_{i \in I} R_i$, где R_i — группы ранга 1 фиксированного типа $\mathbf{t}$. Если к тому же $V_{\mathbf{t}} = \prod_{j \in J} S_j$, где $r(S_j) = 1$, то все группы S_j имеют тип $\mathbf{t}$. Более того, при одном из следующих условий:

1. *справедлива обобщенная гипотеза континуума;*

2. *группа $V_{\mathbf{t}}$ не является делимой, а множество I неизмеримо, выполняется равенство $|I| = |J|$.*

Пусть $\pi_{\mathbf{t}}$: $V \to V_{\mathbf{t}}$ и $\rho_{\mathbf{t}}$: $V \to W_{\mathbf{t}}$ — координатные проекции. В силу леммы 96.1 всякий гомоморфизм группы $V_{\mathbf{t}}$ в группу $W_{\mathbf{s}}$, где $\mathbf{s}$ не больше и не равно $\mathbf{t}$, тривиален. Таким образом, $V_{\mathbf{t}} \subseteq \prod_{\mathbf{s} \geqslant \mathbf{t}} W_{\mathbf{s}}$. Элемент $v_{\mathbf{t}} \in V_{\mathbf{t}}$ запишем в виде $v_{\mathbf{t}} = w_{\mathbf{t}} + w'_{\mathbf{t}}$, где $w_{\mathbf{t}} \in W_{\mathbf{t}}$, $w'_{\mathbf{t}} \in \in \prod_{\mathbf{s} > \mathbf{t}} W_{\mathbf{s}}$. Снова по лемме 96.1 для последней группы не существует нетривиального гомоморфизма ни в группу $V_{\mathbf{t}}$, ни в группу $W_{\mathbf{t}}$. Следовательно, $\pi_{\mathbf{t}} w'_{\mathbf{t}} = 0 = \rho_{\mathbf{t}} w'_{\mathbf{t}}$. Отсюда получаем $v_{\mathbf{t}} = \pi_{\mathbf{t}} v_{\mathbf{t}} = \pi_{\mathbf{t}} w_{\mathbf{t}}$ и $w_{\mathbf{t}} = \rho_{\mathbf{t}} w_{\mathbf{t}} = \rho_{\mathbf{t}} v_{\mathbf{t}}$. Таким образом, композиция гомоморфизмов

$$V_{\mathbf{t}} \xrightarrow{\rho_{\mathbf{t}}} W_{\mathbf{t}} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{t}}} V_{\mathbf{t}}$$

есть тождественное отображение группы $V_{\mathbf{t}}$. В силу симметрии сразу получаем изоморфизм $V_{\mathbf{t}} \cong W_{\mathbf{t}}$.

По предложению 96.2 каждая группа S_j имеет тип $\mathbf{t}$. Если множество I конечно, то $|I| = r(V_{\mathbf{t}}) = |J|$. Допустим, что I — бесконечное множество. Тогда, если выполняется условие 1, из равенства $2^{|I|} = |V_{\mathbf{t}}| = 2^{|J|}$ следует равенство $|I| = |J|$. Если выполняется условие 2, то учитывая, что рациональная группа R типа $\mathbf{t}$ узкая, мы получаем

$$\mathrm{Hom}(V_{\mathbf{t}}, R) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Hom}(R_i, R) \cong \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Hom}(S_j, R)$$

в силу следствия 94.5. Прямые суммы в этом равенстве имеют ранги $|I|$ и $|J|$ соответственно. [Заметим, что равенство $2^{|I|} = 2^{|J|}$ влечет за собой неизмеримость множества J при неизмеримом множестве I.] ∎

Мы переходим к задаче отыскания условий, при которых векторные группы сепарабельны. Сначала докажем две вспомогательные леммы; полный ответ будет дан в теореме 96.6.

Лемма 96.4. *Пусть* $V=\prod_{i\in I} R_i$ — *векторная группа, в которой все* R_i — *рациональные группы одного и того же типа* $\mathbf{t}$. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *группа* V *сепарабельна;*
б) *группа* V *однородна;*
в) *тип* $\mathbf{t}$ *идемпотентен.*

Если V — сепарабельная группа и $0\neq v\in V$, то элемент v содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы V. Рациональные составляющие этого слагаемого должны все иметь тип $\mathbf{t}$ в силу предложения 96.2. Итак, а) влечет за собой б).

Пусть теперь выполняется условие б). Допустим, что для типа $\mathbf{t}=(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ неравенства $0<k_n<\infty$ имеют место при бесконечном числе номеров $n_1<n_2<\ldots$. Тогда группа V содержит элемент $v=(\ldots, v_i, \ldots)$ $(v_i\in R_i)$, где $p_{n_j}\nmid v_{i_j}$ при различных индексах $i_1, \ldots, i_j, \ldots \in I$. Мы получаем $\mathbf{t}(v)<\mathbf{t}$, что противоречит условию б).

Пусть, наконец, тип $\mathbf{t}$ идемпотентен. Тогда произвольный элемент $v\in V$ делится на любые степени тех простых чисел, для которых на соответствующих им местах в типе $\mathbf{t}$ стоит ∞. Следовательно, $V(\mathbf{t})=V$, и в силу предложения 87.4 мы сразу получаем условие а). ∎

Лемма 96.5. *Пусть* $V=\prod_{i\in I} R_i$, *где* R_i — *рациональные группы различных типов* $\mathbf{t}_i$. *Если группа* V *сепарабельна, то*

1) *множество типов* $\{\mathbf{t}_i\}_{i\in I}$ *удовлетворяет условию минимальности;*

2) *в множестве типов* $\{\mathbf{t}_i\}_{i\in I}$ *нет ни одного бесконечного подмножества несравнимых типов.*

Обратно, если выполняются условия 1) *и* 2), *а типы* $\mathbf{t}_i$ *идемпотентны, то группа* V *сепарабельна.*

Пусть дана убывающая цепочка $\mathbf{t}_1\geqslant\ldots\geqslant\mathbf{t}_n\geqslant\ldots$ и $W=\prod_{n=1}^{\infty} R_n$, где $\mathbf{t}(R_n)=\mathbf{t}_n$. Выберем некоторый элемент $w=(\ldots, w_n, \ldots)\in W$, где $w_n\in R_n$ и $w_n\neq 0$ при всех n. Если группа V сепарабельна, то и группа W сепарабельна [см. теорему 87.5]. Таким образом, элемент w принадлежит некоторому вполне разложимому прямому слагаемому группы W, имеющему конечный ранг. В силу предложения 96.2 типы рациональных составляющих этого слагаемого должны находиться среди типов $\mathbf{t}_n$. Следовательно, $\mathbf{t}(w)=\mathbf{t}_m$ при некотором m. Так как, кроме того, $\mathbf{t}(w)\leqslant\mathbf{t}_n$ для всех n, то условие 1) выполняется.

Пусть $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n, \ldots$ — несравнимые типы и элемент $w\in W=\prod_{n=1}^{\infty} R_n$, где $\mathbf{t}(R_n)=\mathbf{t}_n$, имеет ненулевую координату в каждом из R_n. Тогда $w\in W'$, где $W=W'\oplus W''$ и W' — прямая сумма рацио-

нальных групп, имеющих типы, скажем, $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_m$. Так как R_n — вполне характеристические подгруппы группы W, то W' — вполне характеристическая подгруппа группы W и $R_n \subseteq W''$ при $n > m$. Мы получаем противоречие с тем, что n-я проекция $W \to R_n$ переводит элемент $w \in W'$ в ненулевую n-ю координату этого элемента.

Пусть типы $\mathbf{t}_i$ идемпотентны и выполняются условия 1) и 2). Чтобы доказать сепарабельность группы V, достаточно убедиться в том, что для каждого ненулевого элемента $v \in V$ существует вполне разложимое прямое слагаемое группы V, которое имеет конечный ранг, содержит элемент v и обладает дополнением, являющимся прямым произведением почти всех групп R_i. Запишем $v = (\ldots, v_i, \ldots)$, где $v_i \in R_i$. В силу леммы 96.4 прямое произведение изоморфных групп ранга 1 идемпотентного типа сепарабельно. Следовательно, ради простоты рассмотрений, мы можем считать, что типы координат $v_i \neq 0$ различны. Заметим, что среди типов $\mathbf{t}(v_i)$, где $v_i \neq 0$, существуют минимальные типы, причем их конечное число, скажем, $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$. Мы получаем, таким образом, разложение $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, в котором каждое V_k есть прямое произведение некоторого подсемейства групп R_i и $v = v' + \ldots + v^{(n)}$, где каждое $v^{(k)} \in V_k$ обладает ровно одним минимальным типом среди типов своих координат. Мы можем, очевидно, свести задачу к аналогичной задаче для элемента $v^{(k)}$. Другими словами, мы можем без потери общности считать, что для элемента $v \in V$ имеется ровно один минимальный тип среди типов $\mathbf{t}(v_i)$; пусть это будет $\mathbf{t}(v_0)$. Запишем $v_i = n_i a_i$, где $n_i \in \mathbf{Z}$ и для каждого простого числа p либо $h_p(a_i) = 0$, либо $h_p(a_i) = \infty$. Если $|n_0| = 1$, то подгруппу $\langle v_0 \rangle_*$ в прямом разложении группы $\prod R_i$ можно заменить на подгруппу $\langle v \rangle_*$. Если $|n_0| > 1$, то с помощью рассуждений, аналогичных началу доказательства теоремы 19.2, мы получим требуемое утверждение, и сепарабельность группы V будет доказана. ∎

Теперь мы в состоянии описать сепарабельные векторные группы.

Теорема 96.6 (Мишина [5], Круль [1]). *Векторная группа* $V = \prod_{i \in I} R_i$ *[где R_i — рациональные группы типов $\mathbf{t}_i$] сепарабельна в том и только в том случае, когда выполняются условия* 1) *и* 2) *из леммы* 96.5 *и, кроме того, условие*

3) *семейство групп R_i, где $\mathbf{t}_i$ — неидемпотентный тип, конечно.*

Допустим, что группа V сепарабельна, но условие 3) не выполняется. Прежде всего покажем, что не существует бесконечной цепочки $\mathbf{t}_1 < \ldots < \mathbf{t}_n < \ldots$, где типы $\mathbf{t}_n = \mathbf{t}(R_n)$ неидемпотентны. Действительно, в противном случае существуют последовательность $0 < m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ целых чисел и элементы $v_n \in R_n$, для которых $p_{m_n} \nmid v_n$, а при $k > n$ элемент v_n делится на число p_{m_k}, но не на все его степени. Тогда для элемента $v = (v_1, \ldots, v_n, \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} R_n$ выполняется неравенство $\mathbf{t}(v) < \mathbf{t}_1$. Очевидно, ни при каком n

элемент v не может лежать в прямой сумме рациональных групп типов $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$. Следовательно, группа $\prod_{n=1}^{\infty} R_n$ не является сепарабельной, и мы пришли к противоречию. Итак, неидемпотентные типы $\mathbf{t}_i$ должны удовлетворять условию максимальности. Частично упорядоченное множество, удовлетворяющее как условию минимальности, так и условию максимальности, а также не содержащее бесконечного множества несравнимых элементов, должно быть конечным. Таким образом, условие 3) выполняется.

Докажем достаточность. Допустим, что выполняются условия 1) — 3), и запишем $V = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n \oplus \prod_{i \in I'} R_i$, где множество I' содержит только те индексы i, для которых тип $\mathbf{t}(R_i)$ идемпотентен. В силу леммы 96.5 группа $\prod_{i \in I'} R_i$ сепарабельна, следовательно, группа V также сепарабельна. ∎

Упражнения

1. С помощью следствия 94.5 доказать лемму 96.1 для неизмеримого множества индексов.

2. Показать, что для неизмеримого множества индексов I предложение 96.2 сразу вытекает из следствия 94.7.

3 (Мишина [1], Лось [1]). Векторная группа вполне разложима тогда и только тогда, когда почти все ее компоненты изоморфны группе Q.

4 (Мишина [4]). Пусть $V = \prod_{i \in I} R_i$ — векторная группа, где множество индексов I неизмеримо. Показать, что любое узкое слагаемое группы V изоморфно прямой сумме конечного числа некоторых групп R_i. [*Указание*: следствие 94.7 и теорема 86.7.]

5. Для рациональной группы $R \ncong Q$ и неизмеримого множества индексов I группа $R^I \oplus \bigoplus_I R$ не может быть векторной группой, если только множество I не конечно.

6. Пусть R — неделимая рациональная группа идемпотентного типа и $\mathfrak{m}$ — неизмеримое кардинальное число. Существуют такие группы A ранга $2^{\mathfrak{m}}$, что

$$\mathrm{Hom}(A, R) \cong A.$$

7. Никакая редуцированная векторная группа не содержит копериодических подгрупп, отличных от нуля. [*Указание*: эпиморфные образы группы J_p, являющиеся группами без кручения и имеющие ранг 1, делимы.]

8. Пусть $\mathbf{t}$ — идемпотентный тип и $V = \prod R_i$, где R_i — рациональные группы типа $\mathbf{t}$. Следующим образом доказать сепарабельность группы V: на группах R_i ввести структуру кольца R с единицей и затем провести рассуждения для R-модулей, аналогичные доказательству теоремы 19.2. [Заметим, что кольцо R будет кольцом главных идеалов: см. теорему 121.1.]

9 (Бьюмонт [5]). Пусть R_i $(i \in I)$ — рациональные группы одного и того же типа $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}^0$ — максимальный идемпотентный тип, для которого выполняется $\mathbf{t}^0 \leqslant \mathbf{t}$ [т. е. $\mathbf{t}^0 = \mathbf{t} : \mathbf{t}$]. Показать, что если множество I бесконечно, то группа $\prod R_i$ содержит элементы любого типа $\mathbf{s}$, удовлетворяющего неравенствам $\mathbf{t}^0 \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{t}$.

10 (Бальцежик, Бялиницкий-Бируля и Лось [1]). Пусть R_i $(i \in I)$ — семейство редуцированных групп ранга 1, где множество I неизмеримо. Допустим, что для любых $i, j \in I$ либо $R_i \cong R_j$, либо для типа $\mathbf{t} = \mathbf{t}(R_j) : \mathbf{t}(R_i)$ неравенство $\mathbf{t} \leqslant \mathbf{t}(R_j)$ не имеет места. Доказать, что

(а) $\operatorname{Hom}(\prod R_i, \prod R_i) \cong \bigoplus_i R_i^0$, где $\mathbf{t}(R_i^0) = \mathbf{t}(R_i) : \mathbf{t}(R_i)$;

(б) $\operatorname{Hom}(\oplus R_i^0, \prod R_i) \cong \prod R_i$;

(в) каждое слагаемое группы $\prod_i R_i$ изоморфно прямому произведению некоторого подсемейства групп R_i.

§ 97. Конечнозначные функции со значениями в группе

Среди векторных групп представляют особый интерес прямые произведения изоморфных рациональных групп. Настоящий параграф посвящен рассмотрению некоторых подгрупп таких векторных групп. На самом деле приводимые результаты можно сформулировать в более общем виде — для прямых произведений групп, изоморфных произвольной группе A. Наиболее важен случай $A = Z$, к которому общий случай сводится без труда.

Пусть A — произвольная группа и I — произвольное бесконечное множество индексов. Множество всех таких функций f: $I \to A$, что f принимает лишь конечное число различных значений в A, очевидно, является абелевой группой $\bar{A}$, а именно некоторой подгруппой декартовой степени A^I группы A. Легко видеть, что каждая функция $f \in \bar{A}$ может быть единственным образом представлена в *каноническом виде*

$$f = a_1 h_{X_1} + \ldots + a_k h_{X_k} \quad (k \geqslant 0), \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — ненулевые элементы группы A, подмножества $X_1, \ldots, X_k$ множества I попарно не пересекаются, а функции h_X являются характеристическими функциями подмножеств $X \subseteq I$:

$$h_X(i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \in X; \\ 0, & \text{если} \quad i \notin X. \end{cases}$$

Подгруппа S группы $\bar{A}$ называется *группой Шпекера* (*над* A), если $f \in S$ влечет за собой $Ah_{X_1}, \ldots, Ah_{X_k} \subseteq S$, т. е. $ah_{X_1}, \ldots, ah_{X_k} \in S$ для всех $a \in A$. Здесь функция f представлена в виде (1). Очевидно, всякая группа Шпекера порождается своими подгруппами вида Ah_X для некоторых $X \subseteq I$.

Основная наша задача — описать структуру групп Шпекера. Будем говорить, что подгруппа F группы $\overline{A}$ обладает *характеристическим A-базисом*, если

$$F = \bigoplus_{j \in J} Ah_j,$$

где h_j — некоторые характеристические функции. Основной результат заключается в том, что группа Шпекера над группой A обладает характеристическим A-базисом.

Прежде всего мы это докажем для случая $A = Z$. Следующая лемма дает некоторые полезные свойства групп Шпекера над Z. Заметим, что Z, а значит, и Z^I имеют структуру кольца.

Лемма 97.1. *Для подгруппы S группы $\overline{Z} = Z^I$ следующие условия эквивалентны:*

1) *S — группа Шпекера;*

2) *$f \in S$ влечет за собой $h_X \in S$, где X — носитель функции f;*

3) *подгруппа S сервантна в группе $\overline{Z}$ и является подкольцом кольца $\overline{Z}$.*

Так как $h_X = h_{X_1} + \ldots + h_{X_k}$, то условие 1), очевидно, влечет за собой условие 2). Докажем обратное с помощью индукции по k. При $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и выполняется условие 2). Тогда

$$f - n_k h_X = (n_1 - n_k) h_{X_1} + \ldots + (n_{k-1} - n_k) h_{X_{k-1}}.$$

По предложению индукции $h_{X_1}, \ldots, h_{X_{k-1}} \in S$, откуда $n_k h_{X_k} \in S$, значит, $h_{X_k} \in S$. Таким образом, условие 1) выполняется.

Пусть выполняется условие 1). Сервантность подгруппы S очевидна. Условие 3) будет выполнено, если мы покажем, что $h_X, h_Y \in S$ влечет за собой $h_X h_Y \in S$. Последнее легко получить из того, что $h_X h_Y = h_{X \cap Y}$, а элемент $h_X + h_Y \in S$ представим в каноническом виде $h_W + 2h_{X \cap Y}$, где $W = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Обратно, пусть выполняется условие 3). Функцию $f \in S$ представим в виде (1). Если $k = 1$, то $h_{X_1} \in S$ благодаря сервантности подгруппы S. Пусть $k > 1$. Функция

$$f^2 - n_k f = (n_1^2 - n_k n_1) h_{X_1} + \ldots + (n_{k-1}^2 - n_k n_{k-1}) h_{X_{k-1}}$$

имеет канонический вид длины $l \leqslant k - 1$, следовательно, $h_1 = h_{X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}} \in S$ по предположению индукции. Аналогично, $h_2 = h_{X_2 \cup \ldots \cup X_k} \in S$. Итак, $h_X = h_1 + h_2 - h_1 h_2 \in S$, и условие 2) выполняется. ∎

Как видно из доказанной леммы, подгруппы Шпекера группы $\overline{Z}$ являются кольцами, порожденными идемпотентами h_X. Перед тем, как сформулировать основную теорему 97.3, докажем в общем виде вспомогательный результат о коммутативных кольцах, порожденных

идемпотентами. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное и ассоциативное кольцо с 1. Допустим, что $\mathbf{R}$ порождается как кольцо некоторым множеством E идемпотентов, а аддитивная группа $\mathbf{R}^+$ кольца $\mathbf{R}$ — группа без кручения. Пусть E^* — множество всех конечных произведений элементов из E. Тогда элементы из E^* снова являются идемпотентами [пустое произведение равно 1] и каждый элемент $\alpha \in \mathbf{R}$, очевидно, представи́м в виде $\alpha = \sum_{i=1}^{m} n_i\varepsilon_i$, где $n_i \in \mathbf{Z}$, $\varepsilon_i \in E^*$. Более того, элементы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ из этого представления можно выбрать таким образом, чтобы они образовывали множество ортогональных идемпотентов. Действительно, для данного множества $\eta_1, \ldots, \eta_k$ идемпотентов кольца $\mathbf{R}$ всевозможные элементы $\varepsilon_{i_1\ldots i_k} = \eta_1^{(i_1)} \ldots \eta_k^{(i_k)}$, где $i_l = 0$ или $i_l = 1$, являются попарно ортогональными идемпотентами. Здесь $\eta_j^{(0)} = 1 - \eta_j$ и $\eta_j^{(1)} = \eta_j$. Поскольку $\eta_j = \sum \varepsilon_{i_1\ldots i_{j-1}1i_{j+1}\ldots i_k}$ для каждого j, элемент α является линейной комбинацией таких ε_i. Далее, если $n_i = n_j$, заменим элемент $n_i\varepsilon_i + n_j\varepsilon_j$ на элемент $n_i\varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ — идемпотент, ортогональный ко всем ε_l при $l \neq i, j$. В итоге получим представление $\alpha = \sum_{i=1}^{m} n_i\varepsilon_i$ с попарно ортогональными идемпотентами $\varepsilon_i \in E^*$ и различными $n_i \in \mathbf{Z}$. Такое представление элемента α, очевидно, единственно. Ввиду отсутствия кручения условие $\alpha \in n\mathbf{R}$ имеет место в точности тогда, когда $n \mid n_i$ при всех i.

Лемма 97.2 (Бергман). *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей 1 и его аддитивная группа $\mathbf{R}^+$ — группа без кручения. Если $\mathbf{R}$ порождается как кольцо множеством E идемпотентов, то $\mathbf{R}^+$ является свободной абелевой группой, базис которой состоит из конечных произведений элементов из E.*

Каким-либо образом вполне упорядочим множество E, скажем $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_\sigma, \ldots$ $(\sigma < \tau)$. Множество E^* всех конечных произведений $\varepsilon_{\sigma_1} \ldots \varepsilon_{\sigma_k}$ $(\tau > \sigma_1 > \ldots > \sigma_k)$ элементов из E упорядочим лексикографически, читая слева направо. Пустое произведение равно 1 и является минимальным элементом при таком упорядочении. Мы утверждаем, что *элементы из E^*, не являющиеся линейными комбинациями меньших в этом порядке элементов из E^*, образуют свободный базис группы $\mathbf{R}^+$.*

Если $\tau = 0$, то множество E пусто, и, значит, $\mathbf{R} \cong \mathbf{Z}$ или $\mathbf{R} = 0$. Проведем индукцию. Пусть $\tau > 0$, и пусть указанное правило дает базис для каждого кольца, множество идемпотентов которого вполне упорядочено и подобно множеству порядковых чисел, меньших σ, где $\sigma < \tau$.

Пусть τ — предельное порядковое число. Кольцо $\mathbf{R}$ в этом случае можно представить в виде объединения возрастающей цепочки подколец $\mathbf{R}_\sigma$ $(\sigma < \tau)$ кольца $\mathbf{R}$, где каждое $\mathbf{R}_\sigma$ порождается элементами $\varepsilon_\rho \in E$ по всем $\rho < \sigma$. Тогда правило выбора базиса, сфор-

мулированное выше, очевидно, приведет к получению базиса для группы $\mathbf{R}^+$.

Пусть $\tau = \rho + 1$ и $\mathbf{R}_0$ — подкольцо кольца $\mathbf{R}$, порожденное всеми элементами $\varepsilon_\sigma \in E$, где $\sigma < \rho$. Предположение индукции, безусловно, применимо к подкольцу $\mathbf{R}_0$. Мы хотим показать, что базис группы $\mathbf{R}_0^+$ можно расширить указанным образом до базиса группы $\mathbf{R}^+$. Запишем $\varepsilon_\rho = \varepsilon$. Идеал $\varepsilon\mathbf{R}_0 = \varepsilon\mathbf{R}$, очевидно, можно рассматривать как кольцо с единицей ε. При этом $\varepsilon\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon\varepsilon_\sigma, \ldots$ $(\sigma < \rho)$ — множество идемпотентных образующих кольца $\varepsilon\mathbf{R}_0$. С помощью представления элементов $\alpha \in \mathbf{R}$, о котором шла речь выше, легко получить, что как $\mathbf{R}_0$, так и $\varepsilon\mathbf{R}_0$ — сервантные подгруппы в $\mathbf{R}^+$. Отсюда следует, что $\mathbf{R}_0 \cap \varepsilon\mathbf{R}_0$ — сервантный идеал кольца $\varepsilon\mathbf{R}_0$. Таким образом, аддитивная группа кольца $\overline{\mathbf{R}} = \varepsilon\mathbf{R}_0/(\mathbf{R}_0 \cap \varepsilon\mathbf{R}_0)$ — группа без кручения, значит, к кольцу $\overline{\mathbf{R}}$ применимо предположение индукции. Следовательно, те произведения смежных классов, содержащих $\varepsilon\varepsilon_\sigma$ $(\sigma < \rho)$, которые не являются линейными комбинациями меньших относительно лексикографического порядка произведений в кольце $\overline{\mathbf{R}}$, образуют базис группы $(\overline{\mathbf{R}})^+$. Возвращаясь к рассмотрению кольца $\varepsilon\mathbf{R}_0$, мы замечаем, что произведения соответствующих представителей $\varepsilon\varepsilon_\sigma$ являются в точности теми элементами множества E^*, для которых $\varepsilon = \varepsilon_\rho$ и которые не могут быть линейными комбинациями меньших относительно лексикографического порядка произведений. Очевидно, базис группы $\mathbf{R}_0^+$ вместе с этими элементами из E^* образует базис группы $\mathbf{R}^+$. ∎

Теперь мы можем доказать основную теорему о группах Шпекера над $\mathbf{Z}$. Весьма частный случай этой теоремы был доказан Шпекером в его работе [1].

Теорема 97.3 (Нёбелинг [1]). *Пусть S и T — группы Шпекера над Z, причем $S \subset T$. Тогда существует свободная подгруппа F группы T, обладающая характеристическим базисом и такая, что $T = S \oplus F$.*

Не теряя общности, можно считать, что $h_I \in S$. Действительно, допустим, что в случае $h_I \in S$ теорема доказана. Если функция h_I не лежит в группе S, но $h_I \in T$, то применим теорему к группам Шпекера $S \oplus \langle h_I \rangle$ и T и отсюда сразу же получим требуемый результат для групп S и T. Если $h_I \notin T$, то, применяя теорему к группам $S \oplus \oplus \langle h_I \rangle$ и $T \oplus \langle h_I \rangle$, получим $T \oplus \langle h_I \rangle = S \oplus \langle h_I \rangle \oplus F$ для некоторой свободной группы $F = \oplus \langle h_j \rangle$. Легко видеть, что для каждого h_j либо $h_j \in T$, либо $h_I - h_j \in T$. Таким образом, $T = S \oplus F'$, где F' свободно порождается элементами h'_j, а каждый h'_j совпадает либо с h_j, либо с $h_I - h_j$ в зависимости от того, который из них принадлежит группе T.

В силу леммы 97.1 группы S и T можно рассматривать как кольца, порожденные идемпотентами, причем аддитивные группы этих колец — группы без кручения. Как мы только что показали, можно также считать, что это кольца с единицей. Итак, применима лемма 97.2.

На кольце T введем полное упорядочение, при котором идемпотентные образующие из S предшествуют идемпотентным образующим из $T \setminus S$. Теперь наше утверждение легко следует из предложения 97.2. ∎

Следствие 97.4. *Группа Шпекера над бесконечной циклической группой свободна и обладает характеристическим базисом.*

Теперь мы без труда получим следующее обобщение теоремы 97.3.

Следствие 97.5 (Кауп и Кин [1]). *Пусть S и T — группы Шпекера над произвольной группой A, причем $S \subset T$. Тогда группа T содержит подгруппу F, обладающую характеристическим A-базисом и такую, что $T = S \oplus F$.*

Если A — циклическая группа порядка 2, то все подгруппы группы A^I являются как группами Шпекера, так и векторными пространствами над простым полем характеристики 2. В этом случае утверждение тривиально.

Итак, считаем, что $|A| > 2$. Пусть Ah_X, $Ah_Y \subseteq S$ для некоторых подмножеств X, $Y \subseteq I$. Выберем два различных ненулевых элемента a, $b \in A$. Имеем

$$ah_X + bh_Y = ah_{X \setminus Y} + (a+b)\, h_{X \cap Y} + b h_{Y \setminus X},$$

отсюда непосредственно следуют включения $Ah_{X \setminus Y}$, $Ah_{X \cap Y}$, $Ah_{Y \setminus X} \subseteq S$. Ввиду леммы 97.1 подгруппа S' группы Z^I, порожденная теми функциями h_X, для которых $Ah_X \subseteq S$, является группой Шпекера над Z. Учитывая, что группы Шпекера над Z свободны, мы получаем $S = A \otimes S'$ с помощью стандартных рассуждений. Аналогично, $T = A \otimes T'$, где T' — группа Шпекера над Z. Пусть F' — такая свободная группа с характеристическим базисом, что $T' = S' \oplus F'$. Тогда для группы $F = A \otimes F'$ имеет место равенство $T = S \oplus F$. ∎

Следствие 97.6. *Группы Шпекера над произвольной группой A обладают характеристическим A-базисом и, в частности, являются прямыми суммами групп, изоморфных A.* ∎

Следующий частный случай имеет большое значение. Пусть I — топологическое пространство и группа S состоит из всех непрерывных конечнозначных функций f: $I \to A$ [на группе A может быть задана произвольная хаусдорфова топология]. Представляя функцию f в каноническом виде (1), получаем, что все множества X_i как открыты, так и замкнуты. Следовательно, вместе с функцией f в группе S содержатся группы Ah_{X_i}. Другими словами, S — группа Шпекера. Итак, имеет место

Следствие 97.7. *Группа всех непрерывных конечнозначных функций из топологического пространства I в произвольную группу A является прямой суммой групп, изоморфных A, и обладает характеристическим A-базисом $\{h_{X_j}\}$, где X_j — открыто-замкнутые подпространства пространства I.* ∎

Если пространство I компактно, а на группе A задана дискретная топология, то все непрерывные функции $f\colon I \to A$ конечнозначны. Следовательно, в этом случае группа *всех* непрерывных функций из I в A изоморфна прямой сумме групп, изоморфных A.

Упражнения

1. Показать, что любая группа ограниченных [возможно, трансфинитных] последовательностей целых чисел свободна.

2. Для любого множества индексов I прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} A$ служит прямым слагаемым группы $\bar{A}$ $(\subseteq A^I)$.

3. (а) Пересечение групп Шпекера является группой Шпекера. Вывести отсюда, что существует наименьшая группа Шпекера Sp (H), содержащая подмножество H группы $\bar{A}$.

(б) Минимальная группа Шпекера, содержащая конечное подмножество группы $\bar{Z}$, является конечно порожденной свободной группой.

4. Пусть S — группа Шпекера и h_X — характеристическая функция. Тогда

$$S^X = Sh_X = \{fh_X \mid f \in S\}$$

также является группой Шпекера.

5 (Нёбелинг [1]). Пусть $\bar{X} = I \setminus X$. Для любой группы Шпекера S прямая сумма $S^X \oplus S^{\bar{X}}$ является группой Шпекера, а S является подпрямой суммой групп S^X и $S^{\bar{X}}$.

6 (Нёбелинг [1]). Пусть S — группа Шпекера над группой A мощности $\mathfrak{m} > 2$. Пусть, кроме того, $Ah_I \subseteq S$. Тогда минимальная группа Шпекера Sp (S, h_X), содержащая S и характеристическую функцию h_X, совпадает с группой $S^X \oplus S^{\bar{X}}$.

7 (Нёбелинг [1]). Пользуясь трансфинитной индукцией, показать, что теорему 97.3 достаточно доказывать лишь для групп $T =$ $=$ Sp (S, h_X), где h_X — некоторая характеристическая функция.

8 (Нёбелинг [1]). Пусть S — такая группа Шпекера над A, что $Ah_I \subseteq S$, и пусть h_X и h_Y — две произвольные характеристические функции. Тогда

$$\mathrm{Sp}(S, h_X, h_Y) = [\mathrm{Sp}(S, h_X) + \mathrm{Sp}(S, h_Y)] \oplus F,$$

где F — некоторая группа, обладающая характеристическим A-базисом. [*Указание*: положив $T =$ Sp (S, h_Y), показать, что $U = S^X +$ $+ (T^X \cap T)$ — группа Шпекера, откуда $T = U \oplus F$; убедиться, что доказываемое равенство выполняется для полученной группы F.]

§ 98*. Однородные и однородно разложимые группы

Однородную группу мы определили как группу без кручения, все ненулевые элементы которой имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$. Мы привели примеры однородных групп, являющихся вполне разложимыми или

сепарабельными, или даже неразложимыми группами. В настоящем параграфе мы получим дополнительные результаты, касающиеся однородных групп, а также их прямых сумм.

Первый из результатов отвечает на вопрос, в каком случае однородная группа конечного ранга является вполне разложимой.

Предложение 98.1 (Бэр [6]). *Однородная группа A конечного ранга n вполне разложима тогда и только тогда, когда группа A/C конечна для любой [или некоторой] подгруппы C, являющейся прямой суммой n сервантных подгрупп ранга* 1.

Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где A_i — группы ранга 1, и пусть подгруппа C удовлетворяет условиям предложения. Тогда все элементы из C имеют тот же тип в подгруппе C, что и в группе A, следовательно, $A_i \cap C$ — подгруппа конечного индекса в группе A_i. Поскольку $\bigoplus_i (A_i \cap C) \subseteq C$, группа A/C, очевидно, конечна.

Обратно, допустим, что $C = Rc_1 \oplus \ldots \oplus Rc_n$, где Rc_i — сервантные подгруппы группы A, а R — подгруппа группы Q того же типа, что и A. Достаточно рассмотреть случай, когда $|A : C|$ — простое число p. Для элемента $a \in A \setminus C$ мы можем записать $pa = m^{-1}(m_1c_1 + \ldots + m_nc_n)$, где $m^{-1}m_i \in R$. Мы можем считать, что в этом равенстве $(m_1, \ldots, m_n) = d = 1$. Действительно, если $(d, m) = 1$, то $d^{-1}pa \in C$ и элемент a можно заменить на элемент $d^{-1}a$. Обобщив очевидным образом лемму 15.3 на наш случай, получим разложение $C = Rb_1 \oplus \ldots \oplus Rb_n$, где $b_1 = m_1c_1 + \ldots + m_nc_n$. Тогда $A = Rma \oplus Rb_2 \oplus \ldots \oplus Rb_n$. ∎

Для счетных групп имеет место следующий аналог теоремы 19.1:

Теорема 98.2. *Счетная однородная группа без кручения A вполне разложима в том и только в том случае, когда каждая подгруппа $C \subseteq A$, имеющая конечный ранг и являющаяся прямой суммой сервантных подгрупп ранга* 1, *имеет конечный индекс в своей сервантной оболочке* $\langle C \rangle_*$.

Если группа A вполне разложима, то в силу теоремы 86.6 группа $\langle C \rangle_*$ также вполне разложима. Таким образом, из предложения 98.1 следует необходимость условий теоремы.

Обратно, пусть группа A удовлетворяет указанному условию. Если ранг группы A конечен, то ввиду предложения 98.1 доказывать нечего. Пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — максимальная независимая система элементов группы A. Положим $C_n = \langle a_1 \rangle_* \oplus \ldots \oplus \langle a_n \rangle_*$ и $B_n = \langle C_n \rangle_*$. В силу предложения 98.1 группа B_n вполне разложима, а в силу леммы 86.8 подгруппа B_n служит прямым слагаемым для B_{n+1}, скажем $B_{n+1} = B_n \oplus A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Подгруппа, порожденная подгруппами $A_1 = B_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, очевидно, является их прямой суммой и должна совпадать с группой A. ∎

Перейдем к *однородно разложимым* группам. Так называются группы, являющиеся прямыми суммами однородных групп, т. е.

группы вида $A = \bigoplus_{j \in J} G_j$, где G_j — однородные группы. Мы можем собрать вместе компоненты G_j одного и того же типа, взять их прямую сумму и получить тем самым наименьшее однородное разложение

$$A = \bigoplus_{\mathbf{t}} H_{\mathbf{t}}, \tag{1}$$

где $H_{\mathbf{t}}$ — однородные группы различных типов $\mathbf{t}$. Легко видеть, что наименьшие однородные разложения единственны с точностью до изоморфизма. Действительно, $H_{\mathbf{t}} \cong A(\mathbf{t})/A^*(\mathbf{t})$.

Теорема 98.3. (Бэр [6], Эрдеш [1]). *Пусть A — такая группа без кручения, что типы ее элементов удовлетворяют условию максимальности. Группа A вполне разложима в том и только в том случае, когда для каждого типа $\mathbf{t}$ выполняются следующие два условия:*

а) *$A^*(\mathbf{t})$ служит прямым слагаемым для $A(\mathbf{t})$;*

б) *$A^*(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t}) \cap A^{**}(\mathbf{t})$, где $A^{**}(\mathbf{t})$ — подгруппа, порожденная всеми элементами $a \in A$, типы $\mathbf{t}(a)$ которых не меньше и не равны $\mathbf{t}$.*

Условие а), очевидно, необходимо. Докажем необходимость условия б). Группу A представим в виде (1), где $H_{\mathbf{t}}$ — однородные группы различных типов $\mathbf{t}$. Имеем [символ $\|$ означает несравнимость]

$$\begin{aligned} A(\mathbf{t}) \cap A^{**}(\mathbf{t}) &= \bigoplus_{\mathbf{s} \geq \mathbf{t}} H_{\mathbf{s}} \cap \bigoplus_{\mathbf{s} \not\leq \mathbf{t}} H_{\mathbf{s}} = \\ &= (\bigoplus_{\mathbf{s} > \mathbf{t}} H_{\mathbf{s}} \oplus H_{\mathbf{t}}) \cap (\bigoplus_{\mathbf{s} > \mathbf{t}} H_{\mathbf{s}} \oplus \bigoplus_{\mathbf{s} \| \mathbf{t}} H_{\mathbf{s}}) = \\ &= \bigoplus_{\mathbf{s} > \mathbf{t}} H_{\mathbf{s}} = A^*(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Убедимся в достаточности наших условий. Для каждого типа $\mathbf{t}$ определим группу $H_{\mathbf{t}}$ как дополнительное прямое слагаемое: $A^*(\mathbf{t}) \oplus H_{\mathbf{t}} = A(\mathbf{t})$. Если $H_{\mathbf{t}} \neq 0$, то $H_{\mathbf{t}}$ — однородная группа типа $\mathbf{t}$. Подгруппа группы A, порожденная подгруппами $H_{\mathbf{t}}$, является их прямой суммой. Действительно, пусть $h_1 + \ldots + h_n = 0$, где $h_i \in H_{\mathbf{t}_i}$, и типы $\mathbf{t}_i$ различны. Если $\mathbf{t}_1$ — минимальный среди типов $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$, то

$$h_2 + \ldots + h_n = -h_1 \in A^{**}(\mathbf{t}_1) \cap A(\mathbf{t}_1) = A^*(\mathbf{t}_1),$$

значит, $h_1 \in A^*(\mathbf{t}_1) \cap H_{\mathbf{t}_1} = 0$. Покажем, что подгруппа $\bigoplus_{\mathbf{t}} H_{\mathbf{t}} = H$ совпадает с группой A. Пусть элемент $a \in A$ имеет тип $\mathbf{t}$. Поскольку типы элементов из A удовлетворяют условию минимальности, мы можем считать, что каждый элемент $b \in A$ типа $\mathbf{t}(b) > \mathbf{t}$ лежит в H, т. е. $A^*(\mathbf{t}) \subseteq H$. Но в этом случае $a \in A(\mathbf{t}) = A^*(\mathbf{t}) \oplus H_{\mathbf{t}} \subseteq H$, что и доказывает достаточность. ∎

Упражнения

1. Показать, что в предложении 98.1 условие однородности не может быть отброшено.

2 (Колеттис [3]). Пусть A — группа без кручения, обладающая следующими двумя свойствами: (1) для каждого типа $\mathbf{t}$ обе подгруппы

A (**t**) и A^* (**t**) служат для A прямыми слагаемыми; (2) каждый элемент из A лежит в прямом слагаемом группы A, являющемся (конечной) прямой суммой однородных групп. Показать, что свойства (1) и (2) наследуются прямыми слагаемыми группы A. [*Указание*: провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 87.5.]

3 (Колеттис [3]). (а) Счетная группа без кручения однородно разложима тогда и только тогда, когда она обладает свойствами 1) и 2) из упр. 2.

(б) Доказать (а) для прямых сумм счетных групп.

4. Если группа A является прямой суммой счетных групп и, кроме того, однородно разложима, то прямые слагаемые группы A обладают тем же свойством.

5. Доказать, что в теореме 98.2 условие счетности группы A является существенным.

6. Показать, что теорема 98.3 может не иметь места, если типы элементов группы A не удовлетворяют условию максимальности. [*Указание*: рассмотреть произведение рациональных групп с идемпотентными типами $\mathbf{t}_1 < \mathbf{t}_2 < \ldots$.]

§ 99. Проблема Уайтхеда

Довольно трудная проблема, предложенная Дж. Г. К. Уайтхедом, состоит в том, чтобы охарактеризовать группы G, для которых $\operatorname{Ext}(G, Z) = 0$. Несмотря на то что о таких группах G имеется обширная информация, полное решение этой проблемы известно только в счетном случае. За исключением свободных групп, никакие группы, обладающие указанным свойством, до сих пор не найдены.

Следуя Ротману [3], назовем группу G *группой Уайтхеда* или просто *W-группой*, если для нее выполняется равенство

$$\operatorname{Ext}(G, Z) = 0.$$

Приведем некоторые элементарные свойства W-групп.

а) *Свободные группы являются W-группами.*

б) *Подгруппы W-групп снова являются W-группами.* Действительно, в силу теоремы 51.3 мономорфизм $H \to G$ дает эпиморфизм $\operatorname{Ext}(G, Z) \to \operatorname{Ext}(H, Z)$.

в) *Прямые суммы W-групп снова являются W-группами.* Это сразу следует из теоремы 52.2.

г) *W-группы являются группами без кручения.* Ввиду п. б) достаточно показать, что ни для какого простого числа p группа $Z(p)$ не является W-группой. Последнее, однако, очевидно, так как $\operatorname{Ext}(Z(p), Z) \cong Z(p)$ [см. § 52, п. Г)].

д) *W-группа G конечного ранга свободна.* Действительно, в противном случае она не является конечно порожденной. Тогда для некоторой существенной свободной подгруппы F группы G группа G/F бесконечная периодическая. Точная последовательность $0 \to F \to$

$\to G \to G/F \to 0$ индуцирует точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(F, Z) \to \mathrm{Ext}(G/F, Z) \to \mathrm{Ext}(G, Z) = 0.$$

Мы приходим к противоречию, поскольку $\mathrm{Hom}(F, Z)$ — счетная группа, и в то же время легко видеть [упр. 1], что группа $\mathrm{Ext}(G/F, Z)$ имеет мощность континуума.

Теперь мы можем без труда получить первый из дальнейших результатов о W-группах.

Теорема 99.1 (Штейн [1], Ротман [3]). *Все W-группы $\aleph_1$-свободны и сепарабельны.*

Докажем, что W-группы $\aleph_1$-свободны. По критерию Понтрягина (теорема 19.1) достаточно показать, что подгруппа F, сервантная в W-группе G и имеющая конечный ранг, свободна. Это сразу следует из п. б) и п. д).

Докажем сепарабельность. Пусть F — сервантная подгруппа группы G, имеющая конечный ранг. Так же как в доказательстве п. д), получаем эпиморфизм $\mathrm{Hom}(F, Z) \to \mathrm{Ext}(G/F, Z)$. Группа $\mathrm{Hom}(F, Z)$ изоморфна группе F и, значит, является конечно порожденной. В то же время группа $\mathrm{Ext}(G/F, Z)$ делима [см. § 52, п. И)] и, следовательно, равна нулю. Таким образом, $\mathrm{Ext}(G/F, F) = 0$; другими словами, подгруппа F должна быть прямым слагаемым группы G. В силу предложения 87.2 мы сразу получаем теперь сепарабельность группы G. ■

Мы заключаем, что *счетные W-группы свободны* и что все W-группы являются подгруппами прямых произведений бесконечных циклических групп. Но сами они не могут быть прямыми произведениями.

Предложение 99.2 (Ротман [1], Нунке [2]). *Все W-группы узки.*

По теореме 96.3 $\aleph_1$-свободная группа узка в том и только в том случае, когда она не содержит прямого произведения P бесконечного семейства циклических групп $\langle e_n \rangle$. Итак, нам нужно лишь доказать, что $\mathrm{Ext}(P, Z) \neq 0$. Пусть S — прямая сумма групп $\langle e_n \rangle$. Тогда по следствию 42.2 группа P/S алгебраически компактна, следовательно, $\mathrm{Hom}(P/S, Z) = 0$. Таким образом, точная последовательность $0 \to S \to P \to P/S \to 0$ индуцирует точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, Z) \to \mathrm{Hom}(S, Z) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}(P/S, Z) \to \mathrm{Ext}(P, Z) \to 0.$$

Здесь $\mathrm{Hom}(P, Z) \cong S$, $\mathrm{Hom}(S, Z) \cong P$, и в силу естественности этих изоморфизмов $\mathrm{Im}\,\partial \cong P/S$. Группа P/S не является делимой, но $\mathrm{Ext}(P/S, Z)$ — делимая группа [см. § 52, п. И)], следовательно, $\mathrm{Coker}\,\partial \neq 0$. ■

Самые разные подгруппы прямых произведений бесконечных циклических групп как сепарабельны, так и узки. Следовательно, о W-группах необходима дополнительная информация.

Лемма 99.3 (Чейз [2]). *Пусть p — произвольное простое число. Для p-базисной подгруппы B любой W-группы G выполняется равенство*

$$2^{r(B)} = 2^{r(G)}.$$

Точная последовательность $0 \to B \to G \to G/B \to 0$ дает точную последовательность $\operatorname{Hom}(B, Z) \to \operatorname{Ext}(G/B, Z) \to 0$. Если ранг $r(B)$ конечен, то $B = G$ по теореме 99.1 и доказывать нечего. Если ранг $r(B)$ бесконечен, то группа $\operatorname{Hom}(B, Z) \cong Z^{r(B)}$ имеет мощность $2^{r(B)}$. Далее, группа G/B содержит подгруппу, изоморфную прямой сумме $r_0(G/B)$ групп, изоморфных $Q^{(p)}$. Таким образом,

$$|\operatorname{Ext}(G/B, Z)| \geqslant |\operatorname{Ext}(Q^{(p)}, Z)|^{r_0(G/B)} \geqslant 2^{r_0(G/B)},$$

поскольку в точной последовательности

$$Z \cong \operatorname{Hom}(Z, Z) \to \operatorname{Ext}(Z(p^\infty), Z) \cong J_p \to \operatorname{Ext}(Q^{(p)}, Z) \to 0$$

[см. § 52, п. H)] последняя группа Ext ненулевая [она имеет мощность $2^{\aleph_0}$]. Следовательно, $2^{r(B)} \geqslant 2^{r_0(G/B)}$. Из равенства $r(G) = r(B) + r_0(G/B)$ вытекает неравенство $2^{r(B)} \geqslant 2^{r(G)}$. Так как строгое неравенство невозможно, мы получаем наше утверждение. Если принять обобщенную гипотезу континуума, доказанное равенство будет эквивалентно равенству $r(B) = r(G)$. ∎

Предложение 99.4 (Чейз [2]). *Для W-группы G бесконечного ранга имеет место равенство*

$$|\operatorname{Hom}(G, Z)| = 2^{|G|}.$$

Достаточно доказать неравенство $|\operatorname{Hom}(G, Z)| \geqslant 2^{|G|}$. Для W-группы G гомоморфизм $\operatorname{Hom}(G, Z) \to \operatorname{Hom}(G, Z/pZ)$ является эпиморфизмом. Очевидно, вторая из этих групп изоморфна группе $\operatorname{Hom}(G/pG, Z/pZ) \cong \operatorname{Hom}(B/pB, Z/pZ)$, где B — это p-базисная подгруппа группы G. Мощность последней группы Hom равна $2^{r(B)} = 2^{|B|}$, так как ранг $r(B)$ бесконечен. В силу леммы 99.3 $2^{|B|} = 2^{|G|}$, что и завершает доказательство. ∎

Упражнения

1. Довести до конца доказательство п. д), показав, что неравенство

$$|\operatorname{Ext}(T, Z)| \geqslant 2^{\aleph_0}$$

имеет место для любой бесконечной периодической группы T. [*Указание*: если цоколь группы T конечен, то она содержит группу вида $Z(p^\infty)$.]

2 (Нунке [2]). Доказать, что группа $\operatorname{Ext}(P, Z)$ является прямым произведением континуального семейства групп, изоморфных Q/Z. [*Указание*: использовать точную последовательность из доказательства предложения 99.2 и тот факт, что группа P/S является расширением прямой суммы групп, изоморфных J_p, с помощью делимой группы без кручения; см. § 51, упр. 7 и § 52, упр. 16.]

3. (Ротман [3]). Если B — такая сервантная подгруппа W-группы G, что факторгруппа G/B делима, то $2^{r(B)} = 2^{r(G)}$.

4 (Прохазка [20]). W-группа, принадлежащая некоторому классу Γ_σ [см. § 86, упр. 13], свободна.

5 (Чейз [2]). Если $|\operatorname{Ext}(G, Z)| < 2^{\aleph_0}$, то группа G является прямой суммой конечной группы и $\aleph_1$-свободной группы. [*Указание*: так же как в доказательстве п. д), показать, что для любой конечно порожденной свободной подгруппы F группы G периодическая часть факторгруппы G/F должна быть конечной.]

6* (Гриффит [10]). Пусть F — свободная группа бесконечного ранга $\mathfrak{m}$. Группа G удовлетворяет условию $\operatorname{Ext}(G, F) = 0$ в том и только в том случае, если (1) каждая подгруппа группы G, имеющая ранг $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, свободна; (2) каждая подгруппа группы G индекса $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ содержит прямое слагаемое группы G индекса $\mathfrak{m}$. [*Указание*: необходимость: если $|G| \leqslant \mathfrak{m}$, то точная последовательность $0 \to H \to F \to G \to 0$, где F — свободная группа ранга $\mathfrak{m}$, расщепляется; если $A, B \subset G$, $A + B = G$ и $|B| \leqslant \mathfrak{m}$, то группа B свободна, и точная последовательность $0 \to C \to A \oplus B \to G \to 0$ (здесь берется внешняя прямая сумма), где группа C изоморфна некоторой подгруппе группы B, расщепляется; достаточность: если $|G| > \mathfrak{m}$ и $A/F = G$, то найдется такая подгруппа $H \subset A$, что $H \cap F = 0$, и образ ее при эпиморфизме $A \to G$ является прямым слагаемым индекса $\mathfrak{m}$ в группе G; показать, что группа $A/(H \oplus F)$ свободна.]

Замечания

До 30-х годов фактически ничего не было известно о группах без кручения, исключая конечно порожденные группы. Первым важным шагом в изучении групп без кручения явилась работа Понтрягина [1], где были опубликованы знаменитый критерий свободности счетных групп [теорема 19.1], а также пример неразложимой группы ранга 2. [Ввиду понтрягинской теории двойственности с помощью этого примера было доказано существование компактной связной абелевой группы размерности 2, не разложимой в прямое произведение групп размерности 1.] Теория групп без кручения конечного ранга получила дальнейшее развитие в работах Дэрри [1], Куроша [2] и Мальцева [1]. [См. также работу Калужнина [1].] Эта теория не оправдала ожиданий и не было известно никаких ее хороших приложений. [Лишь недавно Арнольдом были открыты некоторые интересные приложения.] В несколько ином виде результаты, касающиеся групп без кручения конечного ранга, были распространены Чекерешем [1] на случай групп счетного ранга. О другом подходе к этим вопросам см. работу Кэмпбелла [1].

Начало общей теории групп без кручения было положено фундаментальной работой Бэра [6]. Установив неразложимость сервантных подгрупп группы целых p-адических чисел, Бэр сразу же получил неразложимые группы произвольных мощностей, не превосходящих мощность континуума. Несколько основных результатов о вполне разложимых и сепарабельных группах также были доказаны в этой работе, до сих пор являющейся ценным источником идей. Родственным проблемам посвящены работы Е. С. Ляпина [1—5].

В действительности структурная теория групп без кручения не слишком продвинулась вперед со времени появления статьи Бэра. Несомненным препятствием здесь послужило открытие Йонсоном [1], а затем Корнером [1] довольно странных прямых разложений, что привело теорию групп без кручения конеч-

ного ранга в состояние хаоса. Какой-то порядок был восстановлен самим Йонсоном [2], но таким неожиданным способом [см. теорему 92.5], что вера в изоморфизм как исключительный принцип классификации была поколеблена. К настоящему времени мы знаем, что правильный подход к рассмотрению квазиизоморфизмов — это представлять их как изоморфизмы в подходящей факторкатегории [Уокер [7]]. К сожалению, понятие квазиизоморфизма не сыграло существенной роли в решении структурной проблемы: исследование групп ранга 2 в работе Бьюмонта и Пирса [4] убедительно показывает, что классификация групп с точностью до квазиизоморфизма еще далека до завершения.

Имеется обширная литература о группах без кручения конечного ранга, см., например, Ротман [2, 4], Батлер [1], Ричмен [2], несколько работ Прохазки и т. д.

Некоторое время центральной проблемой был вопрос о существовании больших неразложимых групп. Имелось несколько примеров, полученных в более или менее явном виде, неразложимых групп мощностей, не бóльших мощности континуума, и было высказано предположение [например, в последних работах Селе], что мощность континуума — верхняя грань. Идеи де Гроота [2] и Лося [относительно узких групп] помогли перешагнуть через магический континуум, и в работах Хуляницкого [3], Фукса [11] и Сонсяды [3] были обнаружены неразложимые группы мощности $2^{2^{\aleph_0}}$. В работе Фукса [18] утверждалось, что существуют неразложимые группы произвольных мощностей, но этот факт не был обоснован, поскольку в доказательстве имелся пробел теоретико-множественного характера. Для кардинальных чисел, меньших первого сильно недостижимого кардинального числа, пробел устранил Корнер [8]. Доказательство теоремы 89.2 следует методу, разработанному Фуксом [18]. Корнер анонсировал другое доказательство более сильного утверждения о существовании однородных неразложимых групп для тех же мощностей.

В связи с неразложимостью возникают интересные вопросы для модулей. Над кольцом целых p-адических чисел не существует неразложимых модулей без кручения ранга $r > 1$. Как отметил Капланский [3], кольцо нормирования обладает этим же свойством тогда и только тогда, когда оно является максимальным кольцом нормирования. До сих пор точно не известно, какие коммутативные области целостности сохраняют указанное свойство, но благодаря Матлису [Matlis E., *Trans. Amer Math. Soc.*, **134** (1968), 315—324] в некоторых важных частных случаях известен полный ответ на этот вопрос. В связи со сказанным стоит упомянуть удивительный результат Фейса и Э. Уокера [Faith C., Walker E. A., *J. Algebra*, **5** (1967), 203—221]: кольцо **R** обязано быть нётеровым, если существует такое кардинальное число $\mathfrak{m}$, что все **R**-инъективные модули являются прямыми суммами модулей мощности $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$. Коммутативные кольца **R**, все модули над которыми являются прямыми суммами неразложимых модулей,— это артиновы кольца главных идеалов и только они, см. работу Уорфилда [Warfield R. B , *Math. Z.*, **125** (1972), 187—192].

Модули без кручения ранга 1 над дедекиндовыми областями целостности поддаются классификации, как показали Рибенбойм [Ribenboim P., *Summa Brasil. Math.*, **3** (1952), 21—36] и Колеттис [3]. Модули без кручения конечного ранга во многих отношениях ведут себя так же, как и группы без кручения конечного ранга, см. статью Капланского [Kaplansky I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 327—340]. Некоторые теоремы о вполне разложимых и сепарабельных группах распространяются на модули над дедекиндовыми областями целостности, см. Колеттис [3]; а модули без кручения ранга 1 со свойством сокращения почти полностью могут быть описаны, как показали Фукс и Лунстра [2].

Теория узких групп имеет короткую историю: в течение немногих лет эти группы изучались в основном Лосем, Сонсядой [4] и Нунке [2]. Обобщение на случай модулей см. в работе Аллука [Allouch D., Thèse, Univ. Montpellier, 1969—1970].

Прямые произведения групп ранга 1 и модулей ранга 1 также привлекали к себе внимание. Если P — прямое произведение счетного числа бесконечных циклических групп, наделенное топологией произведения [компоненты дискретны], то любые две сервантные и плотные подгруппы группы P, имеющие счетный

ранг, могут быть отображены одна на другую при некотором автоморфизме группы P [Чейз [4]]. Удивительно следующее: в то время как замкнутые подгруппы группы P снова являются прямыми произведениями бесконечных циклических групп, для прямых произведений несчетного числа сомножителей это уже неверно [Нунке [4]]. Чейз [1] показал, что прямые произведения модулей, изоморфных кольцу **R**, в том и только в том случае всегда проективны как левые **R**-модули, когда кольцо **R** совершенно слева, а конечно порожденные правые идеалы кольца **R** являются конечно представимыми.

Проблема Уайтхеда представляется одним из наиболее трудных открытых вопросов в теории групп без кручения. Несчетный случай впервые был рассмотрен Ротманом [3] и более подробно Чейзом [2, 3]; см. также Вильоен [1]. Хороший обзор имеющихся результатов дал Г. Э. Рейд [1]. Гриффит [5] получил дополнительные результаты. Если расширить задачу и решать ее для модулей, то уже в случае счетно порожденных модулей появляются новые трудности. Для модулей счетного ранга над кольцом главных идеалов проблема решена Герстнером, Каупом и Вейднером [Gerstner O., Kaup L., Weidner H. G., *Arch. Math.* **20** (1969), 503—514].

Для произвольных колец наиболее подходящим обобщением групп без кручения являются, пожалуй, плоские модули. Они обладают тем свойством, что в случае конечной представимости являются проективными. Некоторое число простых фактов переносится на случай плоских модулей, например класс плоских модулей замкнут относительно взятия прямых сумм. Однако прямые произведения плоских левых **R**-модулей не обязаны быть плоскими: это выполняется в том и только в том случае, когда конечно порожденные правые идеалы кольца **R** являются конечно представимыми [см. Чейз [1]].

Колеттис [Kolettis G., *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 482—486] сделал интересное наблюдение, касающееся коммутативных областей целостности **R**, над которыми сервантные подмодули конечного ранга вполне разложимых **R**-модулей без кручения также являются вполне разложимыми. Это выполняется, если в **R** имеется не более двух простых элементов, если же число простых элементов равно трем или больше трех, **R** не обязано обладать указанным свойством.

Достаточно удивительный факт отметил Гриффит [8]: группа без кручения A, являющаяся расширением свободной подгруппы F с помощью тотально проективной p-группы A/F, обязана быть свободной. Хилл [22] указал на то, что для произвольных редуцированных p-групп A/F это утверждение уже неверно. Прохазка [11] и Бицан [2] доказали аналогичный результат для однородных вполне разложимых групп F при более сильных предположениях.

Проблема 66. Охарактеризовать группы без кручения ранга 2 с помощью инвариантов.

Проблема 67. При данном натуральном числе $r \geqslant 3$ найти все последовательности $n_1 < \ldots < n_s$ натуральных чисел, для каждой из которых существует группа ранга r, обладающая разложениями на $n_1, \ldots, n_s$ неразложимых слагаемых соответственно.

Проблема 68. Пусть даны такие натуральные числа $r_1, \ldots, r_k, r'_1, \ldots, r'_l$, что $r_1 + \ldots + r_k = r'_1 + \ldots + r'_l$. Найти условия, при которых существует группа без кручения, обладающая прямыми разложениями на неразложимые слагаемые рангов $r_1, \ldots, r_k$ и $r'_1, \ldots, r'_l$ соответственно.

Проблема 69 (Корнер [6]). Существуют ли группы конечного ранга, обладающие бесконечным числом попарно неизоморфных прямых разложений?

Леди недавно было показано, что группа без кручения ранга 3 не может иметь бесконечного числа неизоморфных прямых разложений [1]).

Проблема 70. Охарактеризовать группы без кручения конечного ранга, обладающие свойством сокращения.

В случае групп ранга 1 проблема решена Фуксом и Лунстрой [2].

Проблема 71. Введем отношение эквивалентности между группами без кручения A и B конечного ранга. Назовем их эквивалентными, если $A \oplus C \cong B \oplus C$, где C — некоторая группа без кручения конечного ранга. Установить связь между этим отношением эквивалентности и квазиизоморфизмом.

Проблема 72 (Корнер). Существует ли такая группа, что каждое ее ненулевое слагаемое является прямой суммой бесконечного числа ненулевых подгрупп?

Проблема 73. Может ли прямая сумма конечного числа групп, изоморфных группе A, обладать неразложимым слагаемым, если A таковых не имеет?

Проблема 74. Какие из слагаемых векторных групп снова являются векторными группами?

Проблема 75. а) Исследовать хопфовы группы.

б) (Дж. Баумслаг) являются ли неразложимые группы без кручения хопфовыми?

Являются ли такими группы с конечными группами автоморфизмов?

О хопфовых группах см. Баумслаг [1, 2] и Корнер [5].

Проблема 76 (Г. Э. Рейд [1]). Все ли следующие классы групп различны: $\oplus Z$, $\prod Z$, $\prod(\oplus Z)$, $\oplus(\prod Z)$, $\oplus(\prod(\oplus Z))$ и т. д.? Здесь допускается произвольное число компонент.

Проблема 77. Исследовать структуру сепарабельных групп без кручения, в частности, при условии однородности.

Проблема 78. а) Какие из узких групп могут быть вложены в прямую сумму счетного числа редуцированных групп?

б) Существует ли такое семейство групп, что все узкие группы могут быть из него получены с помощью операций взятия прямых сумм, подгрупп и расширений?

Проблема 79 (Дж. Х. К. Уайхтед). Охарактеризовать группы A, удовлетворяющие условию $\operatorname{Ext}(A, Z) = 0$.

---

[1]) В 1974 г. проблема 69 была решена отрицательно для групп любого конечного ранга [Lady E. L., *J. Algebra*, **32** (1974), № 1, 51—52].

Глава XIV

СМЕШАННЫЕ ГРУППЫ

Смешанные группы A образуют наиболее общий класс абелевых групп, и хорошая структурная теория должна, очевидно, давать полную информацию об их периодических частях T, а также о соответствующих группах без кручения A/T и в то же время описывать, как соединяются эти группы для образования группы A. Следовательно, такая теория может существовать лишь для тех классов смешанных групп A, для которых обе группы T и A/T могут быть достаточно полно охарактеризованы. В этом случае проблема сводится к отысканию способов, с помощью которых можно описать неизоморфные расширения групп T с помощью групп A/T. Высотные матрицы, которые будут рассмотрены в § 103, представляются в этом смысле подходящим инструментом для некоторых групп, ранг без кручения которых равен 1.

Была проведена большая работа по решению проблемы расщепления, а именно следующего вопроса: когда смешанная группа расщепляется в прямую сумму своей периодической части и некоторой группы без кручения. В § 100 и 101 мы полностью опишем все периодические группы T и все группы без кручения G соответственно, для которых расщепляется всякая смешанная группа с изоморфной T периодической частью или соответственно с изоморфной G факторгруппой по периодической части. Общая проблема расщепления, состоящая в описании всех пар T, G периодических групп и групп без кручения, для которых $\operatorname{Ext}(T, G) = 0$, остается, однако, нерешенной.

Последний параграф настоящей главы посвящен построению групп с заданной последовательностью Ульма. Довольно сложная процедура приводит к теореме существования, полезной при доказательствах существования групп с определенными свойствами.

§ 100. Расщепляющиеся смешанные группы

Изложение теории смешанных групп мы начнем с обсуждения вопроса, при каких условиях смешанная группа расщепляется, т. е. является прямой суммой своей периодической части T и некоторой группы без кручения G. Совершенно ясно, что эта группа G единственна только с точностью до изоморфизма.

Сначала мы приведем примеры нерасщепляющихся смешанных групп.

Пример 1. Пусть T — редуцированная неограниченная периодическая группа. Из лемм 55.1 и 55.4 мы заключаем, что $A = \operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ — копериодическая группа, периодическая часть которой изоморфна группе T и которая не имеет ненулевых слагаемых, являющихся группами без кручения. Следствие 54.4 дает $A \neq T$, и, таким образом, A — нерасщепляющаяся смешанная группа с периодической частью T.

Пример 2. Пусть $p_1, \ldots, p_i, \ldots$ — различные простые числа. Положим

$$T_1 = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle, \quad \text{где} \quad o(a_i) = p_i.$$

Тогда T_1 — периодическая часть группы $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle$. Рассмотрим элемент $b_0 = (a_1, \ldots, a_i, \ldots) \in \prod \langle a_i \rangle$. При $i \neq j$ уравнение $p_j x = a_i$ имеет единственное решение в группе $\langle a_i \rangle$. Следовательно, группа $\prod \langle a_i \rangle$ содержит такие однозначно определенные элементы b_i ($i = 1, 2, \ldots$), что i-я координата элемента b_i есть 0 и выполняется равенство

$$p_i b_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots) = b_0 - a_i.$$

Мы получаем, что T_1 — периодическая часть группы $A_1 = \langle T_1, b_1, \ldots, b_i, \ldots \rangle$. Допустим, что группа A_1 расщепляется, $A_1 = T_1 \oplus G$ при некотором $G \subset A_1$. Тогда из равенства $b_i = h_i + g_i$ ($h_i \in T_1$, $g_i \in G$) следует равенство

$$p_i h_i + p_i g_i = p_i b_i = b_0 - a_i = (h_0 - a_i) + g_0.$$

Приравнивая слагаемые, лежащие в T_1, получаем $p_i h_i = h_0 - a_i$ при $i = 1, 2, \ldots$. Для одного из наших простых чисел, пусть это будет p_j, справедливо равенство $p_j h = h_0$ при некотором $h \in T_1$. Отсюда следует равенство $p_j (h - h_j) = a_j$, и мы пришли к противоречию. Таким образом, группа A_1 не расщепляется.

Пример 3. Для некоторого простого числа p положим

$$T_2 = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle, \quad \text{где} \quad o(a_i) = p^{2i}.$$

Для $i = 1, 2, \ldots$ определим элементы

$$b_i = (0, \ldots, 0, a_i, pa_{i+1}, p^2 a_{i+2}, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle.$$

Элементы b_i имеют бесконечные порядки и удовлетворяют равенствам $pb_{i+1} = b_i - a_i$ ($i = 1, 2, \ldots$). Используя эти соотношения, легко получить, что T_2 — периодическая часть группы $A_2 = \langle T_2, b_1, \ldots, b_i, \ldots \rangle$. Если бы для некоторого $G \subset A_2$ имело место разложение $A_2 = T_2 \oplus G$, то в силу $pb_{i+1} - b_i \in T_2$ группа G была бы p-делимой подгруппой группы A_2 в противоречие с тем фактом, что группа $\prod \langle a_i \rangle$ не содержит ненулевых p-делимых подгрупп. Следовательно, группа A_2 не расщепляется.

Основная цель настоящего параграфа — охарактеризовать такие периодические группы T, что все смешанные группы с периодической частью T расщепляются. Это условие равносильно тому, что T удовлетворяет равенству $\operatorname{Ext}(G, T) = 0$ для всех групп без кручения G;

другими словами, T — копериодическая группа. Полная характеризация периодических копериодических групп нам известна, и следующее утверждение есть не что иное, как переформулировка следствия 54.4.

Теорема 100.1 (Бэр [4], Фомин [1]). *Периодическая группа T обладает тем свойством, что всякая смешанная группа с периодической частью T расщепляется, в том и только в том случае, когда T является прямой суммой делимой и ограниченной групп.*

Следующее доказательство не зависит от теории копериодических групп.

Для удобства сделаем сначала простое замечание. Пусть T — периодическая часть группы A, и пусть S, B — такие подгруппы группы A, что $S \subseteq T \subseteq B \subseteq A$. Если A расщепляется, то расщепляется и группа B/S. Действительно, пусть $A = T \oplus G$. Тогда $B = T \oplus (B \cap G)$ и $B/S \cong T/S \oplus (B \cap G)$.

Данную периодическую группу T представим в виде $T = D \oplus T'$, где D — делимая группа, а T' — редуцированная группа. Если группа T' не является ограниченной, то либо она имеет бесконечное число ненулевых p_i-компонент T'_{p_i}, либо содержит неограниченную p-компоненту T'_p. В первом случае существуют эпиморфизмы $T'_{p_i} \to Z(p_i)$, которые дают эпиморфизм $T' \to T_1$, где T_1 — группа, определенная в примере 2. Во втором случае базисная подгруппа группы T'_p неограниченная, и, значит, существует эпиморфизм, отображающий ее на группу T_2 из примера 3. В силу теоремы 36.1 существует эпиморфизм $T'_p \to T_2$. Таким образом, если T' неограниченна, то существует эпиморфизм η, отображающий T на T_1 или T_2. Ядро эпиморфизма η обозначим через S. Благодаря предложению 24.6 найдется такая группа H, что можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S & \to & T & \xrightarrow{\eta} & T_k & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & S & \to & H & \to & A_k & \to & 0 \end{array} \qquad (k=1 \text{ или } 2)$$

с точными строками. Так как вертикальные отображения являются мономорфизмами, то периодической частью группы H, очевидно, служит T. Группы A_k не расщепляются, и, учитывая сказанное в начале доказательства, мы получаем, что H не расщепляется. Необходимость, таким образом, доказана.

Допустим теперь, что $T = D \oplus B$, где D — делимая периодическая группа, а группа B ограниченная, и T является периодической частью некоторой группы A. Тогда $A = D \oplus A'$ и $T = D \oplus B'$, где B' — некоторая подгруппа группы A', причем $B \cong B'$. По теореме 27.5 группа B' — прямое слагаемое в A', значит, и T — прямое слагаемое в A. ∎

Достаточные условия теоремы 100.1 можно без труда обобщить.

Предложение 100.2 (Фукс [16]). *Если A — такая смешанная группа, что при некотором натуральном n группа nA расщепляется, то и A расщепляется.*

Доказательство достаточно провести для случая, когда $n = p$ — простое число. Пусть $pA = T' \oplus G'$, где T' — периодическая группа, а G' — группа без кручения. Очевидно, что $T' = pT$, где T — периодическая часть группы A. Определим G как T-высокую подгруппу группы A, содержащую G'. Если $a \in A$ и $pa = b + c$ ($b \in T$, $c \in G$), то $b \in T' = pT$, и в силу леммы 9.9 мы получаем $A = T \oplus G$. ∎

Общих критериев расщепляемости смешанной группы совсем немного. Мы приведем один из них, который используется при изучении групповых алгебр. Сначала докажем простую лемму.

Лемма 100.3. *Пусть A — смешанная группа с ограниченной периодической частью T, и пусть $C = T \oplus H$ — сервантная подгруппа группы A. Тогда $A = T \oplus G$ для некоторой подгруппы G, содержащей H.*

Пусть $nT = 0$. Факторизуя по подгруппе nC и применяя теорему 27.10, получаем $A/nC = C/nC \oplus K/nC$ при некотором $K \supseteq nC$. Положим $G = H + K$; тогда, очевидно, $T + G = A$. Если элемент $x = u + v$ ($u \in H$, $v \in K$) лежит в T, то $x - u = v \in C \cap K = nC = nH$, откуда следует $x = 0$. Таким образом, $A = T \oplus G$. ∎

Предложение 100.4 (Мэй [4]). *Смешанная группа A расщепляется в том и только в том случае, когда существует такая возрастающая цепочка $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ подгрупп группы A, что*

1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$;

2) *для каждого n группа $T(A_n)$ ограниченна*;

3) *для каждого n справедливо равенство $T(A/A_n) = (T(A) + A_n)/A_n$.*

Если $A = T \oplus G$, где T — периодическая группа, а G — группа без кручения, то группы $A_n = T[n!] \oplus G$ ($n = 1, 2, \ldots$) удовлетворяют условиям 1)—3).

Обратно, пусть группа A удовлетворяет условиям предложения. По свойству 2) получаем $A_1 = T(A_1) \oplus G_1$, где G_1 — группа без кручения. Допустим, что при всех $i \leqslant n$ мы уже получили разложения $A_i = T(A_i) \oplus G_i$, для которых $G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n$. Положим $A'_{n+1} = T(A_{n+1}) \oplus G_n$ и заметим, что $(T(A) + A_n) \cap A_{n+1} = A'_{n+1}$. По теоремам об изоморфизмах и свойству 3) группа

$$A_{n+1}/A'_{n+1} \cong (T(A) + A_{n+1})/(T(A) + A_n) \cong$$
$$\cong [(T(A) + A_{n+1})/A_n]/T(A/A_n)$$

не имеет кручения. Из леммы 100.3 мы заключаем, что $A_{n+1} = T(A_{n+1}) \oplus G_{n+1}$ для некоторого $G_{n+1} \supseteq G_n$. Положив $G = \bigcup G_n$, очевидно, получим $A = T(A) \oplus G$. ∎

Упражнения

1. Прямые слагаемые расщепляющихся групп расщепляются.

2 (Прохазка [1]). Подгруппа конечного индекса группы A расщепляется в том и только в том случае, когда A расщепляется.

3. Смешанная группа A с периодической частью T не обязана расщепляться, даже если все ее подгруппы, содержащие T и имеющие ранг без кручения 1, расщепляются. [*Указание*: получить нерасщепляющееся расширение с помощью группы $\prod Z$.]

4. (а) (Фомин [1]) Группа

$$\langle a_1, \ldots, a_n, \ldots; pa_1 = \ldots = p^n a_n = \ldots \rangle$$

не расщепляется.

(б) (Куликов [5]) Группа

$$\langle a_1, \ldots, a_n, \ldots; p^2(a_1 - pa_2) = \ldots = p^{2n}(a_n - pa_{n+1}) = \ldots = 0 \rangle$$

не расщепляется.

5 (Оппельт [3]). Пусть $T = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n$, где каждое слагаемое T_i является p_i-группой, и пусть A — смешанная группа с периодической частью T. Группа A расщепляется в том и только в том случае, когда для каждого i группа $A/(T_1 \oplus \ldots \oplus T_{i-1} \oplus T_{i+1} \oplus \ldots \ldots \oplus T_n)$ расщепляется.

6 (Куликов [4]). Любые два прямых разложения расщепляющейся смешанной группы $A = T \oplus G$ обладают изоморфными продолжениями в том и только в том случае, когда этому условию удовлетворяют обе группы T и G.

7. Показать, что существуют эпиморфизмы $A_1 \twoheadrightarrow T_1$ (пример 2) и $A_2 \twoheadrightarrow T_2$ (пример 3). [*Указание*: $a_i \mapsto 0$, $b_0 \mapsto 0$, $b_i \mapsto a_i$ и $a_{4i} \mapsto a_i$, $a_{4i+k} \mapsto 0$ $(k = 1, 2, 3)$.]

8. Привести пример такой смешанной группы C, что ее периодическая часть не является эндоморфным образом группы C. [*Указание*: использовать пример 1 или взять в группе из примера 2 такую подгруппу C, что $A_1 \subseteq C \subset \prod \langle a_i \rangle$ и $C/T_1 \cong Q$, и, допустив существование эпиморфизма $C \twoheadrightarrow T_1$, рассмотреть образ элемента b_0 при этом отображении.]

9. (а) Пусть A — смешанная группа, причем ее периодическая часть T содержит лишь конечное число ненулевых p-компонент T_i. Подгруппа T является эндоморфным образом группы A в том и только в том случае, когда каждая группа T_i является эндоморфным образом группы A.

(б) Привести контрпример в случае, когда A содержит бесконечное число ненулевых редуцированных p-компонент.

10. Для произвольной периодической группы T существует такая смешанная группа A с периодической частью T, что всякий периодический эпиморфный образ A является прямой суммой делимой и огра-

ниченной групп. [*Указание*: $A = \text{Exp}(Q/Z, T) \oplus D$, где D — делимая часть группы T.]

11 (Корнер). Для периодической группы T следующие условия эквивалентны:

(а) T является эндоморфным образом каждой смешанной группы, содержащей T в качестве периодической части;

(б) базисная подгруппа группы T является эндоморфным образом каждой смешанной группы, содержащей T в качестве периодической части;

(в) T является прямой суммой делимой и ограниченной групп. [*Указание*: упр. 10.]

12 (Мишина [2]). Пусть существует автоморфизм смешанной группы A, действующий как умножение на -1 на ее периодической части T и индуцирующий тождественное отображение группы A/T. Если $A[2] = 0$, то A расщепляется.

§ 101. Группы Бэра свободны

Следующий вопрос, которым мы будем заниматься, был поставлен Бэром [4]. Этот вопрос двойствен вопросу, решенному в теореме 100.1, и формулируется так: каковы группы без кручения G, для которых всякая смешанная группа A с периодической частью T, удовлетворяющая условию $A/T \cong G$, расщепляется. Следуя терминологии Ротмана [3], назовем произвольную группу G с указанным свойством *группой Бэра* (или *бэровской группой*), т. е. будем говорить, что G — группа Бэра, если

$$\text{Ext}(G, T) = 0 \quad \text{для любой периодической группы } T.$$

Тривиальным примером групп Бэра служат свободные группы. Наша цель — показать, что других групп Бэра не существует.

Теорема 101.1 (Гриффит [7]). *Группы Бэра свободны.*

Доказательство этого факта основывается на теореме существования, имеющей и самостоятельный интерес. Эта теорема формулируется так:

Теорема 101.2 (Гриффит [7]). *Для любого кардинального числа* $\mathfrak{m}$ *существует смешанная группа* M, *удовлетворяющая условиям*

1) M/T — *делимая группа ранга* $\mathfrak{m}$ (T — *периодическая часть группы* M);

2) *любая подгруппа без кручения в группе* M *свободна.*

Сначала мы покажем, как теорема 101.1 получается из теоремы 101.2, а затем приступим к доказательству более сложной теоремы 101.2.

Итак, предположим, что теорема 101.2 доказана, и пусть G — группа Бэра. Легко видеть, что подгруппы групп Бэра сами являются группами Бэра. Отсюда и из п. Г) § 52 мы получаем, что G — группа без кручения. Положим $\mathfrak{m} = r(G)$. Благодаря условию 1) существует

мономорфизм $\varphi: G \to M/T$. По теореме 51.3 точная последовательность $0 \to T \to M \xrightarrow{\alpha} M/T \to 0$ дает точную последовательность

$$\operatorname{Hom}(G, M) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}(G, M/T) \to \operatorname{Ext}(G, T) = 0.$$

Следовательно, α_* — эпиморфизм, откуда следует, что φ индуцируется некоторым гомоморфизмом $\psi: G \to M$, т. е. $\alpha\psi = \varphi$. Так как φ — мономорфизм, то и ψ — мономорфизм. Другими словами, группа G изоморфна подгруппе группы M. Из условия 2) сразу следует теперь, что G — свободная группа. ∎

Доказательство теоремы 101.2 разобьем на две леммы.

Лемма 101.3 (Гриффит [7]). *Существует такая счетная смешанная группа N, что*

а) $N/T \cong Q$, *где T — периодическая часть группы N;*

б) *любая ненулевая подгруппа без кручения в группе N является бесконечной циклической группой.*

Для каждого простого числа p возьмем циклические группы $\langle a_{pn} \rangle \cong Z(p^{2n+1})$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и образуем группы

$$T_p = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \langle a_{pn} \rangle \quad \text{и} \quad U_p = \prod_{n=0}^{\infty} \langle a_{pn} \rangle.$$

Тогда элемент

$$u_p = (a_{p0}, pa_{p1}, \ldots, p^n a_{pn}, \ldots) \in U_p$$

имеет бесконечный порядок и $p \nmid u_p$. Положим $T = \bigoplus_p T_p$, $U = \prod_p U_p$ и заметим, что T лежит в периодической части группы U, а элемент

$$u = (u_2, \ldots, u_p, \ldots) \in U$$

не делится ни на какое простое число p. Легко видеть, что в группе U/T имеется подгруппа $N/T \cong Q$, содержащая $u + T$. Покажем, что для этой подгруппы N выполнено также условие б). Предположим, что $F \neq 0$ — подгруппа группы N и $F \cap T = 0$. Тогда $F \cong (F+T)/T \subseteq N/T$, откуда F имеет ранг 1. Если $a \neq 0$ — элемент из F, то найдутся такие отличные от нуля целые числа m, n, что $ma = nu$. Для почти всех простых чисел p справедливо $(p, n) = 1$ и, значит, $p \nmid ma$. Следовательно, p-высота элемента a в группе F равна нулю для почти всех p, а так как ни для какого простого числа q группа N не содержит элементов бесконечного порядка бесконечной q-высоты, то $F \cong Z$. ∎

Лемма 101.4 (Гриффит [7]). *Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — такие группы, имеющие конечный ранг без кручения, что при каждом i все подгруппы без кручения в группе M_i свободны. Тогда группа $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ обладает тем же свойством.*

Пусть T_i — периодическая часть группы M_i. Тогда $T = \oplus T_i$ — периодическая часть группы M, и можно написать $M/T = \bigoplus_{i \in I} M_i/T_i$. Обозначим соответственно через θ_i и θ канонические отображения $M_i \to M_i/T_i$ и $M \to M/T$.

А) Рассмотрим сначала случай двух слагаемых: $M = M_1 \oplus M_2$ [здесь группа M_1 не обязана даже иметь конечный ранг без кручения]. Пусть π_i: $M \to M_i$ $(i = 1, 2)$ — проекции, и пусть F — подгруппа без кручения в группе M. Положим

$$H = \{a \in F \mid \pi_1 a \in T_1\} = \{a \in F \mid \theta a \in \theta_2 M_2\}.$$

Очевидно, H — такая подгруппа без кручения группы M, что $H \cap \operatorname{Ker} \pi_2 = H \cap M_1 = 0$ [так как $H \cap M_1$ содержится в T_1]. Следовательно, $\pi_2 \mid H$ — мономорфизм и, таким образом, $\pi_2 H$ — свободная группа как подгруппа без кручения в M_2. Так как $\pi_2 H$ должна иметь конечный ранг, то существует такое целое число $m > 0$, что $mH \subseteq M_2$. Положив $\varphi = m\pi_1$, легко проверить, что $F \cap \operatorname{Ker} \varphi = H$ и φF $[\subseteq M_1]$ — группа без кручения. Следовательно, φF — свободная группа. Но тогда и $F \cong H \oplus \varphi F$ — свободная группа.

Б) Докажем, что для любого множества I всякая подгруппа без кручения F группы $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ является $\aleph_1$-свободной. В силу теоремы 19.1 достаточно рассмотреть подгруппы K группы F, имеющие конечный ранг. Но такая подгруппа K содержится в прямой сумме конечного числа групп M_i, и, применяя индукцию на основании п. А), мы без труда получаем, что K — свободная группа. Следовательно, группа F является $\aleph_1$-свободной.

В) Для данной ненулевой подгруппы без кручения F в группе M можно построить вполне упорядоченную возрастающую последовательность подгрупп

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_\sigma \subset \ldots \subset F_\tau = F,$$

где τ — некоторое порядковое число, и последовательность

$$\varnothing = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_\tau = I$$

подмножеств множества I, для которых при любом σ выполняются следующие условия:

α) $F_\sigma = F \cap (\bigoplus_{i \in I_\sigma} M_i)$;

β) $\bigcup_{\rho < \sigma} F_\rho = F_\sigma$ и $\bigcup_{\rho < \sigma} I_\rho = I_\sigma$, если σ — предельное порядковое число;

γ) $|I_\sigma \setminus I_{\sigma-1}| \leqslant \aleph_0$, если число $\sigma \geqslant 1$ не является предельным;

δ) подгруппа $H_\sigma = \{a \in F \mid \theta a \in \bigoplus_{i \in I_\sigma} \theta_i M_i\}$ совпадает с F_σ.

Для $\sigma = 0$ доказывать нечего. Пусть $\sigma \geqslant 1$, и пусть для всех порядковых чисел $\rho < \sigma$ подгруппы $F_\rho \subseteq F$ и подмножества $I_\rho \subseteq I$ уже построены. Если σ — предельное порядковое число, то F_σ и I_σ

строим в соответствии с п. β). Тогда условия α) и δ), очевидно, выполняются. Если $\sigma - 1$ существует и $F_{\sigma-1} \subset F$, то выбираем произвольный элемент $b \in F \setminus F_{\sigma-1}$ и рассматриваем подгруппу $B_1 = \langle F_{\sigma-1}, b \rangle$ и подмножество $J_0 = I_{\sigma-1}$. Пусть J_1 — такое наименьшее подмножество множества I, содержащее J_0, что $B_1 \subseteq \bigoplus_{i \in J_1} M_i$. Если подгруппы $B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_k$ и подмножества $J_1 \subseteq \ldots \subseteq J_k$ уже определены, то возьмем в качестве J_{k+1} наименьшее подмножество множества I, содержащее J_k, для которого

$$B_{k+1} = \{a \in F \mid \theta a \in \bigoplus_{i \in J_k} \theta_i M_i\} \subseteq \bigoplus_{i \in J_{k+1}} M_i \quad (k \geqslant 1).$$

Положим

$$I_\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad \text{и} \quad F_\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

и проверим, что для σ выполнены условия α), γ), δ). Чтобы проверить, что выполнено условие γ), достаточно показать, что $|J_{k+1} \setminus J_0| \leqslant \aleph_0$ для каждого k. Это очевидно для $k = 1$. Если $\eta: M \to \bigoplus_{i \in J_{k+1} \setminus J_0} M_i$ — проекция, то $F_{\sigma-1} \subseteq \operatorname{Ker} \eta \cap B_{k+1}$. Если при некотором $m > 0$ для $x \in B_{k+1}$ выполняется $mx \in \operatorname{Ker} \eta \cap B_{k+1}$, то $m\eta x = 0$ и, значит, $\theta x \in \bigoplus_{i \in I_{\sigma-1}} \theta_i M_i$. В силу δ) имеем $x \in H_{\sigma-1} = F_{\sigma-1}$. Отсюда следует, что $F_{\sigma-1} = \operatorname{Ker} \eta \cap B_{k+1}$ и ηB_{k+1} — группа без кручения. Из неравенства $|J_k \setminus J_0| \leqslant \aleph_0$ и определения групп M_i следует неравенство $|\eta B_{k+1}| \leqslant \aleph_0$ и счетность множества $J_{k+1} \setminus J_0$ становится очевидной. Докажем, что выполнено условие α). Возьмем $x \in F \cap (\bigoplus_{i \in I_\sigma} M_i)$. Существует такое k, что

$$x \in F \cap (\bigoplus_{i \in J_{k+1}} M_i), \quad \text{т. е.} \quad \theta x \in \bigoplus_{i \in J_k} \theta_i M_i,$$

откуда $x \in B_{k+1} \subseteq F_\sigma$. Наконец, справедливость δ) доказывается аналогично: если $x \in H_\sigma$, то $\theta x \in \bigoplus_{i \in J_k} \theta_i M_i$ для некоторого k и, таким образом, $x \in B_{k+1} \subseteq F_\sigma$. Доказательство п. В) завершено.

Г) Сохраняя обозначения п. В), докажем, что

$$F_{\sigma+1} = F_\sigma \oplus A_{\sigma+1},$$

где $A_{\sigma+1}$ — некоторая свободная группа. Пусть $\xi: M \to \bigoplus_{i \in I_{\sigma+1} \setminus I_\sigma} M_i$ — проекция. Тогда, очевидно,

$$F_{\sigma+1} \cap \operatorname{Ker} \xi = F_{\sigma+1} \cap (\bigoplus_{i \in I_\sigma} M_i) = F \cap (\bigoplus_{i \in I_\sigma} M_i) = F_\sigma.$$

Если при некотором $x \in F_{\sigma+1}$ элемент ξx имеет конечный порядок, то $x \in H_\sigma = F_\sigma$ и, таким образом $\xi F_{\sigma+1}$ — подгруппа без кручения

в группе $\bigoplus_{i \in I_{\sigma+1} \setminus I_\sigma} M_i$. Ранг без кручения последней группы не больше $\aleph_0$, так что $|\xi F_{\sigma+1}| \leqslant \aleph_0$, и в силу п. Б) группа $\xi F_{\sigma+1}$ свободна. Следовательно, F_σ служит прямым слагаемым для группы $F_{\sigma+1}$, т. е. $F_{\sigma+1} = F_\sigma \oplus A_{\sigma+1}$, где $A_{\sigma+1} \cong \xi F_{\sigma+1}$ — свободная группа.

Пусть теперь F — произвольная подгруппа без кручения группы M из леммы 101.4. Тогда F — объединение подгрупп F_σ, значит, F порождается подгруппами $A_{\sigma+1}$, где $\sigma + 1 < \tau$. Но эти подгруппы порождают в F их прямую сумму, следовательно, F — свободная группа. ∎

Доказательство теоремы 101.2. Возьмем множество I заданной мощности $\mathfrak{m}$ и для каждого $i \in I$ выберем $M_i \cong N$, где N — группа из леммы 101.3. В силу леммы 101.4 группа $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ обладает нужными свойствами. ∎

Следует заметить, что, как это ни странно, существуют несвободные группы без кручения G, для которых $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$, где T — произвольная p-группа, а простое число p может быть каким угодно [см. упр. 3]. Более того, для всякого непустого собственного подмножества Π множества всех простых чисел существует такая несвободная группа без кручения G, что $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$ при любой периодической группе T с нулевыми p-компонентами, где $p \notin \Pi$ [Гриффит [7]].

Упражнения

1 (Сонсяда [2]). Пусть T — периодическая группа, B — ее базисная подгруппа и G — группа без кручения.

(а) Показать, что $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}(G, B) = 0$.

(б) Вывести отсюда, что при изучении пар групп T, G, для которых $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$, можно ограничиться случаем, когда T — прямая сумма циклических p-групп.

2. Группа G является группой Бэра в том и только в том случае, когда $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$, где T — любая прямая сумма конечных циклических групп, для которой $|T| \leqslant |G|$.

3 (Чейз [4]). Существует несвободная группа без кручения G, для которой $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$ при любой примарной группе T. [*Указание*: в § 95, упр. 11, положить все группы X_σ равными группе рациональных чисел со знаменателями, свободными от квадратов, и вывести из § 95, упр. 12, что G — несвободная группа; показать, что $Q_p \otimes G$ — свободный Q_p-модуль, и использовать эпиморфизм $\mathrm{Ext}(Q_p \otimes G, T) \to \mathrm{Ext}(G, T)$.]

4 (Гриффит [7]). Если для группы G справедливо $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$ при любой примарной группе T, то $\mathrm{Ext}(G, T)$ — группа без кручения при любой периодической группе T. [*Указание*: если группа T имеет нулевую p-компоненту, то умножение на p является автоморфизмом группы T и, следовательно, автоморфизмом группы $\mathrm{Ext}(*, T)$.]

5. Пусть A — смешанная группа с периодической частью T и A/T — сепарабельная группа без кручения. Группа A не обязана расщеплять-

ся, даже если расщепляются все ее подгруппы, содержащие T и имеющие конечный ранг без кручения.

6 (Бэр [4]). Пусть T и G — соответственно периодическая группа и группа без кручения, и пусть $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$. Тогда

(а) если $p_1, \ldots, p_i, \ldots$ — бесконечное множество различных простых чисел, для которых $p_iT \subset T$, то G не содержит таких сервантных подгрупп S конечного ранга, чтобы в группе G/S существовали отличные от нуля элементы, делящиеся на все p_i;

(б) если для некоторого простого числа p редуцированная часть p-компоненты группы T неограниченная, то G не содержит таких сервантных подгрупп S конечного ранга, что в группе G/S имеются ненулевые элементы, делящиеся на все степени числа p.

7 (Бэр [4]). Если T — периодическая группа, а G — счетная группа без кручения, то условия (а), (б) из упр. 6 необходимы и достаточны для того, чтобы выполнялось равенство $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$. [*Указание*: представить группу G в виде объединения возрастающей цепочки сервантных подгрупп G_n конечного ранга n и воспользоваться индукцией.]

8 (Журавский [1]). Пусть A — смешанная группа с сепарабельной периодической частью T, причем группа A/T является p-делимой для всякого простого числа p, для которого T содержит нетривиальную p-компоненту. Если для каждого элемента $a \in A \setminus T$ смежный класс $a + T$ содержит такой элемент b, что $h_p(b) = h_p(a + T)$ при любом простом числе p, то группа A расщепляется. [*Указание*: такие b составляют дополнение.]

9 (Журавский [1]). Пусть A — смешанная группа ранга без кручения 1, такая, что p-компоненты ее периодической части сепарабельны для всех тех простых чисел p, для которых A/T есть p-делимая группа. Если смежный класс $a + T$ удовлетворяет условию упр. 8, то A расщепляется. [*Указание*: начав с элемента b, построить дополнение как объединение [в структурном смысле] бесконечных циклических групп.]

10 (Ляпин [2]). Пусть A — такая смешанная группа, что ее периодическая часть T сепарабельна, а группа A/T вполне разложима. Если смежные классы $a + T$ удовлетворяют условию упр. 8, то группа A расщепляется.

§ 102. Квазирасщепляющиеся смешанные группы

Теперь мы рассмотрим класс групп, в следующем смысле близких к расщепляющимся. Группу A назовем *квазирасщепляющейся*, если она содержит такую расщепляющуюся подгруппу B, что

$$nA \subseteq B \subseteq A \text{ при некотором целом } n > 0.$$

Если такая подгруппа B расщепляется, т. е. $B = S \oplus G$, где S — периодическая группа, а G — группа без кручения, то подгруппа $B + T = T \oplus G$, где T — периодическая часть группы A, также

расщепляется. Таким образом, при определении квазирасщепляемости можно считать, что $T \subseteq B$.

Сейчас мы приведем пример квазирасщепляющейся смешанной группы, которая не расщепляется.

Пример. Положим $T = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$. Пусть G есть p-адическое замыкание группы $\bigoplus_{\aleph_0} J_p$. Тогда G — алгебраически компактная группа без кручения, причем $G/pG \cong T/pT$. Следовательно, существует эпиморфизм $\eta\colon G \to T/pT$, ядро которого совпадает с pG. Пусть группа A определяется диаграммой

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & pT & \to & T & \to & T/pT & \to & 0 \\ & & \| & & \uparrow & \nwarrow^{\xi} & \uparrow \eta & & \\ 0 & \to & pT & \to & A & \longrightarrow & G & \to & 0 \end{array}$$

с точными строками и коммутативными квадратами. Группу A в этой диаграмме можно определить следующим образом:

$$A = \{(g, h) \mid g \in G,\ h \in T, \quad \text{где} \quad \eta g = h + pT\}.$$

Тогда ясно, что $pA \subseteq pG \oplus pT \subseteq A$, значит, A — квазирасщепляющаяся группа. Если бы группа A расщеплялась, то существовал бы такой гомоморфизм $\xi\colon G \to T$, что $\eta g = \xi g + pT$ при любом $g \in G$. Но по следствию 54.4 группа ξG должна быть ограниченной, а тогда образ ξG в T/pT был бы конечным, что невозможно.

Перед тем как приступить к изучению квазирасщепляющихся групп, мы докажем лемму в более общих предположениях, чем нам потребуется; с еще более общим случаем связано упр. 5.

Пусть C — группа и n — натуральное число. Умножение на n в группе C можно представить как композицию $C \xrightarrow{\mu} nC \xrightarrow{\iota} C$, где $\mu\colon c \mapsto nc$, а ι — естественное вложение. Если дана точная последовательность $E\colon 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$, то по сказанному в § 50 существует следующая коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{rccccccccc} E\colon & 0 \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow \iota & \\ E\iota\colon & 0 \to & A & \xrightarrow{\alpha} & nB + A & \xrightarrow{\beta} & nC & \to 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow \mu & \\ E\iota\mu\colon & 0 \to & A & \to & B' & \xrightarrow{\beta'} & C & \to 0. \end{array} \qquad (1)$$

Лемма 102.1 (К. Уокер [1]). *Если последовательность E_ι расщепляется, то последовательность E — представитель элемента из* Ext (C, A) $[n]$. *Если $C[n] = 0$, то верно и обратное.*

Заметим, что $E\iota\mu = nE$ [см. лемму 52.1]. Если теперь последовательность $E\iota$ расщепляется, то и последовательность nE расщепляется и, таким образом, E лежит в Ext (C, A) $[n]$. Обратно, тот факт, что E лежит в Ext (C, A) $[n]$, означает, что E содержится в ядре эндоморфиз-

ма группы Ext (C, A), индуцированного умножением на n в C. В случае $C[n] = 0$ последнее эквивалентно тому, что последовательность $E\iota$ расщепляется, как видно из утверждения 2) теоремы 53.2. ∎

Теперь легко можно доказать основной результат, касающийся характеризации квазирасщепляющихся групп.

Теорема 102.2 (К. Уокер [1]). *Смешанная группа A с периодической частью T является квазирасщепляющейся группой в том и только в том случае, когда точная последовательность*

$$0 \to T \to A \to A/T \to 0 \qquad (2)$$

служит представителем элемента конечного порядка в группе Ext $(A/\Gamma, T)$.

Если последовательность (2) — представитель элемента конечного порядка n, то в силу второго утверждения леммы 102.1 точная последовательность

$$0 \to T \to nA + T \to (nA + T)/T \to 0 \qquad (3)$$

расщепляется. Поскольку $nA \subseteq nA + T \subseteq A$, это означает, что A — квазирасщепляющаяся руппа.

Обратно, пусть A — квазирасщепляющаяся группа, т. е. некоторая группа B, где $T \subseteq B$ и $nA \subseteq B \subseteq A$ при некотором n, расщепляется. Тогда T выделяется прямым слагаемым в группе $nA + T$ и (3) — расщепляющаяся последовательность. Из леммы 102.1 следует, что последовательность (2) — представитель элемента из Ext $(A/T, T)[n]$. ∎

Мы можем теперь получить результат, который показывает, что счетные квазирасщепляющиеся группы обязательно расщепляются.

Предложение 102.3 (К. Уокер [1]). *Пусть A — квазирасщепляющаяся смешанная группа, причем факторгруппа A/T счетная. Тогда группа A расщепляется.*

Положим $G = A/T$ и рассмотрим точную последовательность $0 \to G \xrightarrow{\mu} G \to G/pG \to 0$, где p — простое число и μ: $g \mapsto pg$ при $g \in G$. В индуцированной точной последовательности

$$\mathrm{Hom}\,(G, T) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}\,(G/pG, T) \to \mathrm{Ext}\,(G, T) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Ext}\,(G, T) \to 0$$

гомоморфизм μ^* — также умножение на p. Если мы можем показать, что Ker $\mu^* = 0$, то Ext $(G, T)[p] = 0$, т. е. Ext (G, T) — группа без кручения, и наше утверждение сразу будет следовать из теоремы 102.2. Достаточно показать, что δ — эпиморфизм. Идея доказательства восходит к работе Бэра [11].

В силу счетности группа G является объединением возрастающей цепочки $G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$ таких сервантных подгрупп, что $r(G_n) = n$ при любом n. Пусть B_n есть p-базисная подгруппа группы G_n, причем $B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$. Мы хотим показать, что для

данной p-группы S всякий гомоморфизм η: $G \to S/pS$ можно поднять до гомоморфизма ξ: $G \to S$. Поскольку $pG \subseteq \operatorname{Ker} \eta$ и $G_n/pG_n \cong B_n/pB_n$, ограничение $\eta_n = \eta \mid B_n$ можно поднять до гомоморфизма φ_n: $B_n \to S$, образ которого конечен, так что φ_n можно рассматривать как гомоморфизм ξ_n: $G_n \to S$. Более того, B_n — прямое слагаемое в B_{n+1}, следовательно, ξ_{n+1} можно выбрать как продолжение ξ_n. Таким образом, имеется единственный гомоморфизм ξ: $G \to S$, для которого $\xi \mid G_n = \xi_n$ при всех n, и он, очевидно, удовлетворяет нашим требованиям.

Докажем, наконец, что δ — эпиморфизм. Пусть представителем элемента из Ext $(G/pG, T)$ служит верхняя точная строка диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T & \to & S & \to & G/pG & \to & 0 \\ & & \uparrow \psi & & \uparrow \xi & & \| & & \\ 0 & \to & G & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\eta} & G/pG & \to & 0 \end{array}$$

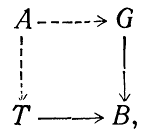
Так как S — периодическая группа, то в силу доказанного выше существует такой гомоморфизм ξ, что правый квадрат коммутативен. Отсюда следует, что существует гомоморфизм ψ, превращающий левый квадрат в коммутативный. Образ этого ψ при гомоморфизме δ совпадает с данным элементом из Ext $(G/pG, T)$. ■

Упражнения

1. Для каждого целого $n > 0$ группы A и nA одновременно являются или не являются квазирасщепляющимися группами.

2. Пусть группы A и A' содержат такие изоморфные подгруппы B и B' соответственно, что $nA \subseteq B \subseteq A$ и $mA' \subseteq B' \subseteq A'$ при некоторых положительных $m, n \in \mathbf{Z}$. Тогда группа A является квазирасщепляющейся в том и только в том случае, когда группа A' квазирасщепляющаяся.

3. Показать, что смешанная группа A является квазирасщепляющейся группой тогда и только тогда, когда она входит в коуниверсальный квадрат



где T — периодическая группа, G — группа без кручения и группа B ограниченная.

4. Пусть A — такая смешанная группа с периодической частью T, что группа $A/(pA + T)$ конечна при любом простом числе p. Если группа A квазирасщепляющаяся, то A расщепляется. [*Указание*: доказательство предложения 102.3.]

5 (К. Уокер [1]). Точная последовательность E: $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ служит представителем элемента конечного порядка из Ext (C, A) в том и только в том случае, когда существует целое число

$n > 0$, для которого последовательность

$$0 \to A/(A[n]) \xrightarrow{\bar{\alpha}} (\alpha A + nB)/(\alpha A[n]) \xrightarrow{\bar{\beta}} nC \to 0 \quad (4)$$

точна и расщепляется. Здесь $\bar{\alpha}$: $a + A[n] \mapsto \alpha a + \alpha A[n]$ и $\bar{\beta}$: $b + \alpha A[n] \mapsto \beta b$. [*Указание*: если нижняя строка в диаграмме (1) расщепляется, использовать правый обратный к β, чтобы получить правый обратный к $\bar{\beta}$; если последовательность (4) расщепляется, то E лежит в $\mathrm{Ext}(C, A)[n^2]$.]

6 (К. Уокер [1]). Доказать второе утверждение леммы 102.1, заменив условие $C[n] = 0$ условием $A[n] = 0$.

7. Показать, что группа A не обязана расщепляться, если она содержит расщепляющуюся подгруппу B, для которой A/B — счетная ограниченная группа.

8 (Гриффит [7]). Пусть G — такая группа без кручения, что всякое расширение произвольной периодической группы с помощью группы G является квазирасщепляющимся. Показать, что группа G должна быть свободной. [*Указание*: провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 101.1; здесь $\alpha\psi = n\varphi$ при некотором целом $n > 0$.]

9 (Гриффит [7]). Пусть для группы G условие $\mathrm{Ext}(G, T) = 0$ выполняется при всех примарных группах T. Показать, что всякое квазирасщепляющееся расширение периодической группы с помощью группы G обязательно является расщепляющимся. [*Указание*: § 101, упр. 4.]

§ 103. Высотные матрицы

Рассмотрев расщепляющиеся и квазирасщепляющиеся смешанные группы, мы переходим к структурной проблеме смешанных групп в целом. Как отмечалось, на получение структурной теоремы мы можем надеяться лишь в случае смешанных групп, у которых периодические части и факторгруппы по ним могут быть достаточно хорошо охарактеризованы с помощью инвариантов. К настоящему времени известно очень немногое.

Исключение составляют группы ранга без кручения 1. Этот и следующий параграфы посвящены таким группам.

Изучая структуру p-групп и групп без кручения, мы видели, что исключительно важно иметь инварианты, связанные с элементами и описывающие их поведение по отношению к делимости на целые числа: индикатор [§ 65] и характеристику [§ 85] соответственно. Мы объединим сведения, получаемые с помощью этих инвариантов, в высотной матрице $\mathbb{H}(a)$, которую определим сейчас для элементов a произвольной группы A [см. Ротман [2], Меджиббен [6], Мышкин [5]].

Пусть $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел в порядке возрастания. Для данного элемента a группы A мы обозначаем через $h_p^*(a)$ обобщенную p-высоту элемента a в A, определенную

в § 37, т. е.

$$h_p^*(a) = \sigma, \text{ если } a \in p^\sigma A \setminus p^{\sigma+1}A, \quad \text{где } \sigma \text{ — порядковое число.}$$

В случае $a \in p^\tau A = p^{\tau+1}A$ мы, как обычно, полагаем $h_p^*(a) = \infty$ и считаем, что ∞ больше всякого заданного порядкового числа. Мы связываем с элементом a *высотную матрицу* $\mathbb{H}(a)$, а именно следующую бесконечную матрицу

$$\mathbb{H}(a) = \begin{bmatrix} h_{p_1}^*(a) & h_{p_1}^*(p_1 a) & \dots & h_{p_1}^*(p_1^k a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{p_n}^*(a) & h_{p_n}^*(p_n a) & \dots & h_{p_n}^*(p_n^k a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = [\sigma_{nk}]$$

элементы которой — порядковые числа. Итак, элемент σ_{nk}, стоящий в n-й строке и k-м столбце матрицы $\mathbb{H}(a)$,— не что иное как обобщенная p_n-высота элемента $p_n^k a$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, 2, \dots$; n-ю строку матрицы $\mathbb{H}(a)$ назовем *p_n-индикатором* элемента a.

Читатель сразу увидит, что n-я строка матрицы $\mathbb{H}(a)$ — для p_n-группы A — это в точности индикатор элемента a, в то время как другие строки состоят из одних символов ∞ и, таким образом, не дают никакой дополнительной информации об элементе a. С другой стороны, для групп без кручения A всегда имеем $h_p(pa) = h_p(a) + 1$, так что в этом случае первый столбец матрицы A содержит в себе те же сведения, что и вся матрица $\mathbb{H}(a)$.

Следующие замечания непосредственно вытекают из определения:

а) $\mathbb{H}(a) = \mathbb{H}(-a)$ для всех $a \in A$;

б) матрица $\mathbb{H}(p_n a)$ получается из матрицы $\mathbb{H}(a)$ путем замены n-й строки $\sigma_{n0}, \dots, \sigma_{nk}, \dots$ матрицы $\mathbb{H}(a)$ строкой $\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{n,k+1}, \dots$;

в) элемент $p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} a$ делится на целое число $m = p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}$ тогда и только тогда, когда $l_i \leqslant \sigma_{ik_i}$ при $i = 1, \dots, n$;

г) если a — элемент конечного порядка, то почти на всех местах в матрице $\mathbb{H}(a)$ стоит символ ∞;

д) матрица $\mathbb{H}(a)$ состоит из одних символов ∞ в том и только в том случае, когда элемент a лежит в делимой части группы A;

е) элемент a принадлежит σ-й ульмовской подгруппе A^σ группы A тогда и только тогда, когда $\sigma_{n0} \geqslant \omega\sigma$ для всех n;

ж) если $A = B \oplus C$ и $a = b + c$ $(b \in B, c \in C)$, то $\mathbb{H}(a) = \min(\mathbb{H}(b), \mathbb{H}(c))$, где «min» означает поэлементное взятие минимума.

Пример. Пусть T — неограниченная сепарабельная p-группа и B — ее базисная подгруппа. Представим B в виде $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_{m_i}$, где $B_{m_i} \neq 0$ — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^{m_i} и $m_1 < m_2 < \dots$. Группу T мы считаем вложенной [в качестве сервантной подгруппы] в p-адическое пополнение $\hat{B}$ груп-

пы B. Пусть $(l_0, \ldots, l_k, \ldots)$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Группа $\hat{B}$ *содержит элемент* a *бесконечного порядка, для которого* $h_p^*(p^k a) = l_k$, *тогда и только тогда, когда при* $l_k + 1 < l_{k+1}$ *число* $l_k + 1$ *совпадает с одним из чисел* m_i. Необходимость доказывается так же, как в лемме 65.3 [см. также утверждение 2) ниже. При доказательстве достаточности мы можем, очевидно, ограничиться рассмотрением случая, когда каждое из чисел m_i равно некоторому числу $l_k + 1$. Пусть для каждого i выбран элемент нулевой высоты $b_i \in B_{m_i}$. Сравнивая l_k с m_i, мы можем написать

$$l_0 < \ldots < l_{k_1-1} < m_1 = l_{k_1-1} + 1 \leqslant l_{k_1} < \ldots < l_{k_i-1} < m_i = \\ = l_{k_i-1} + 1 \leqslant l_{k_i} < \ldots,$$

где $k_1 < \ldots < k_i < \ldots$ и между m_i и m_{i+1} числа l_k возрастают ровно на 1. Таким образом, $l_0 \leqslant l_{k_1} - k_1 \leqslant \ldots \leqslant l_{k_i} - k_i \leqslant \ldots$, откуда следует, что элемент

$$a = (p^{l_0} b_1, p^{l_{k_1} - k_1} b_2, \ldots, p^{l_{k_i} - k_i} b_{i+1}, \ldots) \in \hat{B}$$

имеет высоту l_0. Так как $m_j \leqslant l_{k_j} - k_j + k_i$ при $j \leqslant i$, то первые i координат элемента $p^{k_i} a$ равны, очевидно, нулю, и $h_p^*(p^{k_i} a) = l_{k_i}$. Отсюда сразу следует, что $h_p^*(p^k a) = l_k$ для любого k.

Пусть A — произвольная группа. Если a, b — элементы бесконечного порядка в группе A и для некоторых целых чисел r, $s \neq 0$ выполняется $ra = sb$, то из свойства б) легко заключить, что n-е строки матриц $\mathbb{H}(a) = [\sigma_{nk}]$ и $\mathbb{H}[b] = [\rho_{nk}]$ могут отличаться друг от друга только в случае, когда $p_n \mid rs$, причем для этого p_n должны найтись такие целые числа l, $m \geqslant 0$, что выполняется условие

$$\sigma_{n,\,k+l} = \rho_{n,\,k+m} \quad \text{при всех } k \tag{1}$$

Учитывая сказанное, две $(\omega \times \omega)$-матрицы $[\sigma_{nk}]$ и $[\rho_{nk}]$ назовем *эквивалентными*, если n-е строки обеих матриц совпадают для почти всех n, а для каждого из оставшихся n найдутся такие неотрицательные целые числа l, m (зависящие от n), что выполняется условие (1).

Заметим, что высотные матрицы элементов, лежащих в одном и том же смежном классе по периодической части группы A, эквивалентны.

Если ранг без кручения группы A равен 1, то любые два элемента a, $b \in A$, имеющие бесконечный порядок, зависимы, и, значит, их высотные матрицы $\mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(b)$ эквивалентны в указанном смысле. Следовательно, группе A можно сопоставить однозначно определенный класс эквивалентности матриц, который мы обозначим через $\mathbb{H}(A)$.

Наша ближайшая цель — выяснить, какие из матриц могут быть высотными матрицами элементов бесконечного порядка в смешанных группах с заданной редуцированной периодической частью T. Без

потери общности мы можем ограничиться рассмотрением групп A ранга без кручения 1. Действительно, пусть G — смешанная группа с периодической частью T и $a \in G$ — элемент бесконечного порядка. Тогда найдется наименьшая сервантная подгруппа A группы G, содержащая как T, так и a, а именно $A/T = \langle a + T \rangle_*$ в группе G/T. Высотные матрицы элементов из A одинаковы в группе G и в подгруппе A. Это сразу видно из следующего простого замечания.

Лемма 103.1 (Меджиббен [6]). *Если A — такая подгруппа группы G, что G/A — группа без кручения, то выполняется условие*

$$p^\sigma A = A \cap p^\sigma G \text{ для всех порядковых чисел } \sigma \text{ и всех простых чисел } p. \tag{2}$$

Если выполняется условие (2), мы говорим, что A — *изотипная* подгруппа группы G [см. § 80]. Если же это условие выполняется для одного простого числа p, подгруппа A называется *p-изотипной* в группе G.

Чтобы доказать, что подгруппа A изотипна в G, как только G/A — без кручения, воспользуемся трансфинитной индукцией по σ. Ввиду определения подгруппы $p^\sigma G$ для предельных порядковых чисел σ, достаточно показать, что если условие (2) выполняется для σ, то оно выполняется и для $\sigma + 1$. Пусть $a \in A \cap p^{\sigma+1}G$ и $a = pg$ для некоторого $g \in P^\sigma G$. Тогда $g \in A$, так как G/A — группа без кручения. Таким образом, $g \in A \cap p^\sigma G = p^\sigma A$ и, значит, $a \in p^{\sigma+1}A$. ∎

Пусть A — смешанная группа ранга без кручения 1 и $a \in A$ — элемент бесконечного порядка. Через T_n обозначим p_n-компоненту группы A. Из определения сразу видно, что для высотной матрицы $\mathbb{H}(a) = [\sigma_{nk}]$ выполняется условие

1) *для каждого n*

$$\sigma_{n0} < \sigma_{n1} < \ldots < \sigma_{nk} < \ldots,$$

причем равенство возможно лишь в случае, если, начиная с некоторого k, выполняется $\sigma_{nk} = \sigma_{n,\,k+1} = \ldots = \infty$.

В соответствии с § 65 мы говорим, что между σ_{nk} и $\sigma_{n,\,k+1}$ имеется *скачок*, если $\sigma_{nk} + 1 < \sigma_{n,\,k+1}$. Применяя лемму 65.3, получаем условие

2) *если между σ_{nk} и $\sigma_{n,\,k+1}$ имеется скачок, то σ_{nk}-й инвариант Ульма — Капланского группы T_n отличен от нуля.*

Из леммы 37.2 сразу следует, что p_n-длина группы A не может превосходить $\lambda_n + \omega$, где λ_n является p_n-длиной группы T_n. Если группа $p_n^{\lambda_n}A$ является p_n-делимой, то p_n-длина не может превосходить λ_n. Таким образом, для каждого n выполняется условие

3) *если* $\sigma_{nk} \neq \infty$ *при всех* k, *то*

$$\sigma_{nk} < \lambda_n + \omega \text{ для каждого } k,$$

если же $\sigma_{nl} = \infty$ *при некотором* l, *то* $\sigma_{nk} < \lambda_n$ *для всех* $\sigma_{nk} \neq \infty$.

Имеется еще одно условие, которому должна удовлетворять матрица $\mathbb{H}(a)$. Чтобы получить его, докажем сначала простую лемму.

Лемма 103.2. *Пусть A — редуцированная нерасщепляющаяся смешанная группа ранга без кручения 1 и T — ее периодическая часть. Существует изоморфизм φ из группы A на некоторую подгруппу группы* $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)$, *причем ограничение $\varphi \mid T$ является каноническим вложением* $T \to \operatorname{Ext}(Q/Z, T)$.

Сначала рассмотрим естественное вложение $T \to \operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ [см. лемму 55.1]. В силу теоремы 58.2 это отображение можно расширить до гомоморфизма $\varphi: A \to \operatorname{Ext}(Q/Z, T)$. Очевидно, $\operatorname{Ker}\varphi$ — группа без кручения, откуда следует, что в случае, когда $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$, группа $\operatorname{Im}\varphi$ периодическая. Последнее означает, что φ отображает A на T, и, значит, T — прямое слагаемое в A, что противоречит условию. Таким образом, φ — мономорфизм. ■

Пусть σ — произвольное порядковое число. Тогда σ-я ульмовская подгруппа $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)^\sigma$ группы $\operatorname{Ext}(Q/Z, T)$ изоморфна прямой сумме $\operatorname{Ext}(Q/Z, T^\sigma) \oplus \operatorname{Hom}(Q/Z, H_\sigma)$, где группа H_σ определяется так же, как в предложении 56.5. Допустим, что $p_n^m T_n^\sigma = 0$ при некотором n; тогда группа $p_n^m \operatorname{Ext}(Q/Z, T^\sigma)$ должна быть p_n-делимой. Пусть $\sigma \geqslant 1$. Если $\sigma - 1$ существует и группа $T_n^{\sigma-1}$ периодически полная, то p_n-компонента группы H_σ равна нулю, следовательно, группа $\operatorname{Hom}(Q/Z, H_\sigma)$ должна быть p_n-делимой. Это же верно, если σ — предельное порядковое число и T_n/T_n^σ — периодическая часть группы $L_{n\sigma} = \varprojlim T_n/T_n^\rho$ $(\rho \to \sigma)$. Мы получаем следующее необходимое условие:

4) *если при некотором n найдется такое целое число $m \geqslant 0$, что $p_n^m T_n^\sigma = 0$, а $T_n^{\sigma-1}$ — периодически полная группа или T_n/T_n^σ — периодическая часть группы $\varprojlim T_n/T_n^\rho$ $(\rho \to \sigma)$ [в соответствии с тем, каким является порядковое число σ — непредельным или предельным], то $\sigma_{nk} \neq \infty$ влечет за собой*

$$\sigma_{nk} < \max(\lambda_n, \omega).$$

Число ω в последнем неравенстве нужно для того, чтобы не опустить случай, когда λ_n — конечное порядковое число [и T_n — прямое слагаемое в A].

Теперь мы убедимся в том, что условия 1)—4) дают достаточное количество сведений о высотных матрицах.

Теорема 103.3. *Пусть T — редуцированная периодическая группа и $\mathbb{M} = [\sigma_{nk}]$ — $\omega \times \omega$-матрица, элементы которой — порядковые числа или символы ∞. Смешанная группа A с периодической частью T, имеющая ранг без кручения 1 и содержащая такой элемент a бесконечного порядка, что*

$$\mathbb{H}(a) = \mathbb{M},$$

существует в том и только в том случае, когда матрица $\mathbb{M}$ удовлетворяет условиям 1)—4).

Прежде всего локализуем доказательство достаточности, показав, что наше утверждение верно, если для каждого n существует смешанная группа A_n со следующими свойствами: ее ранг без кручения равен 1, ее периодическая часть — это p_n-компонента T_n группы T; наконец, она содержит такой элемент a_n бесконечного порядка, что n-я строка матрицы $\mathbb{H}(a_n)$ совпадает с n-й строкой матрицы $\mathbb{M}$, а остальные элементы матрицы $\mathbb{H}(a_n)$ являются символами ∞. Допустим, что такие группы A_n существуют. Тогда мы можем образовать их прямое произведение $G = \prod_n A_n$. Периодическая часть группы G в точности совпадает с T. Для произвольных порядкового числа ρ и целого числа n имеем

$$p_n^\rho G = p_n^\rho A_n \oplus \prod_{i \neq n} A_i.$$

Отсюда сразу следует, что $\mathbb{M}$ — высотная матрица элемента $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ в группе G. Если в качестве A взять единственную сервантную подгруппу группы G, которая содержит как T, так и a и имеет ранг без кручения 1, то ввиду леммы 103.1 мы можем утверждать, что высотные матрицы элемента a в группе G и в группе A совпадают.

Итак, в оставшейся части доказательства мы должны иметь дело лишь с одним простым числом. Пусть T — редуцированная p-группа p-длины λ и $(\sigma_0, \ldots, \sigma_k, \ldots)$ — последовательность порядковых чисел, удовлетворяющая условиям 1)—4). Мы хотим построить смешанную группу A с периодической частью T, имеющую ранг без кручения 1 и содержащую такой элемент a бесконечного порядка, что последовательность $(\sigma_0, \ldots, \sigma_k, \ldots)$ является p-индикатором этого элемента, а для всех простых чисел $q \neq p$ должно выполняться $qA = A$. Мы различаем несколько случаев.

а) Существует номер k, для которого $\sigma_k = \infty$, и k — наименьший среди таких номеров. По свойству 1) имеем

$$\sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_{k-1} < \sigma_k = \infty = \sigma_{k+1} = \ldots.$$

Из свойства 2) и леммы 65.3 мы получаем, что существует элемент $x \in T$, индикатор которого совпадает с последовательностью $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \infty)$. Если положить $A = T \oplus Q$ и взять произ-

вольный ненулевой элемент $y \in Q$, то элемент $a = x + y$ будет таким, как требуется.

Начиная с этого места, мы можем считать, что все порядковые числа σ_k отличны от ∞.

б) Существует номер k, для которого $\sigma_k \geqslant \lambda$, и k — наименьший среди таких номеров. В силу свойства 2) мы получаем в этом случае, что $\sigma_{k+j} = \sigma_k + j$ при $j = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, если $\lambda < \omega$, то в группе $A = T \oplus Z$ найдется элемент с данным индикатором. Если же $\lambda \geqslant \omega$, рассмотрим группу $C = \operatorname{Ext}(Z(p^\infty), T)$. Ввиду предложения 56.5 условие 4) гарантирует, что группа C обладает последней отличной от нуля ульмовской подгруппой, которая содержит элемент y с индикатором $(\lambda, \lambda + 1, \ldots)$. Далее, в силу условия 3) при $j = k, k + 1, \ldots$ имеем $\sigma_j < \lambda + \omega$, так что, пользуясь леммой 65.3, нетрудно отыскать элемент $a = x + p^r y$ [для подходящих $x \in T$ и $r \geqslant k$], обладающий требуемым свойством.

в) В дальнейшем будем считать, что $\sigma_k < \lambda$. Допустим, что в последовательности $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ имеется лишь конечное число скачков, и последний скачок находится, скажем, между σ_{k-1} и σ_k. Ввиду условия 2) и леммы 65.3 существует такой элемент $x \in T$, что его индикатор совпадает с последовательностью $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}, \infty)$. Найдется такое порядковое число μ, что $\omega\mu \leqslant \sigma_j < \omega(\mu + 1)$ при $j \geqslant k$. Рассмотрев группу C из п. б), мы видим, что можно найти элемент $g \in C^\mu$ [бесконечного порядка] с индикатором $(\sigma_k, \sigma_k + 1, \sigma_k + 2, \ldots)$. Выберем элемент $y \in C$, для которого $p^k y = g$ и $h_p^*(y) + k \leqslant \sigma_k$. Тогда элемент $a = x + y$ обладает данным индикатором.

г) Если в последовательности $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ имеется бесконечное число скачков, то пусть они находятся между $\sigma_{k_i - 1}$ и σ_{k_i}, где $0 < k_1 < k_2 < \ldots$. Сразу видно, что $\rho = \sup \sigma_k$ — предельное порядковое число. Снова пользуясь леммой 65.3 и условием 2), мы можем для каждого i найти элемент $x_i \in T$, индикатор которого есть $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k_i - 1}, \infty)$; более того, можно считать, что $x_i - x_{i+1} \in p^{\sigma_{k_i}} T$. Таким образом, существует элемент b из $E = \varprojlim T/p^\sigma T (\sigma \to \rho)$, который переходит в x_i при каноническом отображении $E \to T/p^{\sigma_i} T$ для каждого i. Отсюда следует, что индикатор элемента b не превосходит $(\sigma_0, \ldots, \sigma_k, \ldots)$. По лемме 37.1 с помощью трансфинитной индукции мы получаем, что обратное неравенство также верно. Легко видеть, что существует такая подгруппа H группы E, что $b \in H$, группа $T^* = T/p^\rho T$ является периодической частью группы H и $H/T^* \cong Q$. Определим группу G с помощью коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T & \to & G & \to & H/T^* & \to & 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & T^* & \to & H & \to & H/T^* & \to & 0 \end{array}$$

в которой ψ: $T \to T^* = T/p^\rho T$ — естественный эпиморфизм. Если элемент $a \in G$ переходит в элемент $b \in H$ при $G \to H$, то a имеет тот же индикатор в G, что и b в H.

Доказательство теоремы завершено. ■

Упражнения

1. Доказать неравенство треугольника для высотных матриц:

$$\mathbb{H}(b+c) \geqslant \min(\mathbb{H}(b),\ \mathbb{H}(c)),$$

2. Исследовать поведение высотных матриц при переходе к подгруппам, к сервантным или изотипным подгруппам, к эпиморфным образам.

3. При данной высотной матрице $\mathbb{H}(a)$ найти характеристику $\chi(a+T)$.

4. Положим $A = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$, где $p^{k_n} a_0 = p^n a_n$ при $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots$ и $k_n < n$. Найти высотную матрицу элемента a_0.

5. Показать, что произвольная матрица $[\sigma_{nk}]$, состоящая из порядковых чисел, является высотной матрицей некоторого элемента бесконечного порядка в подходящей смешанной группе тогда и только тогда, когда выполняется условие 1).

6 (Меджиббен [6], Мышкин [5]). Если T — счетная группа, то в теореме 103.3 условие 4) может быть опущено.

7. Пусть T — неограниченная счетная редуцированная p-группа. Показать, что существует множество мощности континуума неизоморфных расширений группы T с помощью группы Q.

8 (Страттон [1]). Показать, что лемма 103.2 неверна для групп без кручения A ранга 2, даже если предположить, что A не имеет слагаемых без кручения, отличных от нуля. [*Указание*: $A = \langle B \oplus C, q^{-1}(b+c) \rangle$, где B — группа без кручения ранга 1, C — смешанная нерасщепляющаяся группа ранга без кручения 1, периодической частью группы C является p-группа T, причем B и C/T суть p-делимые группы, а группа A/T неразложима.]

9. Для данной периодической группы T описать высотные матрицы элементов из $\mathrm{Ext}(Q/Z, T)$.

§ 104. Смешанные группы ранга без кручения 1

В этом параграфе мы докажем структурную теорему для смешанных групп A ранга без кручения 1. Мы покажем, что если периодическая часть T такой группы A является счетной группой или, в более общем случае, прямой суммой счетных групп, то инварианты группы T вместе с классом эквивалентности $\mathbb{H}(A)$ образуют полную систему инвариантов группы A. Способ рассуждений будет аналогичен тому, который использовался в § 77 и 83.

В соответствии с определением собственного элемента в § 77 и 86 элемент $a \in A$ назовем *p-собственным относительно подгруппы G группы A*, если он имеет максимальную p-высоту среди элементов

смежного класса $a + G$. Последнее, очевидно, эквивалентно равенству высот $h_p^*(a)$ и $h_p^*(a + G)$ [первая берется в A, вторая — в A/G].

Доказательство основной теоремы опирается на следующие две леммы.

Лемма 104.1 (Ротман [2], Меджиббен [6]). *Пусть G — конечно порожденная подгруппа редуцированной смешанной группы A, имеющей ранг без кручения 1. Для любого элемента $a \in A \setminus G$ при условии, что $p^m a \in G$ $(m \geqslant 1)$, смежный класс $a + G$ содержит элемент, p-собственный относительно G.*

Доказательство достаточно провести для случая $G = \langle g \rangle \oplus E$, где $o(g) = \infty$, а E — конечная p-группа. Мы можем написать $p^t a = p^r sg$ при $(p, s) = 1$ и $t \geqslant m$.

Наше утверждение докажем от противного. Допустим, что существует бесконечная последовательность таких элементов $l_n g + e_n$ $(l_n \in \mathbf{Z}, e_n \in E)$ из G, что

$$h_p^*(a) < h_p^*(a + l_n g + e_n) < h_p^*(a + l_{n+1} g + e_{n+1}) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Можно считать без потери общности, что $e_1 = \ldots = e_n = \ldots$, а так как элемент a можно заменить на элемент $a + e_1$, то нам остается рассмотреть только последовательность вида $l_n g$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По неравенству треугольника $h_p^*(l_n g) = h_p^*(a)$ для всех n, откуда следует, что найдется $k \geqslant 0$, для которого при всех n выполняется $l_n = p^k s_n$, где $(s_n, p) = 1$. Отметим, что $h_p^*(l_n g) = h_p^*(p^k g)$.

Если $r \neq k + t$, то

$$h_p^*(a + p^k s_n g) < h_p^*(p^t a + p^{k+t} s_n g) = h_p^*(p^r sg + p^{k+t} s_n g) = h_p^*(p^u g),$$

где $u = \min(r, k + t)$. Мы пришли в противоречие с тем фактом, что в силу равенства

$$h_p^*((l_{n+1} - l_n) g) = h_p^*(a + l_n g)$$

наибольшая степень p, на которую делится $l_{n+1} - l_n$, возрастает с возрастанием n. Если $r = k + t$, то элемент a можно заменить на элемент $a - p^k sg$ и, таким образом, можно считать, что $p^t a = 0$. Тогда неравенства $h_p^*(a + p^k s_n g) < h_p^*(p^{k+t} s_n g) = h_p^*(p^{k+t} g)$ приводят к аналогичному противоречию. ∎

Будем говорить, что изоморфизм φ: $G \to H$ между $G \subseteq A$ и $H \subseteq C$ *сохраняет высоты*, если

$$h_p^*(\varphi g) = h_p^*(g)$$

для всех элементов $g \in G$ и всех простых чисел p, где высоты берутся в C и в A соответственно.

Лемма 104.2 (Ротман [2]). *Пусть A и C — редуцированные группы с одинаковыми инвариантами Ульма — Капланского для некоторого простого числа p, и пусть G и H — конечно порожденные подгруппы групп A и C соответственно, имеющие ранг без кручения 1.*

Если φ: $G \to H$ — изоморфизм, сохраняющий высоты, и если $a \in A \setminus G$, причем $pa \in G$, то φ можно расширить до сохраняющего высоты изоморфизма φ': $\langle G, a\rangle \to \langle H, c\rangle$, где элемент $c \in C$ выбран подходящим образом.

Благодаря лемме 104.1 без потери общности можно считать, что элемент a является p-собственным относительно G. Совершенно так же, как в доказательстве леммы 77.1, можно найти элемент $c \in C$, удовлетворяющий следующим условиям: $c \notin H$, $pc \in H$, $\varphi(pa) = pc$, $h_p^*(a) = h_p^*(c)$ и элемент c имеет максимальную высоту среди элементов смежного класса $c + H$. Мы утверждаем, что если $(k, p) = 1$, то $h_q^*(ka + g) = h_q^*(kc + \varphi g)$ для всех простых чисел q. При $q = p$ это сразу следует из того, что оба элемента a и c являются p-собственными относительно G и H соответственно. При $q \neq p$ имеем

$$h_q^*(ka+g) = h_q^*(pka+pg) = h_q^*(pkc+p\varphi g) = h_q^*(kc+\varphi g).$$

Наконец, изоморфизм φ' определяется тем, что переводит a в c. ∎

Теперь нетрудно получить структурную теорему для счетных смешанных групп ранга без кручения 1.

Теоерма 104.3 (Роман [2], Меджиббен [5], Мышкин [1]). *Пусть A и C — счетные смешанные группы ранга без кручения 1. Группы A и C изоморфны тогда и только тогда, когда:*

1. *их периодические части $T(A)$ и $T(C)$ изоморфны и*
2. *высотные матрицы $\mathbb{H}(A)$ и $\mathbb{H}(C)$ эквивалентны.*

Ввиду наших рассмотрений в § 103 нам нужно убедиться лишь в том, что условия теоремы достаточны. Допустим, что выполняются условия 1 и 2 и, кроме того, группы $T(A)$ и $T(C)$ редуцированны. Если группа A не является редуцированной, то $A \cong T(A) \oplus Q$ и из эквивалентности высотных матриц легко получить, что $C \cong T(C) \oplus Q$. Итак, пусть A и C — редуцированные группы. В силу эквивалентности высотных матриц существуют элементы $g \in A$ и $h \in C$, имеющие бесконечный порядок и одинаковые высотные матрицы. Это означает, что соответствие $g \mapsto h$ индуцирует изоморфизм φ: $\langle g\rangle \to \langle h\rangle$, сохраняющий высоты. Так как A и C — счетные группы с одинаковыми инвариантами Ульма — Капланского для всех простых чисел, то, пользуясь леммой 104.2, изоморфизм φ можно продолжить [присоединяя шаг за шагом элементы из A и C попеременно] до изоморфизма между группами A и C [ср. доказательство ульмовской теоремы 77.3]. ∎

Последний результат легко распространяется на случай, когда периодические части являются прямыми суммами счетных групп.

Следствие 104.4 (Меджиббен [6]). *Смешанные группы ранга без кручения 1 изоморфны, если их периодические части являются изоморфными прямыми суммами счетных групп, а их высотные матрицы эквивалентны.*

Пусть A и C — группы с указанными свойствами. Путь G — счетная сервантная подгруппа группы A, содержащая элемент бесконечного порядка [см. предложение 26.2]. Тогда подгруппа $G \cap T(A)$ содержится в счетном прямом слагаемом U' группы $T(A)$. Пусть $T(A) = U' \oplus S$. Так как $A = \langle G, T(A) \rangle$, то $A = U \oplus S$, где $U = \langle G, U' \rangle$ — счетная группа, а S — периодическая группа. Аналогично, $C = V \oplus T$, где V — счетная группа, а T — периодическая группа. Ввиду структурной теоремы 78.4 для прямых сумм счетных p-групп без потери общности можно считать, что $T(U) \cong T(V)$ и $S \cong T$. Поскольку высотные матрицы любого элемента бесконечного порядка одинаковы в группе A и в подгруппе U [в группе C и в подгруппе V], мы получаем по теореме 104.3, что группы A и C изоморфны. ∎

Уоллес [1] распространил структурную теорему на случай, когда периодические части являются тотально проективными группами. Меджиббен [6] доказал этот результат для групп с периодически полными периодическими частями.

В общем случае изоморфность периодических частей и эквивалентность высотных матриц не дают изоморфности самих групп. Это иллюстрируется следующим примером.

Пример (Меджиббен [6]). Пусть B — неограниченная счетная прямая сумма циклических p-групп и $\overline{B}$ — соответствующая периодически полная группа. Существует такая сервантная подгруппа T группы $\overline{B}$, что $B \subset T$ и $\overline{B}/T \cong Z(p^\infty)$. Из предложения 56.5 следует, что $\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), T)^1 \cong \mathrm{Hom}(Z(p^\infty), Z(p^\infty)) \cong J_p$. Таким образом, найдется такая подгруппа H группы $\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), T)$, что $T \subset H$, $H/T \cong Q$ и $H^1 \neq 0$. Аналогичным образом получим такую подгруппу G группы $\mathrm{Ext}(Z(p^\infty), B)$, что $B \subset G$, $G/B \cong Q$ и $G^1 \neq 0$. Легко видеть, что существуют такие элементы $g \in G$, $h \in H$ бесконечного порядка, что $h_p^*(p^k g) = \omega + k = h_p^*(p^k h)$ при $k = 0, 1, \ldots$, так что высотные матрицы $\mathbb{H}(A)$ и $\mathbb{H}(C)$ для групп $A = G \oplus T$ и $C = H \oplus B$ эквивалентны. Кроме того, $T(A) = B \oplus T \cong T(C)$. Чтобы показать, что группы A и C не являются изоморфными, докажем следующие свойства:

$$1)\ H/H^1 \cong \overline{B};\quad 2)\ G/G^1 \cong B;\quad 3)\ B \oplus T \ncong \overline{B} \oplus B.$$

Свойство 1) следует из того факта, что если T — сервантная подгруппа сепарабельной p-группы S, причем $S/T \cong Z(p^\infty)$, то $S \cong \overline{B}$ [см. § 68, упр. 15]. Поскольку G/G^1 — счетная сепарабельная p-группа и группа B изоморфна некоторой сервантной подгруппе группы G/G^1, факторгруппа по которой есть $Z(p^\infty)$, свойство 2) следует из предложения 68.3. Наконец, по теореме 73.7 в случае $B \oplus T \cong \overline{B} \oplus B$ группа T была бы прямой суммой периодически полных p-групп, что, очевидно, невозможно.

Упражнения

1. Две счетные смешанные группы ранга без кручения 1 обязательно изоморфны, если каждая из них изоморфна изотипной подгруппе другой.

2. (Меджиббен [6]). Пусть A, C — смешанные группы ранга без кручения 1, а φ — изоморфизм между сервантной смешанной подгруппой G группы A и сервантной подгруппой H группы C. Если ограничение $\varphi \mid T(G)$ можно расширить до изоморфизма между $T(A)$

и $T(C)$, то φ можно расширить до изоморфизма между A и C. [*Указание*: очевидное отображение.]

3 (Меджиббен [6]). Пусть A и C — такие смешанные группы ранга без кручения 1, что $T(A)$ и $T(C)$ — изоморфные периодически полные группы, а матрицы $\mathbb{H}(A)$ и $\mathbb{H}(C)$ эквивалентны. Доказать, что $A \cong C$ [*Указание*: применить упр. 2, где $T(G)$ — базисная подгруппа группы $T(A)$.]

4 (Ротман и Йен [1]). Пусть T — редуцированная периодическая группа с конечными инвариантами Ульма — Капланского, и пусть A, C — счетные смешанные группы ранга без кручения 1. Показать, что $A \oplus T \cong C \oplus T$ влечет за собой $A \cong C$.

5 (Ротман [2]). Пусть A и C — счетные смешанные группы ранга без кручения 1, причем $A \oplus A \cong C \oplus C$. Доказать, что $A \cong C$.

6 (Меджиббен [6]). Пусть A — счетная смешанная группа ранга без кручения 1. Группа A расщепляется тогда и только тогда, когда почти каждая строка высотной матрицы не имеет скачков, никакая строка не имеет бесконечного числа скачков и строка, содержащая не только целые числа, обязательно содержит и символ ∞.

§ 105. Группы с заданной последовательностью Ульма

Часто можно столкнуться с проблемой построения групп по определенным составляющим. В этом параграфе мы изучим такое построение для групп с заданными последовательностями Ульма. В § 37 мы уже исследовали последовательности Ульма и установили ряд их свойств. Но некоторые важные вопросы остались нерешенными, например следующие. Существуют ли группы произвольно большой ульмовской длины? Являются ли условия, перечисленные в теореме 37.6, достаточными, чтобы гарантировать существование группы с данной последовательностью групп в качестве последовательности Ульма? Теорема Цыпина [теорема 76.2] дала ответ на эти вопросы для счетных p-групп. Мы получим полное решение для общего случая в теореме 105.3.

Итак, проблема состоит в отыскании необходимых и достаточных условий на вполне упорядоченную последовательность групп

$$A_0, A_1, \ldots, A_\sigma, \ldots \quad (\sigma < \tau), \tag{1}$$

для того чтобы существовала такая редуцированная группа A мощности $\mathfrak{m}$, что последовательность (1) является ее последовательностью Ульма. Мы хотим показать, что следующие условия из теоремы 37.6 достаточны:

а) *первая ульмовская подгруппа группы A_σ равна нулю при каждом* $\sigma < \tau$;

б) $\sum_{0 \leqslant \sigma < \tau} |A_\sigma| \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \prod_{0 \leqslant n < \min(\omega, \tau)} |A_n|$;

в) $r(B_{\sigma+1,\, p}) \leqslant \operatorname{fin} r(A_{\sigma,\, p})$ *для любого* $\sigma + 1 < \tau$ *и любого простого числа* p;.

г) $\sum\limits_{\rho<\sigma<\tau} |B_{\sigma, p}| \leqslant |B_{\rho, p} \cap A_{\rho, p}|^{\aleph_0}$ *для любого* $0 \leqslant \rho < \tau$ *и любого простого числа* p.

Напомним, что $A_{\sigma, p}$ и $B_{\sigma, p}$ обозначают здесь p-компоненту и p-базисную подгруппу группы A_σ соответственно.

Один из основных этапов построения заключается в следующей лемме.

Лемма 105.1. *Пусть даны произвольные редуцированные группы G и H и p-базисная подгруппа B_p группы G. Пусть τ — ульмовская длина группы H. Если τ — непредельное порядковое число и выполнено условие*

$$r(B_p) \leqslant \operatorname{fin} r(H_p^{\tau-1}) \text{ для любого простого числа } p, \tag{2}$$

то существует такая [*обязательно редуцированная*] *группа A, что*

$$A^\tau \cong G \quad и \quad A/A^\tau \cong H.$$

Прежде всего выберем для каждого простого числа p квазибазис в группе $H_p^{\tau-1}$ относительно некоторой нижней базисной подгруппы. Это система элементов $\{a_i(p), c_{jn}(p)\}$, связанных соотношениями вида

$$\left.\begin{array}{l} p^{e_i} a_i(p) = 0, \\ pc_{j1}(p) = 0, \quad pc_{j,n+1}(p) = c_{jn}(p) + s_1 a_{i_1}(p) + \ldots + s_t a_{i_t}(p) \; (n \geqslant 1). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Здесь s_l — целые числа, в то время как i и j пробегают некоторое множества индексов $I(p)$ и $J(p)$ соответственно, причем $|J(p)| = \operatorname{fin} r(H_p^{\tau-1})$.

Затем выберем полную систему представителей $\{d_k\}_{k \in K}$ смежных классов группы H по подгруппе $\bigoplus\limits_p H_p^{\tau-1}$. Тогда каждый элемент $h \in H$ может быть записан в виде

$$h = d_k + \sum_p [m_1 a_{i_1}(p) + \ldots + m_r a_{i_r}(p) + q_1 c_{j_1 n_1}(p) + \ldots + q_t c_{j_t n_t}(p)], \tag{4}$$

слагаемые при этом определяются однозначно, если $(q, p) = 1$ и ни один из ma не равен нулю. Выберем также некоторый базис $\{b_{pl}\}_{l \in L(p)}$ группы B_p. Очевидно, что $|L(p)| = r(B_p)$.

Определим A как группу, порожденную группой G и элементами $u_i(p)$, $v_{jn}(p)$ [где p пробегает все простые числа] и w_k, взаимно однозначно сопоставленными с элементами $a_i(p)$, $c_{jn}(p)$, d_k соответственно и подчиняющимися тем же определяющим соотношениям, за исключением того, что соотношение $pc_{jl}(p) = 0$ заменяется на соотношение

$$pv_{j1}(p) = \begin{cases} 0 \text{ или} \\ \text{некоторый } \bar{b}_{pl}, \text{ причем каждый такой элемент} \\ \quad \bar{b}_{pl} \, (l \in L(p)) \text{ встречается только один раз.} \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\bar{b}_{pl}$ — элемент из A, соответствующий элементу $b_{pl} \in G$. Заметим, что соотношение (5) имеет смысл ввиду условия 2). Элементы из A нам будет удобно записывать в виде $\bar{g} + \bar{h}$, где $g \in G$, а h — линейная комбинация элементов u_i, v_{jn} и w_k. Операции над элементами из A, записанными в таком виде, выполняются так же, как это делается в группе G и как предписано определяющими соотношениями.

Если приравнять все элементы $\bar{g}$ нулю, то мы получим эпиморфизм группы A на группу H, ядро $\bar{G}$ которого — это множество всех элементов $\bar{g}$, где $g \in G$. Чтобы убедиться в том, что $\bar{G} \cong G$, возьмем делимую оболочку D группы G. Установив сначала соответствие $\bar{g} \mapsto g$, мы можем последовательно приписать элементам u_i (p), v_{jn} (p) и w_k такие образы в группе D, что все определяющие соотношения будут сохранены. Тот факт, что это может быть сделано, доказывает, что отображение $g \mapsto \bar{g}$ группы G в группу A является мономорфизмом, $\bar{G} \cong G$ и, таким образом, $A/\bar{G} \cong H$.

Очевидно, $c_{j1}(p) \in H_p^{\tau-1}$, а в силу соотношения (5) имеем $\bar{b}_{pl} \in A^{\tau}$. Пусть подгруппе B_p соответствует подгруппа $\bar{B}_p$ в группе $\bar{G}$, и пусть $C/\sum_p \bar{B}_p$ — делимая часть группы $A/\sum_p \bar{B}_p$. Из редуцированности группы A/A^{τ} следует, что $C \subseteq A^{\tau}$ и, значит, $\bar{G} \subseteq C$, так как группа $\bar{G}/\sum_p \bar{B}_p$ делимая. Таким образом, $\bar{G} \subseteq A^{\tau}$. Обратное включение сразу вытекает из того, что $(A/\bar{G})^{\tau} \cong H^{\tau} = 0$. Итак, $A^{\tau} \cong G$. ∎

Ясно, как с помощью леммы 105.1 построить группу конечной ульмовской длины, если заданы ее ульмовские факторы. Следующая лемма показывает, что это может быть сделано в случае, когда ульмовская длина равна ω.

Лемма 105.2. *Пусть* A_0, A_1, ..., A_m, ... — *последовательность групп, удовлетворяющих условиям* а) *и* в). *Если* $\mathfrak{m}$ — *кардинальное число, удовлетворяющее условию* б), *то найдется редуцированная группа* G *мощности* $\mathfrak{m}$ *и длины* ω, *для которой* A_0, A_1, ..., A_m, ... — *ее последовательность Ульма.*

Так же как в доказательстве леммы 105.1, выберем для каждого простого числа p квазибазис $\{a_i^m(p), c_{jn}^m(p)\}$ группы A_{mp} относительно некоторой нижней базисной подгруппы B'_{mp}. Затем мы также выберем полную систему представителей $\{d_k^m\}$ смежных классов группы A_m по ее периодической части. Определим теперь C как группу, порожденную всеми элементами $u_i^m(p)$, $v_{jn}^m(p)$ и w_k^m [при всех p и m]. Эти элементы взаимно однозначно сопоставлены с элементами $a_i^m(p)$, $c_{jn}^m(p)$ и d_k^m соответственно и подчиняются тем же определяющим соотноше-

ниям, что и соответствующие элементы a, c и d, за единственным исключением: соотношение $pc_{j1}^m(p) = 0$ заменяется на соотношение

$$pv_{j1}^m(p) = \begin{cases} 0 & \text{для множества индексов } j \\ & \text{мощности fin } r(A_{mp}); \\ \text{некоторый } u_i^{m+1}(p) \text{ или} & \\ & \text{некоторый } \bar{u}_l^{m+1}(p), \\ & \text{причем каждый из элементов} \\ & \bar{u}_i^{m+1}(p),\ u_l^{m+1}(p) \text{ встречается} \\ & \text{только раз.} \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\bar{u}_l^{m+1}(p)$ — такие элементы из A_{m+1}, что множество $\{u_i^{m+1}(p), \bar{u}_l^{m+1}(p)\}$ соответствует базису p-базисной подгруппы $B_{m+1,\,p}$, для которой $B'_{m+1,\,p}$ — периодическая часть.

Пусть $C^{(m)}$ обозначает подгруппу группы C, порожденную всеми элементами $u_i^s(p)$, $v_{jn}^s(p)$ и w_k^s, где $s \geqslant m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда $C^{(0)} = C$ и с помощью индукции мы получаем из леммы 105.1 и соотношения (6), что $C^{(0)}/C^{(m)}, \ldots, C^{(m-1)}/C^{(m)}$ — ульмовские подгруппы группы $C/C^{(m)}$ с ульмовскими факторами $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Следовательно, $C^{(0)}, C^{(1)}, \ldots, C^{(m)}, \ldots$ — ульмовские подгруппы, а A_0, $A_1, \ldots, A_m, \ldots$ — ульмовские факторы группы C. Имеем также $|C| = \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n} = \sum\limits_{m<\omega} |A_m|$.

Мы переходим к определению группы D с той же последовательностью Ульма, что и у группы C, но мощности $\mathfrak{p} = \prod\limits_{m=0}^{\infty} |A_m|$. Пусть $\pi_m^{m+1}\colon C/C^{m+1} \to C/C^m$ — каноническое отображение при каждом m, и пусть D — обратный предел системы $\{C/C^m, \pi_m^{m+1}\}$. Так как отображение $c \mapsto (c + C^1, \ldots, c + C^{m+1}, \ldots)$ является мономорфизмом группы C в группу D, то группу C можно отождествить с ее образом в группе D. Пусть $\pi_m\colon D \to C/C^m$ — каноническое отображение; сразу видно, что π_m — эпиморфизм при $m = 0, 1, \ldots$. С помощью простой индукции мы можем убедиться в том, что элемент $(x_0, \ldots, x_m, \ldots)$ (где $x_m \in C/C^{m+1}$) принадлежит группе D^m тогда и только тогда, когда $x_0 = \ldots = x_{m-1} = 0$. Мы заключаем, что $C \cap D^m = C^m$, более того, подгруппа C изотипна в группе D. Поскольку $C + D^m = D$ при каждом m, мы видим, что D/C — делимая группа и $D/D^m \cong C/(C \cap D^m) = C/C^m$. Следовательно, группа D обладает той же последовательностью Ульма, что и группа C. Очевидно, что группа D имеет мощность $\mathfrak{p}$.

Пусть теперь G/C — такая делимая подгруппа группы D/C, что $|G| = \mathfrak{m}$. Непосредственно по индукции получаем, что подгруппа G должна быть изотипной в группе D, таким образом, $G^m = D^m \cap G$ для любого m. Значит, $G/G^m = (G + D^m)/D^m = D/D^m$, так как $G + D^m \supseteq C + D^m = D$. Отсюда сразу следует, что группа G обла-

дает той же последовательностью Ульма, что и группа D, так что G — искомая группа. ∎

В связи с последним доказательством необходимо сделать два замечания.

Замечание 1. p-цоколь группы C порождается всеми элементами вида $p^{e_i-1}u_i^m(p)$ и теми элементами $v_{j1}^m(p)$, которые удовлетворяют равенству $pv_{j1}^m(p)=0$ в соотношение (6). Если для фиксированного m последние элементы порождают подгруппу P_m, то, очевидно,

$$C^m[p]=P_m\oplus C^{m+1}[p] \quad \text{и} \quad C[p]=\bigoplus_{m=0}^{\infty} P_m.$$

Более того, из определений легко получить, что

$$D^m[p]=P_m\oplus D^{m+1}[p] \quad \text{и} \quad D[p]=\prod_{m=0}^{\infty} P_m.$$

Замечание 2. Для того чтобы оценить p-ранг группы D/C, оценим размерность группы $D[p]/C[p]$ [см. теорему 28.1]. Если группа P_m определяется как указано выше, то ввиду соотношения (6), очевидно, имеем $|P_m|=|A_{m,p}|$. Из этого равенства, а также из представления групп $C[p]$ и $D[p]$ в виде прямой суммы и прямого произведения соответственно вытекают неравенства

$$\dim D[p]/C[p]\geqslant\min_t\prod_{t\leqslant m}|A_{m,p}|\geqslant\min_m|A_{m,p}|^{\aleph_0}=\mathfrak{r}_p. \tag{7}$$

Следовательно, группу G из доказательства леммы 105.2 всегда можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось $r_p(G/C)=\min(\mathfrak{m}, \mathfrak{r}_p)$ для каждого простого числа p.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат о построении групп с заданными последовательностями Ульма.

Теорема 105.3. *Пусть* $\mathfrak{m}$ — *кардинальное число,* τ — *порядковое число и* (1) — *последовательность ненулевых групп. Редуцированная группа* A, *имеющая мощность* $\mathfrak{m}$ *и ульмовскую длину* τ *и такая, что* (1) — *ее последовательность Ульма, существует в том и только в том случае, когда выполнены условия* а) — г).

В силу теоремы 37.6 нам нужно доказать лишь то, что если $\mathfrak{m}$, τ и (1) удовлетворяют условиям а) — г), то указанная группа A существует.

А) Прежде всего [единственным образом] представим число τ в виде $\tau=\omega\mu+r$, где μ — порядковое число, а r — неотрицательное целое число. Данную последовательность Ульма можно разбить на попарно непересекающиеся подпоследовательности

$$A_{\omega\nu},\ A_{\omega\nu+1},\ \ldots,\ A_{\omega\nu+n},\ \ldots\ (n<\omega) \tag{8}$$

типа ω, где $0\leqslant\nu<\mu$, и конечную последовательность $A_{\omega\mu}, \ldots, A_{\omega\mu+r-1}$, пустую, если $r=0$.

Б) Для каждого порядкового числа $\nu < \mu$ определим группу G_ν ульмовской длины ω с последовательностью Ульма (8). Положим $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$ и

$$\mathfrak{m}_\nu = \sum_{\omega\nu \leqslant \sigma < \tau} |A_\sigma| \quad \text{при} \quad \nu > 0.$$

Заметим, что для произвольных кардинальных чисел $\mathfrak{m}_i$ ($i \in I$) выполняется неравенство

$$\sum \mathfrak{m}_i^{\aleph_0} \leqslant (\sum \mathfrak{m}_i)^{\aleph_0}.$$

В силу теоремы 34.3 и условия г) отсюда следует, что

$$\sum_{\rho<\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant \sum_{\rho<\sigma<\tau} (\sum_p |B_{\sigma, p}|)^{\aleph_0} \leqslant$$
$$\leqslant (\sum_p \sum_{\rho<\sigma<\tau} |B_{\sigma, p}|)^{\aleph_0} \leqslant (\sum_p |B_{\rho, p} \cap A_{\rho, p}|^{\aleph_0})^{\aleph_0} \leqslant$$
$$\leqslant (\sum_p |B_{\rho, p}|)^{\aleph_0} \leqslant |A_\rho|^{\aleph_0}.$$

Если теперь $|A_\rho| = \min_\sigma |A_\sigma|$, где $\omega\nu \leqslant \sigma < \omega(\nu+1)$, то

$$m_\nu = \sum_{\omega\nu \leqslant \sigma \leqslant \rho} |A_\sigma| + \sum_{\rho<\sigma<\tau} |A_\sigma| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\omega\nu \leqslant \sigma \leqslant \rho} |A_\sigma| + |A_\rho|^{\aleph_0} \leqslant \prod_{\omega\nu \leqslant \sigma < \omega(\nu+1)} |A_\sigma|.$$

Ввиду последнего равенства и условия б) из условий а) и в) следует существование такой группы G_ν длины ω и мощности $\mathfrak{m}_\nu$, что (8) — ее последовательность Ульма [см. лемму 105.2]. Это верно для всех $\nu < \mu$; если же $r > 0$, то существует группа G_μ, для которой $A_{\omega\mu}, \ldots$ $\ldots, A_{\omega\mu+r-1}$ — последовательность Ульма.

В каждой группе G_ν для всякого простого числа p выберем квазибазис $\{a_i^\nu(p), \ c_{jn}^\nu(p)\}$. Затем выберем полную систему представителей $\{d_k^\nu\}$ смежных классов группы G_ν по ее периодической части.

В) Следующим способом определим теперь искомую группу A. Для каждого порядкового числа $\nu \leqslant \mu$ выберем образующие $u_i^\nu(p)$, $v_{jn}^\nu(p)$, w_k^ν, взаимно однозначно сопоставленные с образующими группы G_ν. Они подчиняются следующим определяющим соотношениям:

1. $p^e u_i^\nu(p) = 0$, если $e = e(a_i^\nu(p))$;
2. $p v_{j1}^\nu(p)$ равняется нулю или некоторому $u_i^\varkappa(p)$ или некоторому $\bar{u}_i^\varkappa(p)$ при $\varkappa > \nu$.

Здесь $\bar{u}_i^\varkappa(p)$ — элементы, соответствующие элементам $\bar{a}_i^\varkappa(p)$, где $\{a_i^\varkappa(p), \bar{a}_i^\varkappa(p)\}$ — базис группы $B_{\varkappa, p}$.

3. $pv^{\nu}_{j,\, n+1}(p)=v^{\nu}_{jn}(p)+s_1u^{\nu}_{i_1}(p)+\ldots+s_tu^{\nu}_{i_t}(p)$ в том и только том случае, когда в группе G_ν выполняется равенство

$$pc^{\nu}_{j,\, n+1}(p)=c^{\nu}_{jn}(p)+s_1a^{\nu}_{i_1}(p)+\ldots+s_ta^{\nu}_{i_t}(p);$$

4. $w^{\nu}_{k_1}+w^{\nu}_{k_2}=w^{\nu}_{k}+\bar{f}$, где $\bar{f}$ — линейная комбинация образующих $u^{\nu}_i(p)$, $v^{\nu}_{jn}(p)$ с фиксированным ν [и меняющимся p]; это соотношение выполняется в том и только том случае, когда в группе G_ν выполняется равенство $d^{\nu}_{k_1}+d^{\nu}_{k_2}=d^{\nu}_{k}+f$, где f — соответствующее выражение для образующих $a^{\nu}_i(p)$, $c^{\nu}_{jn}(p)$.

В дальнейшем будут использованы следующие факты:

α) В силу замечания 2 можно считать, что группа $G_\nu\ (\nu<\mu)$ построена таким образом, что p-ранг группы G_ν/C_ν равен $\min(\mathfrak{m}_\nu,\ \mathfrak{r}^{\nu}_{p})$, где

$$\mathfrak{r}^{\nu}_{p}=\min_{\omega\nu\leqslant\rho<\omega(\nu+1)}|A_{\rho,\,p}|^{\aleph_0},$$

а группа C_ν соответствует группе C из леммы 105.2.

β) Для произвольного простого числа p множество $\{u^{\varkappa}_i(p),\ \bar{u}^{\varkappa}_i(p)\}$, где $\varkappa>\nu$, имеет мощность $\sum\limits_{\nu<\varkappa}r(B_{\omega\varkappa,\,p})$. Последняя не превосходит мощность $\sum\limits_{\nu<\varkappa}|A_{\omega\varkappa}|\leqslant\mathfrak{m}_\nu$. Более того, по условию г) при каждом ρ, заключенном между $\omega\nu$ и $\omega(\nu+1)$, имеем

$$\sum_{\nu<\varkappa}r(B_{\omega\varkappa,\,p})\leqslant\min_{\rho}\sum_{\rho<\sigma}|B_{\sigma,\,p}|\leqslant\min_{\rho}|A_{\rho,\,p}|^{\aleph_0}=\mathfrak{r}^{\nu}_{p}.$$

Следовательно, можно считать, что в соотношении 2 мы полагаем $pv^{\nu}_{j1}(p)=0$, как только $c^{\nu}_{j1}(p)\in C_\nu$, и при каждом фиксированном ν каждый из элементов $u^{\varkappa}_i(p)$, $\bar{u}^{\varkappa}_i(p)$, где $\varkappa>\nu$, встречается не более одного раза.

Г) Докажем, что группа A, определенная в п. В), удовлетворяет всем требуемым условиям.

Ясно, что произвольный элемент $a\in A$ можно записать в виде суммы $a=x_{\nu_1}+\ldots+x_{\nu_t}$, где $\nu_1<\ldots<\nu_t$, причем каждый элемент x_ν соответствует ненулевому элементу $g_\nu\in G$ вида (4). Мы утверждаем, что $a\neq 0$, если $t\geqslant 1$. Приравняв нулю все образующие с верхними индексами, большими, чем ν_1, мы видим, что достаточно показать, что $x_{\nu_1}\neq 0$, если $g_{\nu_1}\neq 0$. Так же как в доказательстве леммы 105.1, в этом можно убедиться, продолжив вложение $G_{\nu_1}\to E$ группы G_{ν_1} в ее делимую оболочку E до гомоморфизма $A\to E$.

Из условия в) заключаем, что $\mathfrak{m}_\nu\leqslant\mathfrak{m}$ для любого ν, а также $|\tau|\leqslant\mathfrak{m}$. Отсюда $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\leqslant|A|=\sum\limits_{\nu}\mathfrak{m}_\nu\leqslant\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$, значит, группа A имеет мощность $\mathfrak{m}$.

Теперь мы покажем, что все элементы $u^{\nu}_i(p)$, $v^{\nu}_{jn}(p)$ и w^{ν}_k, где $\nu\geqslant 1$, принадлежат первой ульмовской подгруппе A^1 группы A.

По тем же причинам, что и в доказательстве леммы 105.1, достаточно лишь доказать, что это верно для некоторого $u_i^\nu(p)$ и некоторого $\bar{u}_i^\nu(p)$. Последнее, однако, сразу следует из соотношения 2 и п. β).

Ввиду п. β) элемент v^ν из A, соответствующий элементу c_ν из $C_\nu[p]$, лежит в $A[p]$. Таким образом, если $pv_{jn}^\nu(p) = u_i^\varkappa(p)$, то и $p(v_{jn}^\nu(p) + v^\nu) = u_i^\nu(p)$ для каждого такого v^ν. При данном целом числе m элемент v^ν можно выбрать таким образом, что $\bar{c}_{jn}^\nu(p) + c^\nu \in \in G_\nu^m$. Следовательно, при $\nu \geqslant 1$ все элементы $u_i^\nu(p)$ и $\bar{u}_i^\nu(p)$ принадлежат группе A^ω, то же верно для всех $u_i^\nu(p)$, $v_{jn}^\nu(p)$, w_k^ν при $\nu \geqslant 1$. Мы сразу получаем, что $A/A^\omega \cong G_0$. Таким образом, первые ω ульмовских факторов группы A совпадают с ульмовскими факторами группы G_0. Ясно, как провести трансфинитную индукцию, снова ссылаясь на п. β). Тем самым будет доказано, что последовательность Ульма группы A действительно является заданной последовательностью групп. ∎

Упражнения

1. Дать подробное доказательство первого из неравенств (7).

2. Сформулировать и доказать аналог леммы 105.1 для предельных порядковых чисел τ.

3 Следующим образом доказать лемму 105.1:

(1) Используя пример Прюфера из § 35, определить группу D_p, для которой $D_p^1 = B_p$, а $K_p = D_p/D_p^1$ — прямая сумма циклических p-групп. Обозначим через E точную последовательность $0 \to B_p \to \to D_p \to K_p \to 0$.

(2) Для мономорфизма $\varkappa_p$: $K_p \to H_p^{\tau-1}$ определить последовательность $E\varkappa_p^{-1}$: $0 \to B_p \to E_p \to H_p^{\tau-1} \to 0$ и показать, что $B_p = E_p^1$.

(3) Для естественного вложения ν: $\bigoplus_p H_p^{\tau-1} \to H$ и гомоморфизма μ: $\bigoplus_p B_p \to G$ [определенного очевидным образом] получить последовательность $\mu(\bigoplus_p E\varkappa_p^{-1})\nu$: $0 \to G \to A \to H \to 0$ и убедиться в том, что A — искомая группа.

4. Заменив мономорфизм $\varkappa_p$ из упр. 3 подходящим мономорфизмом λ_p: $K_p \to H_p$, провести аналогичное доказательство в случае, когда τ — предельное порядковое число.

5. Пусть ульмовская длина τ группы A — предельное порядковое число, и пусть $G = \varprojlim A/A^\sigma$ при $\sigma \to \tau$, где отображения $A/A^\sigma \to \to A/A^\rho$ ($\rho \leqslant \sigma$) — естественные гомоморфизмы. Показать, что ульмовские факторы группы G не обязаны быть теми же самыми, что и у группы A. [*Указание*: добиться строгого неравенства $|G| > > |B|^{\aleph_0}$, где B — базисная подгруппа группы A.]

6. Улучшить теорему 105.3, наложив условия на кардинальные числа $|A^{\omega\nu}/A^{\omega(\nu+1)}|$.

7*. Как выглядит теорема 105.3, если ограничиться случаем, когда A — копериодическая группа? [*Указание*: см. теорему 54.3.]

8*. Сформулировать теорему 105.3 для пары групп A, T, где T — периодическая часть группы A.

9. Привести примеры групп, имеющих разные мощности и одинаковые последовательности Ульма.

10. Для любого порядкового числа $\tau \geqslant \omega$ существует $2^{|\tau|}$ неизоморфных редуцированных групп ульмовской длины τ и мощности, не превосходящей $|\tau|$.

11. Пусть G — такая группа, что $G^1 = 0$. Найти мощность множества неизоморфных редуцированных групп A, для которых $A_0 \cong G$.

Замечания

Впервые нерасщепляющаяся смешанная группа была построена Леви [1]. Около двадцати лет спустя Фомин [1] и Бэр [4] нашли достаточное условие и точный критерий [теорема 100.1] соответственно расщепляемости смешанных групп. Двойственная проблема для групп без кручения оставалась открытой в течение тридцати лет, пока не была решена Гриффитом [7]; см. теорему 101.1.

Ирвин, Кхаббаз и Райна [1, 2] использовали тензорное произведение, чтобы ввести своего рода меру, указывающую, насколько данная смешанная группа далека от расщепляемости. Некоторые из их результатов были улучшены Лоувером и Тубасси [1].

Проблема расщепления для модулей исследовалась многими авторами. Ротман [Rotman Z., *Anais Acad. Brasil. Ci.*, **32** (1960), 193—194] доказал, что коммутативные области целостности, над которыми все смешанные модули расщепляются,— это в точности поля. Эта же проблема в некоммутативном случае рассматривалась Тепли [Teply M. L., *J. London Math. Soc.*, **4** (1971), 157—164]. Капланский [Kaplansky I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 327—340] заметил, что смешанные модули с ограниченными периодическими частями обязательно расщепляются над дедекиндовыми областями целостности. Чейз [1] показал, что среди коммутативных областей целостности лишь дедекиндовы кольца обладают этим свойством. О расщепляемости модулей над коммутативными областями целостности см. также работу Капланского [Kaplansky I., *Arch. Math.*, **13** (1963), 341—343].

Для модулей M над произвольными кольцами $\mathbf{R}$ периодические части могут определяться различными способами, и для каждого из способов определения можно искать критерий расщепляемости. Весьма плодотворно следующее обобщение понятия периодической части. *Сингулярным подмодулем* $Z(M)$ модуля M называется множество элементов из M, аннуляторы которых являются левыми идеалами, существенными в $\mathbf{R}$. О соответствующей проблеме расщепления см. Катэфорис и Сандомирский [Cateforis V. C., Sandomirski F. L., *J. Algebra*, **10** (1968), 149—165; *Pacific J. Math.*, **31** (1969), 289—292]. Имеется обширная литература по теориям кручения, см. Ламбек [Lambek J., Lecture Notes in Mathematics, N° 177, Springer-Verlag, 1971].

Поскольку проблема расщепления играет центральную роль в теории смешанных групп, нет ничего удивительного в том, что уделялось много внимания разнообразным обобщениям этой проблемы. Оппельт [1] рассматривал такие вполне разложимые группы без кручения G, что все расширения периодических групп с помощью группы G являются прямыми суммами *p-смешанных групп*, взятыми по различным простым числам p [p-смешанной называется группа, у которой периодическая часть является p-группой]. Гриффит [6] решил этот вопрос для произвольных групп без кручения G. Соответствующие сведения насчет квазирасщепляющихся групп дала К. Уокер [1].

Хорошая классификация смешанных групп оказалась вне нашей досягаемости и, вероятно, останется таковой на некоторое время. На самом деле смешан-

ных групп так много, что мало надежды в ближайшем будущем найти способ «склеивания» их периодических частей и факторов без кручения. Счастливым исключением является случай, когда ранг без кручения равен 1, и интуитивно ясно, что, исследуя такие смешанные группы, можно многое узнать о смешанных группах вообще. Исходя из этих соображений, автор посвятил работу [16] структурной проблеме смешанных групп ранга без кручения 1. К настоящему времени мы обладаем хорошей структурной теорией смешанных групп с тотально проективными периодическими частями. Понятие высотной матрицы является ключевым; его ввел Ротман [2] и широко использовали Меджиббен [6] и Мышкин [5]. В этих двух работах была доказана теорема 103.3 для счетных групп; общий случай рассмотрен, видимо, впервые. Структурная теорема 104.3 обязана своим появлением [Ротману [2] в частном случае] Меджиббену [6] и Мышкину [5]. Уоллесу [1] удалось распространить ее на группы с тотально проективными периодическими частями.

Смешанные модули над полными кольцами дискретного нормирования находятся в более благоприятной ситуации. Мы имеем здесь дело лишь с одним простым элементом, и действительно эти модули образуют класс, лучше поддающийся изучению. См. Ротман [Rotman J., *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 607—623], Ротман и Йен [1], Банг [Bang C. M., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 380—383; *J. Algebra* **14** (1970), 552—560; *Proc. Amer. Math. Soc.*, **28** (1971), 381—388]. Последние результаты Уорфилда [5] дают важное обобщение теории тотально проективных p-групп.

Построение смешанных групп с заданной последовательностью Ульма было независимо проведено Уорфилдом и автором [не опубликовано]. Рассмотрения § 105 сходны с тем, что сделано автором в его работе [2], где исследовался случай примарных групп. Для смешанных модулей над $\mathfrak{Q}_p$ и $\mathfrak{Q}_p^*$ проблема решена Куликовым [3]; его результат легко распространяется на случай смешанных модулей над произвольными кольцами дискретного нормирования.

Проблема 80 (Бэр [4]). Найти необходимые и достаточные условия, при которых пара (T, G), где T — периодическая группа, а G — группа без кручения, удовлетворяет равенству $\mathrm{Ext}\,(G, T) = 0$.

Один из частных случаев рассмотрен Оппельтом [2]. Для случая счетных групп см. § 101, упр. 7.

Проблема 81. Используя теорию тотально проективных p-групп и высотных матриц, разработать теорию смешанных групп A, для которых $T(A)$ — тотально проективная группа, а $A/T(A)$ — делимая [или, в более общем случае, вполне разложимая] группа.

Проблема 82. Исследовать группы A со следующим свойством: если A содержится в прямой сумме редуцированных групп A_i $(i \in I)$, то найдется такое целое число $n > 0$, что некоторая существенная подгруппа группы nA содержится в прямой сумме конечного числа групп A_i.

Заметим, что все алгебраически компактные и копериодические группы, а также все периодически полные p-группы и группа $P = Z^{\aleph_0}$ обладают этим свойством. См. Чейз [Chase S. U., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 214—216].

Проблема 83. Комбинируя теории тотально проективных p-групп и вполне разложимых групп без кручения, построить более общую теорию для произвольных групп.

Для модулей над кольцами дискретного нормирования это было сделано Уорфилдом.

Глава XV

КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ

С абелевой группой A можно связать кольцо $\mathsf{E}(A)$ всех ее эндоморфизмов. Это ассоциативное кольцо с 1, до известной степени отражающее некоторые свойства группы A. Естественно попытаться найти точные соотношения между групповыми свойствами группы A и кольцевыми свойствами кольца $\mathsf{E}(A)$.

Существует много примеров неизоморфных групп с изоморфными кольцами эндоморфизмов. Следовательно, в общем случае кольца эндоморфизмов не определяют группы. Однако в важном частном случае периодических групп A кольцо $\mathsf{E}(A)$ полностью характеризует группу A [см. § 108].

Одна из основных проблем, касающихся колец эндоморфизмов,— найти критерии для того, чтобы кольцо являлось кольцом эндоморфизмов некоторой абелевой группы. Пока такие критерии известны лишь для некоторых более или менее узких классов. Например, кольца эндоморфизмов периодических сепарабельных групп могут быть охарактеризованы удовлетворительным образом [см. § 109], а при предположении счетности можно установить довольно общее достаточное условие в случае групп без кручения [см. § 110]. Отметим, что кольца эндоморфизмов также проливают свет на основное различие между периодическими группами и группами без кручения: в то время как кольца эндоморфизмов периодических групп принадлежат узкому классу колец, все счетные редуцированные кольца без кручения с 1 оказываются кольцами эндоморфизмов.

Проблема выяснения, когда кольцо является кольцом эндоморфизмов, может стать проще, если ограничиться определенными классами колец. Полный или почти полный ответ получается, если $\mathsf{E}(A)$ — простое, артиново, регулярное или π-регулярное кольцо [см. § 111 и 112].

Мы также вкратце рассмотрим представление колец эндоморфизмов матрицами и некоторые топологии в кольцах эндоморфизмов.

§ 106. Кольца эндоморфизмов

Хорошо известно, что эндоморфизмы $\alpha, \beta, \ldots$ абелевой группы A образуют кольцо относительно операций сложения и умножения гомоморфизмов:

$$(\alpha+\beta)\,a = \alpha a + \beta a \quad \text{и} \quad (\alpha\beta)\,a = \alpha(\beta a) \text{ для всех } a \in A.$$

Таким путем получается ассоциативное кольцо с единицей, называемое *кольцом эндоморфизмов* $\mathsf{E}(A)$ группы A.

Очевидно, аддитивная группа кольца $\mathsf{E}(A)$ — это не что иное, как группа $\operatorname{End} A$, введенная в § 43.

Пример 1. Если $A = Z$, то, согласно примеру 1 из § 43, всякий эндоморфизм $\alpha\colon Z \to Z$ полностью определяется элементом $\alpha 1$. Легко видеть, что соответствие $\alpha \mapsto \alpha 1$ между эндоморфизмами группы Z и целыми числами является изоморфизмом не только в теоретико-групповом, но и в теоретико-кольцевом смысле. Другими словами,

$$\mathsf{E}(Z) \cong \mathsf{Z}.$$

Пример 2. Аналогичные рассуждения и ссылка на пример 2 из § 43 дают изоморфизм

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}(m)) \cong \mathbf{Z}/(m).$$

Пример 3. Пример 3 из § 43 дает изоморфизм

$$\mathbf{E}(Z(p^\infty)) \cong \mathbf{Q}_p^*.$$

Пример 4. Пусть R — рациональная группа, и пусть $1 \in R$. Здесь опять эндоморфизмы α вполне определяются элементами $\alpha 1$, поэтому эндоморфизмы являются просто умножениями на рациональные числа. Эндоморфизм всегда сохраняет делимость элементов на целые числа. Поэтому рациональное число представляет эндоморфизм группы R тогда и только тогда, когда для всякого простого делителя p его знаменателя $pR = R$. Следовательно, кольцо $\mathbf{E}(R)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbf{Q}$, порожденному 1 и всеми такими числами p^{-1}, что $pR = R$. В частности,

$$\mathbf{E}(Q) \cong \mathbf{Q}.$$

Пример 5. Из примера 5 § 43 непосредственно следует, что

$$\mathbf{E}(J_p) \cong \mathbf{Q}_p^*.$$

Пример 6. Если M — левый $\mathbf{R}$-модуль, то $\mathbf{R}$-*эндоморфизмом* назовем эндоморфизм α аддитивной группы модуля M, перестановочный с умножениями на элементы кольца, т. е. такой эндоморфизм α, что

$$\alpha(\rho a) = \rho\alpha(a) \quad \text{для всех} \quad a \in M,\ \rho \in \mathbf{R}.$$

$\mathbf{R}$-эндоморфизмы образуют подкольцо $\mathbf{E}_{\mathbf{R}}(M)$ кольца $\mathbf{E}(M)$. Если кольцо $\mathbf{R}$ содержит единицу, то $\mathbf{R}$-эндоморфизмы кольца $\mathbf{R}$ как $\mathbf{R}$-модуля образуют кольцо, антиизоморфное кольцу $\mathbf{R}$. В частности, изоморфизм в приведенном выше примере 5 продолжает существовать, если заменить $\mathbf{E}(J_p)$ на $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p^*}(J_p)$.

Пример 7. Пусть M — модуль над кольцом $\hat{\mathbf{Z}} = \prod_p \mathbf{Q}_p^*$ и $M^1 = 0$. Тогда всякий $\mathbf{Z}$-эндоморфизм η модуля M является $\hat{\mathbf{Z}}$-эндоморфизмом. Чтобы это проверить, покажем, что эндоморфизм $\bar{\pi}$, являющийся умножением на $\pi \in \hat{\mathbf{Z}}$, лежит в центре $\mathbf{E}(M)$. Если k_m $(m = 1, 2, \ldots)$ — такие целые числа, что $k_m \to \pi$ в Z-адической топологии кольца $\hat{\mathbf{Z}}$, то и $\pi\eta$, и $\eta\pi$ — предел последовательности элементов $k_m\eta = \eta k_m$ в Z-адической топологии кольца $\mathbf{E}(M)$. Так как $\mathbf{E}(M)^1 = 0$, то $\pi\eta = \eta\pi$.

Мы часто использовали тот факт, что прямые разложения группы соответствуют идемпотентным эндоморфизмам. При изучении колец эндоморфизмов эта взаимосвязь между разложениями и эндоморфизмами будет иметь существенное значение. Мы начнем со следующих простых замечаний.

а) Групповой изоморфизм φ: $A \to C$ индуцирует кольцевой изоморфизм $\varphi^{\#}$: $\mathbf{E}(A) \to \mathbf{E}(C)$, определяемый по формуле

$$\varphi^{\#}: \alpha \mapsto \varphi\alpha\varphi^{-1}.$$

б) Если $A = B \oplus C$, то любой эндоморфизм группы B можно рассматривать как эндоморфизм группы A, аннулирующий C. Поэтому, если это будет удобно, $\mathbf{E}(B)$ мы будем рассматривать как подкольцо кольца $\mathbf{E}(A)$. Точнее:

в) *Пусть* $A = B \oplus C$, *и пусть* ε: $A \to B$ — *соответствующая проекция. Тогда можно произвести отождествление*

$$\mathbf{E}(B) = \varepsilon\mathbf{E}(A)\varepsilon.$$

Если $\alpha \in \mathsf{E}(A)$, то $\varepsilon\alpha\varepsilon$ — эндоморфизм группы B. С другой стороны, если θ — эндоморфизм группы B, то, произведя указанное отождествление θ с эндоморфизмом группы A, получаем $\theta = \varepsilon\theta\varepsilon$.

г) *Пусть группы* $A = B \oplus C$ *и* A' *имеют изоморфные кольца эндоморфизмов, и пусть* $\psi\colon \mathsf{E}(A) \to \mathsf{E}(A')$ — *изоморфизм между ними. Тогда* $A' = B' \oplus C'$, *причем* ψ *индуцирует изоморфизмы* $\mathsf{E}(B) \to \mathsf{E}(B')$ *и* $\mathsf{E}(C) \to \mathsf{E}(C')$.

Снова обозначив через ε проекцию $A \to B$ с ядром C, предположим, что $\psi\colon \varepsilon \mapsto \varepsilon'$. Очевидно, ε' снова идемпотент, поэтому $A' = B' \oplus C'$, где $B' = \operatorname{Im} \varepsilon'$, $C' = \operatorname{Ker} \varepsilon'$. Из п. в) ясно, что $\mathsf{E}(B) = \varepsilon\mathsf{E}(A)\varepsilon$ переводится с помощью ψ в $\mathsf{E}(B') = \varepsilon' E(A') \varepsilon'$, и $\psi | \mathsf{E}(B)$ — изоморфизм, так как это отображение имеет обратное.

д) *Существует взаимно однозначное соответствие между конечными прямыми разложениями*

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$$

группы A *и разложениями кольца* $\mathsf{E}(A)$ *в конечные прямые суммы левых идеалов*

$$\mathsf{E}(A) = \mathsf{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{L}_n;$$

именно, если $A_i = \varepsilon_i A$, *где* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — *попарно ортогональные идемпотенты, то* $\mathsf{L}_i = \mathsf{E}(A)\varepsilon_i$.

Если $A = \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_n A$, где ε_i — ортогональные идемпотенты, то хорошо известное разложение Пирса кольца $\mathsf{E}(A)$ дает $\mathsf{E}(A) = \mathsf{E}(A)\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{E}(A)\varepsilon_n$. Обратно, если $\mathsf{E}(A) = \mathsf{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{L}_n$, где L_i — левые идеалы кольца $\mathsf{E}(A)$, то известно [и легко проверяется], что $\mathsf{L}_i = \mathsf{E}(A)\varepsilon_i$, где ε_i является i-й компонентой единицы кольца $\mathsf{E}(A)$. Эти ε_i — ортогональные идемпотенты, откуда следует, что $A = \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_n A$. Легко видеть, что соответствие является взаимно однозначным.

Идемпотент $\varepsilon \neq 0$ называется *примитивным*, если его нельзя представить в виде суммы двух ненулевых ортогональных идемпотентов. Очевидно, мы имеем

е) *Если* $\varepsilon \neq 0$ — *идемпотент кольца* $\mathsf{E}(A)$, *то* εA *является неразложимым прямым слагаемым группы* A *тогда и только тогда, когда* ε — *примитивный идемпотент.*

Следующее замечание показывает, как изоморфизм двух слагаемых может быть определен в терминах эндоморфизмов.

ж) (Корнер [4]). *Пусть* $A = B \oplus C = B' \oplus C'$ — *прямые разложения группы* A *и* $\varepsilon\colon A \to B$, $\varepsilon'\colon A \to B'$ — *соответствующие проекции. Тогда* $B \cong B'$ *в том и только в том случае, когда существуют такие элементы* $\alpha, \beta \in \mathsf{E}(A)$, *что*

$$\alpha\beta = \varepsilon \quad \text{и} \quad \beta\alpha = \varepsilon'. \qquad (1)$$

Если $\alpha, \beta \in \mathsf{E}(A)$ удовлетворяют этим равенствам, то из $\beta\alpha\beta = \beta\varepsilon = \varepsilon'\beta$ и $\alpha\beta\alpha = \varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon'$ следует, что $\beta^* = \beta\alpha\beta \mid B$ и $\alpha^* = \alpha\beta\alpha \mid B'$ — это гомоморфизмы $\beta^*\colon B \to B'$ и $\alpha^*\colon B' \to B$. Теперь

равенства $(\alpha\beta\alpha)(\beta\alpha\beta) = \varepsilon$ и $(\beta\alpha\beta)(\alpha\beta\alpha) = \varepsilon'$ показывают, что β^* и α^* — взаимно обратные отображения, откуда $B \cong B'$. Обратно, если β^*: $B \to B'$ и α^*: $B' \to B$ — взаимно обратные изоморфизмы, то для $\beta = \beta^*\varepsilon$ и $\alpha = \alpha^*\varepsilon'$ выполнено (1).

Докажем следующий чисто технический результат [Холлет и Хирш [1]], на который будем ссылаться в дальнейшем.

з) *Пусть A — группа без кручения и $\alpha, \beta \in \mathbf{E}(A)$. Предположим, что*

1) $\alpha\beta = 0$;

2) *левый идеал кольца $\mathbf{E}(A)$, порожденный элементами α и β, содержит $m\mathbf{E}(A)$ для некоторого натурального числа m;*

3) *в кольце $\mathbf{E}(A)$ нет ненулевых нильпотентных элементов. Тогда* $\operatorname{Ker}\alpha$ *и* $\operatorname{Ker}\beta$ *— непересекающиеся вполне характеристические подгруппы группы A, причем*

$$mA \subseteq \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta.$$

В силу условия 1) для любого $\eta \in \mathbf{E}(A)$ имеем $(\beta\eta\alpha)^2 = 0$, откуда $\beta\eta\alpha = 0$ по условию 3). В частности, $\beta\alpha = 0$, а значит, и $\alpha\eta\beta = 0$. По условию 2) существуют такие элементы $\gamma, \delta \in \mathbf{E}(A)$, что $\gamma\alpha + \delta\beta = m1_A$. Поэтому $\gamma\alpha^2 = m\alpha = \alpha\gamma\alpha$ и $(\gamma\alpha - \alpha\gamma)\alpha = 0$. Мы получаем $\alpha(\gamma\alpha - \alpha\gamma) = 0$, откуда $m(\gamma\alpha - \alpha\gamma) = (\gamma\alpha + \delta\beta)(\gamma\alpha - \alpha\gamma) = 0$. Так как A — группа без кручения, то $\gamma\alpha - \alpha\gamma = 0$. Это доказывает, что α и γ, а также β и δ перестановочны. Следовательно, $ma = \alpha\gamma a + \beta\delta a \in \operatorname{Ker}\beta + \operatorname{Ker}\alpha$ для любого $a \in A$. Отсюда $mA \subseteq \operatorname{Ker}\alpha + \operatorname{Ker}\beta$. Если элемент $x \in A$ удовлетворяет условиям $\alpha x = \beta x = 0$, то $mx = \gamma\alpha x + \delta\beta x = 0$ влечет за собой $x = 0$. Таким образом, последняя сумма прямая.

Если $a \in \operatorname{Ker}\alpha$ и $\eta \in \mathbf{E}(A)$, то из $\eta m a = \eta(\delta\beta)a$ и $\alpha(\eta\delta)\beta = 0$ следует, что $m\eta a \in \operatorname{Ker}\alpha$. Так как $\operatorname{Ker}\alpha$ — сервантная подгруппа группы A, то $\eta a \in \operatorname{Ker}\alpha$, а это означает, что $\operatorname{Ker}\alpha$ — вполне характеристическая подгруппа. В силу симметрии $\operatorname{Ker}\beta$ — также вполне характеристическая подгруппа.

и) *Пусть $\hat{A}$ является Z-адическим пополнением группы A, причем $A^1 = 0$. Для любого $\eta \in \mathbf{E}(A)$ существует ровно один такой элемент $\hat{\eta} \in \mathbf{E}(\hat{A})$, что $\hat{\eta} \mid A = \eta$.*

В силу предположения, что $A^1 = 0$, группу A можно рассматривать как сервантную подгруппу группы $\hat{A}$. В силу сервантной инъективности группы $\hat{A}$ эндоморфизм η можно продолжить до эндоморфизма $\hat{\eta}$: $\hat{A} \to \hat{A}$. Этот последний должен быть единственным, так как не существует другого эндоморфизма группы $\hat{A}$, совпадающего с $\hat{\eta}$ на плотной подгруппе. [Пример 7 показывает, что $\hat{\eta}$ является, кроме того, $\mathbf{Z}$-эндоморфизмом.]

Ориентируясь на линейную алгебру, естественно рассмотреть матричные представления колец эндоморфизмов. Они получаются, если использовать прямые разложения групп. Бесконечные разло-

жения дают представления с помощью бесконечных матриц. Чтобы выбрать типы бесконечных матриц, встречающихся в таких представлениях, нам понадобится понятие конечной топологии. Оно будет введено и более подробно исследовано в следующем параграфе.

Матрица $[\alpha_{ji}]$ с элементами из кольца $\mathsf{E}(A)$, называется *сходящейся по столбцам*, если для каждого столбца i сумма $\sum\limits_j \alpha_{ji}$ существует в конечной топологии кольца $\mathsf{E}(A)$.

Пусть $A=\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ — прямая сумма и ε_i $(i\in I)$ — соответствующие проекции, рассматриваемые как идемпотенты кольца $E(A)$ Каждый элемент $a\in A$ может быть записан в виде $a=\sum\limits_i \varepsilon_i a$, где почти все элементы $\varepsilon_i a$ равны нулю. Для $\alpha\in\mathsf{E}(A)$ имеем $\alpha a=\sum\limits_i \alpha\varepsilon_i a=$ $=\sum\limits_{i,j}(\varepsilon_j\alpha\varepsilon_i)\,a$. Таким способом с каждым элементом $\alpha\in\mathsf{E}(A)$ ассоциируется $I\times I$-матрица:

$$\varphi\colon \alpha\mapsto[\alpha_{ji}]_{j,\,i\in I},\quad \text{где}\quad \alpha_{ji}=\varepsilon_j\alpha\varepsilon_i.$$

Если $\beta\in\mathsf{E}(A)$ и $[\beta_{ji}]$, где $\beta_{ji}=\varepsilon_j\beta\varepsilon_i$, — соответствующая матрица, то матрицы, ассоциированные с $\alpha-\beta$ и $\alpha\beta$, — это в точности разность $[\alpha_{ji}-\beta_{ji}]$ и произведение $[\sum\limits_k \alpha_{jk}\beta_{ki}]$ матриц $[\alpha_{ji}]$ и $[\beta_{ji}]$ соответственно. Значит, φ — кольцевой гомоморфизм.

Из определения ясно, что нулевая матрица может возникнуть только при нулевом эндоморфизме. При любом i для всех $a\in A$ существует $\alpha\varepsilon_i a=\sum\limits_j \alpha_{ji}a$, т. е. матрицы $[\alpha_{ji}]$ сходятся по столбцам. Обратно, если $[\alpha_{ji}]_{i,\,j\in I}$ — матрица, сходящаяся по столбцам, с элементами $\alpha_{ji}\in\varepsilon_j\mathsf{E}(A)\,\varepsilon_i$, то она соответствует некоторому $\alpha\in\mathsf{E}(A)$, а именно

$$\alpha a=\sum_{i,\,j}\alpha_{ji}a.$$

Если по аналогии с п. б) естественным образом отождествить $\mathrm{Hom}(A_i,\,A_j)$ с подгруппой $\varepsilon_j\mathsf{E}(A)\,\varepsilon_i$ из $\mathsf{E}(A)$, то получится

Теорема 106.1. *Пусть* $A=\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ — *прямое разложение группы* A. *Тогда кольцо* $\mathsf{E}(A)$ *изоморфно кольцу всех сходящихся по столбцам* $I\times I$-*матриц*

$$[\alpha_{ji}]_{j,\,i\in I},\quad \textit{где}\quad \alpha_{ji}\in\mathrm{Hom}(A_i,\,A_j).$$

В оставшейся части этого параграфа дадим некоторые приложения.

Пример 8. Пусть $A=\bigoplus\limits_{i\in I}\langle a_i\rangle$ — свободная группа. Тогда в матричном представлении из теоремы 106.1 элементы α_{ji} — целые числа, а столбцы матриц конечны.

Пример 9. Если $A = \bigoplus A_i$ — делимая группа без кручения, где $A_i \cong Q$, то мы получаем тот же результат, что и в примере 8, только элементы α_{ji} могут быть любыми рациональными числами.

Пример 10. Пусть $A = A_0 \oplus \bigoplus_p A_p$, где A_0 — группа без кручения, а A_p являются p-группами с различными простыми числами p. Тогда соответствующее представление эндоморфизмов группы A задается матрицами

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \alpha_{20} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \alpha_{30} & 0 & \alpha_{33} & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p0} & 0 & 0 & \dots & \alpha_{pp} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

где $\alpha_{p0} \in \mathrm{Hom}\,(A_0, A_p)$, $\alpha_{pp} \in \mathsf{E}\,(A_p)$. Здесь первый столбец должен быть конечным, если A_0 — конечно порожденная группа.

Упражнения

1. Подкольцо кольца $\mathsf{E}\,(A)$, порожденное единицей, изоморфно кольцу $\mathbf{Z}$ или некоторому его факторкольцу.

2. Показать, что группу $\mathrm{Hom}\,(A, C)$, где $C \subseteq A$, можно превратить в кольцо; в действительности это правый идеал кольца $\mathsf{E}\,(A)$.

3. Распространить утверждение п. д) на бесконечные прямые разложения $A = \oplus A_i$. [*Указание*: $\sum \lambda_i$, где $\lambda_i \in \mathsf{L}_i = \mathsf{E}\,(A)\,\varepsilon_i$, существует в конечной топологии.]

4. (а) Если $A = \oplus A_i$ и все A_i — вполне характеристические подгруппы группы A; то $\mathsf{E}\,(A) \cong \prod \mathsf{E}\,(A_i)$.

(б) Применить п. а) к p-компонентам A_p периодической группы A.

(в) Вообще, если $A = \oplus A_i$, то $\mathsf{E}\,(A)$, содержит подкольцо, изоморфное $\prod \mathsf{E}\,(A_i)$.

5. Показать, что кольцо эндоморфизмов бесконечной группы обязательно бесконечно.

6. (а) Используя теорему 106.1, определить порядок кольца эндоморфизмов конечной p-группы.

(б) Показать, что если A — конечная p-группа порядка p^n, то порядок ее кольца эндоморфизмов не больше p^{n^2}.

7 (Длаб [2]). Используя теорему 106.1, представить кольцо эндоморфизмов делимой p-группы в виде кольца матриц над кольцом целых p-адических чисел. Показать, что в каждом столбце почти все элементы делятся на p^k для любого целого числа $k \geqslant 0$.

8. Доказать, что кольцо эндоморфизмов группы без кручения ранга $\mathfrak{m}$ может быть представлено $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$-матрицами с конечными столбцами и рациональными элементами.

9. Если координаты элемента $a \in A = \oplus A_i$ записаны в виде вектор-столбца $\mathbf{a}$, то для эндоморфизма α группы A вектор $\alpha\mathbf{a}$ совпадает с $[\alpha_{ji}]\,\mathbf{a}$.

10. Показать, что матрицы из теоремы 106.1 являются сходящимися по строкам; здесь элементы матриц рассматриваются как эндоморфизмы группы A.

11. Если $A = \oplus A_i$ и A_i — счетные группы, то при заданном прямом разложении группы A в каждом столбце матриц, представляющих эндоморфизмы группы A, имеется не более счетного числа ненулевых элементов.

12. Если C — плотная вполне характеристическая подгруппа редуцированной группы A, то кольцо $\mathrm{E}(A)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathrm{E}(C)$.

§ 107. Топологии колец эндоморфизмов

Кольца эндоморфизмов допускают различные топологии, которые определяются большей частью через соответствующие группы. Одна из этих топологий играет все возрастающую роль в некоторых вопросах теории колец эндоморфизмов. Поэтому мы дадим обзор ряда результатов, касающихся этой топологии.

Эта топология — так называемая *конечная топология* кольца $\mathrm{E}(A)$. Для конечного подмножества X группы A под *X-окрестностью* элемента $\alpha \in \mathrm{E}(A)$ будем понимать подмножество

$$U_X(\alpha) = \{\eta \in \mathrm{E}(A) \mid \eta x = \alpha x \quad \text{для всех } x \in X\}.$$

При этом определении $U_X(\alpha) = \bigcap_{x \in X} U_x(\alpha)$ и $U_X(\alpha) = \alpha + U_X(0)$. Значит, конечная топология может быть определена более удобным образом с помощью такой подбазы окрестностей нуля:

$$U_x = \{\eta \in \mathrm{E}(A) \mid \eta x = 0\} \quad \text{для всех } x \in A.$$

Эта топология, очевидно, хаусдорфова. Поскольку U_x — левые идеалы кольца $\mathrm{E}(A)$, непрерывность сложения и вычитания в $\mathrm{E}(A)$ очевидна. Кроме того, справедлива

Теорема 107.1. *Кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ абелевой группы A является полным топологическим кольцом в конечной топологии.*

Чтобы доказать непрерывность умножения в кольце, возьмем $\alpha, \beta \in \mathrm{E}(A)$, и пусть $\alpha\beta + U_x$ — окрестность элемента $\alpha\beta$. Так как U_x — левый идеал и $U_{\beta x}\beta \subseteq U_x$, то нужная непрерывность получается из включений

$$(\alpha + U_{\beta x})(\beta + U_x) \subseteq \alpha\beta + U_{\beta x}\beta + U_x \subseteq \alpha\beta + U_x.$$

Следовательно, $\mathrm{E}(A)$ — топологическое кольцо. Чтобы проверить его полноту, предположим, что $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ — сеть Коши. В рассматриваемом случае множество индексов I частично упорядочено с помощью порядка, дуального к порядку на конечных подмножествах группы A. Сеть Коши удовлетворяет следующему условию: если дано $x \in A$, то $\alpha_i - \alpha_j \in U_x$ при всех i, j, бóльших некоторого $i_0 \in I$.

Другими словами, при больших индексах $\alpha_i x$ — это один и тот же элемент группы A. Поэтому если определить αx как общее значение всех таких $\alpha_i x$, то $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ и $\alpha - \alpha_i \in U_x$ при всех таких i. ▮

Естественно, если группа является конечно порожденной, то конечная топология дискретна. Она дискретна также для жестких групп.

Бесконечный ряд $\sum_{j \in J} \alpha_j$ в $\mathsf{E}(A)$ сходится к α, если сеть $\{\sum_{j \in J_0} \alpha_j\}$, где J_0 пробегает все конечные подмножества множества J, упорядоченные по включению, имеет предел α. Это означает, что для всякого $a \in A$ почти всегда $\alpha_j a = 0$ и $\alpha a = \sum \alpha_j a$ [ср. Селе [17]].

Следует отметить, что в частном случае, когда A — редуцированная периодическая группа, конечная топология кольца $\mathsf{E}(A) = \mathsf{E}$ может быть определена вообще без ссылок на группу A. Если A — сепарабельная группа, то в силу следствия 27.9 подбаза окрестностей нуля для конечной топологии может быть задана как совокупность множеств U_x, где $x \in A$ пробегает только такие элементы, что $\langle x \rangle$ — прямое слагаемое группы A, имеющее порядок, равный степени простого числа. Здесь $U_x = \mathsf{E}(1 - \varepsilon)$ — это левый аннулятор проекции ε: $A \to \langle x \rangle$ в E. Если A — какая-то редуцированная периодическая группа, то для каждого $x \in A$ мы имеем проекцию ε: $A \to \langle y \rangle$ на прямое слагаемое $\langle y \rangle$ и эндоморфизм η группы A, для которых $x = \eta y$ и U_x — левый аннулятор элемента $\eta\varepsilon$ в E. Окончательно получаем

Предложение 107.2. *Конечную топологию кольца эндоморфизмов* E *редуцированной периодической группы можно определить, взяв в качестве подбазы окрестностей нуля совокупность левых аннуляторов элементов* $\eta\varepsilon$, *где* $\eta \in \mathsf{E}$ *и* ε — *примитивный идемпотент.*

Если группа сепарабельна, то достаточно взять лишь левые аннуляторы примитивных идемпотентов. ▮

Пусть A — некоторая p-группа и $\mathsf{E} = \mathsf{E}(A)$ — ее кольцо эндоморфизмов. Обозначим через E_0 левый идеал кольца E, порожденный его примитивными идемпотентами конечного порядка

Предложение 107.3 (Либерт [4]). *Если* A — *сепарабельная* p-*группа, то в конечной топологии* E_0 *плотно в* E *и* E — *пополнение кольца* E_0.

Пусть $\sigma \in \mathsf{E}$ и $a_1, \ldots, a_n$ — конечное подмножество группы A. Это подмножество мы можем вложить в конечное слагаемое G группы A. Для установления плотности E_0 в E достаточно показать, что множество $\mathsf{E}_0 \cap (\sigma + U_G)$ непусто. Если π: $A \to G$ — проекция, то $1 - \pi \in U_G$. Так как U_G — левый идеал в E, то $\sigma(1 - \pi) \in U_G$ и, таким образом, элемент $\sigma\pi = \sigma - \sigma(1 - \pi)$ лежит в пересечении E_0 с $\sigma + U_G$. Тот факт, что E — пополнение кольца E_0 в конечной топологии, вытекает из теоремы 107.1. ▮

Если A — сепарабельная группа без кручения, то, как и в случае периодических групп, мы можем доказать, что конечную топологию кольца $\mathsf{E}(A)$ можно

определить с помощью взятия левых аннуляторов примитивных идемпотентов, и если обозначить через E_0 левый идеал, порожденный примитивными идемпотентами кольца E, то E будет пополнением кольца E_0.

Так как всегда особый интерес представляет компактность, посмотрим, когда кольцо $\mathsf{E}(A)$ компактно в конечной топологии.

Прежде чем сформулировать относящийся сюда результат, введем следующее понятие. Назовем *орбитой* элемента $x \in A$ вполне характеристическую подгруппу

$$O_x = \{\eta x \mid \eta \in \mathsf{E}(A)\}.$$

Тогда $\eta \mapsto \eta x$ будет гомоморфным отображением группы $\mathsf{E}(A)$ на группу O_x с ядром U_x и, следовательно, будет иметь место групповой изоморфизм

$$\mathsf{E}(A)/U_x \cong O_x.$$

Предложение 107.4. *Кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ группы A компактно в конечной топологии тогда и только тогда, когда A — периодическая группа, p-компоненты которой — конечные прямые суммы коциклических групп.*

В силу полноты кольца $\mathsf{E}(A)$ легко проверить, что для компактности $\mathsf{E}(A)$ необходимо и достаточно, чтобы все U_x имели конечный индекс в $\mathsf{E}(A)$ или, эквивалентно, чтобы каждый элемент из A имел конечную орбиту.

Предположим сначала, что кольцо $\mathsf{E}(A)$ компактно. Так как $\langle x \rangle$ — подгруппа в O_x, группа A должна быть периодической. По следствию 27.3 каждая ненулевая p-компонента A_p группы A имеет коциклическое прямое слагаемое. Пусть C_p — одно из них, имеющее минимальный порядок. Тогда орбитой его кообразующего является цоколь группы A_p, откуда следует, что A_p — группа с конечным цоколем. В силу теоремы 25.1 это означает, что A_p — конечная прямая сумма коциклических групп.

Обратно, если $A = \bigoplus_p A_p$, где p-компоненты A_p являются конечно копорожденными группами, то $A[n]$ для любого целого числа n — конечная группа. Заметим, что $O_x \subseteq A[n]$, если $nx = 0$. Поэтому все U_x имеют конечный индекс в $\mathsf{E}(A)$ и кольцо $\mathsf{E}(A)$ компактно в конечной топологии. ∎

Напомним, что в теореме 46.1 была установлена полнота групп $\mathrm{Hom}(A, C)$ в Z-адической топологии для периодических групп A. Так как всякое кольцевое умножение тривиальным образом непрерывно в Z-адической топологии, то справедливо такое утверждение:

Предложение 107.5. *Кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ периодической группы A является полным топологическим кольцом в своей Z-адической топологии.* ∎

Остановимся на некоторое время, чтобы сравнить конечную и Z-адическую топологии периодической группы A. Если дан элемент $x \in A$, то существует такое

целое число $n > 0$, что $nx = 0$. Поэтому $n\mathsf{E}(A) \subseteq U_x$ и множества U_x, открытые в конечной топологии, являются открытыми в Z-адической топологии. Другими словами, *Z-адическая топология тоньше конечной топологии* [только для периодических групп!].

Упражнения

1. Каковы те топологии кольца целых p-адических чисел, которые получаются с помощью конечных топологий колец эндоморфизмов групп $Z(p^\infty)$ и J_p?

2. Конечная топология кольца эндоморфизмов группы без кручения конечного ранга всегда дискретна.

3. Пусть A — такая бесконечная группа, что $|\mathsf{E}(A)| > |A|$. Показать, что кольцо $\mathsf{E}(A)$ не может быть дискретным в конечной топологии. [*Указание*: индекс U_x в $\mathsf{E}(A)$ не больше $|A|$.]

4. (а) Если группа A полна в Z-адической топологии, то $\mathsf{E}(A)$ — полное топологическое кольцо в Z-адической топологии.

(б) То же утверждение справедливо, если A — периодически полная группа.

5. Пусть A — сепарабельная p-группа с базисной подгруппой B. Показать, что в конечной топологии $\mathsf{E}(A)$ — замкнутое подкольцо кольца $\mathsf{E}(\bar{B})$.

6. (а) Пусть элементы $\rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots, \in \mathsf{E} = \mathsf{E}(A)$ таковы, что

(1) $\mathsf{E}\rho_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathsf{E}\rho_n \supseteq \ldots$ — убывающая цепь;

(2) объединение цепи $\operatorname{Ker}\rho_1 \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker}\rho_n \subseteq \ldots$ совпадает с A.

Показать, что E — полная группа в топологии, где в качестве базы окрестностей нуля взяты $\mathsf{E}\rho_n$. Если элементы ρ_n лежат в центре кольца E, то E — топологическое кольцо в той же топологии. [*Указание*: следовать теореме 46.1.]

(б) Распространить утверждение (а) на случай, когда $\{\mathsf{E}\rho_i\}$ — система, направленная вниз относительно включения.

(в) Применить (а) и (б) к частным случаям, например, когда ρ_n — это умножение на p^n, ρ_j — проекция группы $\bigoplus_i A_i$ на прямую сумму почти всех A_i и т. д.

7. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — система подгрупп группы A, направленная вверх относительно включения и такая, что объединение всех A_i совпадает с A. Возьмем топологию в E, для которой

$$\mathsf{L}_i = \{\eta \in \mathsf{E} \mid \eta A_i = 0\}$$

служат базой окрестностей нуля. Показать, что E — полная группа в этой топологии, причем если A_i — вполне характеристические подгруппы группы A, то E — топологическое кольцо. [Это обобщает упр. 6.]

8 (Пирс [3]). Пусть A — некоторая p-группа, и пусть $A_n = A[p^n]$. Тогда E — полное топологическое кольцо в топологии упр. 7.

9 (Либерт [4]). Пусть A — некоторая p-группа, а E и E_0 — те же, что в тексте, причем на них введена конечная топология. Тогда

(а) E_0 плотно в периодической части кольца E;

(б) E_0 плотно в E тогда и только тогда, когда $A^1 = 0$.

§ 108. Кольца эндоморфизмов периодических групп

Отличительной чертой периодических групп является то, что они имеют много эндоморфизмов. Кроме того, они обладают достаточным запасом идемпотентных эндоморфизмов. Интересно посмотреть, до какой степени эндоморфизмы определяют группу, или, точнее, следует ли из изоморфизма колец эндоморфизмов изоморфизм самих групп. Мы покажем, что это действительно так. Фактически будет доказано даже несколько больше:

Теорема 108.1. (Бэр [9], Капланский [2]). *Если A и C — периодические группы, кольца эндоморфизмов которых изоморфны, то всякий изоморфизм ψ между $\mathsf{E}(A)$ и $\mathsf{E}(C)$ индуцируется некоторым групповым изоморфизмом $\varphi\colon A \to C$, т. е. $\psi\colon \eta \mapsto \varphi\eta\varphi^{-1}$.*

Доказательство сразу сводится к случаю p-групп. Действительно, $\mathsf{E}(A) = \prod \mathsf{E}(A_p)$, $\mathsf{E}(C) = \prod \mathsf{E}(C_p)$, где A_p и C_p являются p-компонентами групп A и C соответственно, и всякий кольцевой изоморфизм между $\mathsf{E}(A)$ и $\mathsf{E}(C)$ должен переводить $\bigcap_{(n,\,p)=1} n\mathsf{E}(A) = \mathsf{E}(A_p)$ в $\mathsf{E}(C_p)$. Поэтому можно предполагать, что A и C являются p-группами. Для $\eta \in \mathsf{E}(A)$ будем просто писать $\psi(\eta) = \eta^*$.

Перед тем как начать доказательство, заметим, что если группа A коциклическая, то из § 106, п. е), сразу следует, что группа C также является неразложимой, а значит, коциклической. Примеры 2 и 3 из § 106 показывают, что тогда обязательно $C \cong A$.

Доказательство разобьем на три случая.

1. Если группа A ограниченная, то она содержит элемент g максимального порядка p^k. Из леммы 15.1 мы знаем, что $\langle g\rangle$ служит для A прямым слагаемым. Если $\varepsilon\colon A \to \langle g\rangle$ — проекция, то ε^* отображает группу C на прямое слагаемое, которое снова должно быть циклической группой $\langle h\rangle$ порядка p^k [ср. § 106, п. г), и предыдущее замечание]. Для произвольного элемента $a \in A$ выберем эндоморфизм η группы A, при котором $a = \eta g$, и определим $\varphi\colon A \to C$ так, что $\varphi\colon a \mapsto \eta^* h$. Это определение не зависит от выбора эндоморфизма η, так как если $a = \eta_1 g$, то $(\eta - \eta_1)\, g = 0$ и $(\eta - \eta_1)\, \varepsilon = 0$, откуда $(\eta^* - \eta_1^*)\, \varepsilon^* = 0$ и $(\eta^* - \eta_1^*)\, h = 0$. Легко видеть, что отображение φ взаимно однозначно, сохраняет операцию сложения и является отображением на все C, т. е. φ — изоморфизм. Если теперь $\xi \in \mathsf{E}(A)$, то, представив элемент $c = \varphi a$ в виде $c = \eta^* h$ для некоторого $\eta \in \mathsf{E}(A)$, получим $\xi^* c = \xi^*\eta^* h = \varphi(\xi\eta g) = \varphi\xi a = \varphi\xi\varphi^{-1} c$, т. е. $\xi^* = \varphi\xi\varphi^{-1}$, откуда следует, что φ индуцирует ψ.

2. Если $A = B \oplus D$, где B — ограниченная, а D — ненулевая делимая группы, то пусть $\langle g \rangle$ — циклическое прямое слагаемое максимального порядка p^k в группе B, а $D' = \langle d_1, \ldots, d_n, \ldots \rangle$, где $pd_1 = 0$, $pd_{n+1} = d_n$ при $n \geqslant 1$,— квазициклическое прямое слагаемое группы D. Пусть ε: $A \to \langle g \rangle$ и π: $A \to D'$ — проекции, и пусть ε^*: $C \to \langle h \rangle = Z(p^k)$, π^*: $C \to E' = \langle e_1, \ldots, e_n, \ldots \rangle$, где $pe_1 = 0$, $pe_{n+1} = e_n$. Элемент $a \in A$ запишем в виде $a = a_1 + a_2$ ($a_1 \in B$, $a_2 \in D$) и возьмем такой эндоморфизм η группы A, что $\eta g = a_1$, $\eta d_n = a_2$ при некотором n. Затем положим $\varphi a = \eta^* (h + e_n)$. Чтобы доказать, что φa не зависит от η и n, возьмем такое $\eta_1 \in \mathbf{E}(A)$, что $\eta_1 g = a_1$, $\eta_1 d_m = a_2$ и $m \geqslant n$. Тогда $(\eta - \eta_1)\varepsilon = 0$ и $(p^{m-n}\eta - \eta_1) d_m = 0$, откуда $\zeta = (p^{m-n}\eta - \eta_1)\pi$ аннулирует $D'[p^m]$. Но для квазициклической группы D' это означает, что гомоморфизм ζ делится на p^m. Тогда ζ^* также делится на p^m. Следовательно, $\zeta^* e_m = 0$. Мы получаем, что $\eta^* h = \eta_1^* h$ и $\eta^* e_n = p^{m-n}\eta^* e_m = \eta_1^* e_m$, откуда $\eta^* (h + e_n) = \eta_1^* (h + e_m)$. Непосредственно можно проверить, что φ биективно и сохраняет операцию сложения. Следовательно, φ — это изоморфизм $A \to C$. Тот факт, что φ индуцирует ψ, проверяется так же, как в п. 1.

3. Осталось еще рассмотреть случай, когда группа A имеет неограниченную базисную подгруппу. Тогда существуют такие разложения

$$A = \langle a_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_k \rangle \oplus A_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

что $A_k = \langle a_{k+1} \rangle \oplus A_{k+1}$ и $o(a_k) = p^{n_k}$, где $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_k < \ldots$. Пусть ε_k — проекция $A \to \langle a_k \rangle$ и ξ_{jk} $(j \neq k)$ — эндоморфизм группы A, отображающий a_k в a_j или в $p^{n_j - n_k} a_j$ в зависимости от того, $j < k$ или $j > k$, и переводящий прямое слагаемое, дополнительное к $\langle a_k \rangle$ [в указанном выше разложении группы A], в 0. В этом случае

1) ε_k — попарно ортогональные идемпотенты,
2) $\xi_{jk}\varepsilon_k = \xi_{jk} = \varepsilon_j \xi_{jk}$ при всех $j \neq k$;
3) $\xi_{kj}\xi_{jk} = p^{|n_j - n_k|}\varepsilon_k$ при всех $j \neq k$;
4) $\xi_{ij}\xi_{jk} = \xi_{ik}$, если $i < j < k$ или $i > j > k$.

Эндоморфизмы ε_k^* и ξ_{jk}^* группы C также удовлетворяют условиям 1)—4). В силу § 106, п. г), подгруппы $\varepsilon_k^* C$ — циклические прямые слагаемые группы C тех же порядков, что и $\varepsilon_k A$. В силу свойства 2) $\xi_{k,\,k+1}^*$ отображает $\varepsilon_{k+1}^* C$ в $\varepsilon_k^* C$. Положим $\varepsilon_k^* C = \langle c_k \rangle$ и покажем, что образующие c_k можно выбрать так, чтобы $\xi_{k,\,k+1}^* c_{k+1} = c_k$ для всех k. В самом деле, если $c_1, \ldots, c_k$ уже выбраны и c'_{k+1} порождает $\varepsilon_{k+1}^* C$, то $\xi_{k,\,k+1}^* c'_{k+1} = tc_k$ для некоторого $t \in \mathbf{Z}$. Следовательно, из условия 3) имеем $\xi_{k+1,\,k}^* tc_k = p^{n_{k+1} - n_k} c'_{k+1}$ и сравнение порядков элементов показывает, что $(p, t) = 1$. Это означает, что элемент $c_{k+1} = sc'_{k+1}$, где $st \equiv 1 \bmod p^{n_{k+1}}$, удовлетворяет условию $\xi_{k,\,k+1}^* c_{k+1} = c_k$. Теперь по свойству 4) имеем $\xi_{jk}^* c_k = c_j$ для всех $j < k$.

Для завершения доказательства в случае 3 возьмем произвольный элемент $a \in A$ и выберем такое $\eta \in \mathbf{E}(A)$, что $\eta a_k = a$ при некотором k. Пусть φ: $a \mapsto \eta^* c_k$. Отображение φ определено корректно,

так как если $\eta_1 a_j = a$ и $j \geqslant k$, то $(\eta\xi_{kj} - \eta_1)\,\varepsilon_j = 0$, откуда $(\eta^*\xi^*_{kj} - \eta^*_1)\,\varepsilon^*_j = 0$, т. е. $\eta^* c_k = \eta^*_1 c_j$. В заключение опять непосредственно проверяется, что φ — изоморфизм, индуцирующий ψ. ∎

Капланский [3] заметил, что последняя теорема может быть распространена на примарные модули над полными кольцами дискретного нормирования. Однако если не предполагать модули примарными, то эта теорема уже перестает быть верной [см. упр. 1]. Можно ожидать, что получится некоторое обобщение этой теоремы, если снабдить кольца эндоморфизмов конечной топологией.

Из теоремы 108.1 непосредственно вытекает замечательный факт:

Следствие 108.2 (Бэр [9]). *Всякий автоморфизм кольца эндоморфизмов периодической группы является внутренним.*

В самом деле, если $\alpha\colon \mathsf{E}(A) \to \mathsf{E}(A)$ — автоморфизм, то по теореме 108.1 он должен иметь вид $\alpha\colon \eta \mapsto \varphi\eta\varphi^{-1}$, где φ — некоторый автоморфизм группы A [т. е. обратимый элемент кольца $\mathsf{E}(A)$]. ∎

Теперь найдем центр кольца эндоморфизмов периодической группы. Общий случай сразу сводится к случаю p-групп, для которых формулировка результата выглядит красивее.

Теорема 108.3 (Шарль [1], Капланский [3]). *Центр кольца эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ любой p-группы A состоит из умножений на целые p-адические числа или на вычеты по модулю p^k в зависимости от того, является ли группа A неограниченной или p^k служит наименьшей верхней гранью порядков ее элементов.*

Ясно, что умножения на целые p-адические числа лежат в центре кольца $\mathsf{E}(A)$.

Пусть эндоморфизм γ принадлежит центру кольца $\mathsf{E}(A)$. Если B — прямое слагаемое группы A и $\varepsilon\colon A \to B$ — проекция, то $\gamma B = \gamma\varepsilon B = \varepsilon\gamma B \subseteq B$, т. е. γ и отображает всякое прямое слагаемое группы A в себя. В частности, γ действует как умножение на целое p-адическое число ρ и как умножение на целое число m, рассматриваемое по модулю p^k, на $Z(p^\infty)$ и на прямом слагаемом $\langle g \rangle$ порядка p^k группы A соответственно. Дальнейшее доказательство разделим на такие же части, как в теореме 108.1, и будем использовать те же обозначения, что и там.

1. Пусть элемент $g \in A$ имеет максимальный порядок p^k и $\gamma g = mg$. Если $a = \eta g$, то $\gamma a = \gamma\eta g = \eta\gamma g = \eta m g = ma$. Следовательно, γ действительно представляет собой умножение на число m, рассматриваемое по модулю p^k.

2. Пусть эндоморфизм γ действует как умножение на целое p-адическое число ρ на D' и как умножение на целое число m на B. Для любого элемента $d \in D$ существует такое $\eta \in \mathsf{E}(A)$, что $d = \eta d_n$ при некотором n. Следовательно, $\gamma d = \gamma\eta d_n = \eta\gamma d_n = \eta\rho d_n = \rho d$. Это означает, что γ действует как умножение на ρ на всей группе D. Некоторый эндоморфизм $\xi \in \mathsf{E}(A)$ отображает элемент $g \in B$ в $d_k \in D$, откуда $\gamma d_k = \gamma\xi g = \xi\gamma g = m d_k$ и $\rho \equiv m \bmod p^k$. Следовательно, эндоморфизм γ представляет собой умножение на ρ на всей группе A.

3. Мы знаем, что $\gamma a_k = m_k a_k$ для некоторых $m_k \in \mathbf{Z}$ и всех k. При $j > k$ из $m_k a_k = \gamma a_k = \gamma \xi_{kj} a_j = \xi_{kj} \gamma a_j = m_j a_k$ следует, что $m_k \equiv m_j \bmod o(a_k)$. Значит, числа m_k сходятся к целому p-адическому числу ρ, причем $\gamma a_k = \rho a_k$ при всех k. Если $a = \eta a_k$, то $\gamma a = \gamma \eta a_k = \rho \eta a_k = \rho a$, и теорема доказана. ∎

Упражнения

1. Показать, что теорему 108.1 нельзя распространить на p-адические модули. [*Указание*: сравнить J_p и $Z(p^\infty)$.]

2. (а) Эндоморфизмы α периодической группы A, для которых $\operatorname{Im} \alpha$ — конечно копорожденная группа, образуют в кольце $\mathsf{E}(A)$ идеал $\mathsf{F}(A)$.

(б) Идеал $\mathsf{F}(A)$ может быть охарактеризован внутри $\mathsf{E}(A)$ как идеал, порожденный примитивными идемпотентами кольца $\mathsf{E}(A)$.

3. (а) Проанализировав доказательство теоремы 108.1, проверить, что две периодические группы A и C непременно изоморфны, если $\mathsf{F}(A) \cong \mathsf{F}(C)$.

(б) (Э. Погань). Распространить утверждение (а) на другие идеалы колец эндоморфизмов [например, состоящие из эндоморфизмов со счетными образами].

4. (а) Если A — периодическая группа и A_p — ее p-компоненты, то центр кольца $\mathsf{E}(A)$ равен произведению центров колец $\mathsf{E}(A_p)$.

(б) Распространить утверждение (а) на случай, когда $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i — вполне характеристические подгруппы группы A.

5 (Леви [2]). Описать эндоморфизмы, отображающие каждую подгруппу в себя.

6 (Селе и Сендрей [1]). Кольцо эндоморфизмов периодической группы A коммутативно тогда и только тогда, когда A — подгруппа группы Q/Z.

7. Пусть A — урегулированная копериодическая группа и T — ее периодическая часть. Показать, что кольца $\mathsf{E}(A)$ и $\mathsf{E}(T)$ можно естественным образом отождествить. [*Указание*: всякий эндоморфизм $\eta \in \mathsf{E}(T)$ однозначно продолжается до эндоморфизма $\bar{\eta} \in \mathsf{E}(A)$.]

8. Используя упр. 7, доказать теорему 108.1 для урегулированных копериодических групп A и C.

9. (а) Периодическая группа A является конечно порожденным $\mathsf{E}(A)$-модулем тогда и только тогда, когда она ограниченная. В противном случае она — счетно порожденный $\mathsf{E}(A)$-модуль.

(б) Если A — некоторая p-группа, то она является локально циклическим левым $\mathsf{E}(A)$-модулем в том смысле, что для любых $a, b \in A$ существует такой элемент $c \in A$, что $a, b \in \mathsf{E}(A)\, c$.

10. (а) Доказать, что если для некоторой группы A кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ порождается как кольцо автоморфизмами, то всякая характеристическая подгруппа группы A является вполне характеристической.

(б) Показать, что кольцо эндоморфизмов группы из примера в § 67 не порождается группой автоморфизмов.

§ 109. Кольца эндоморфизмов сепарабельных p-групп

Исследуя кольца эндоморфизмов, обычно стараются найти условия на абстрактное кольцо, при которых оно является кольцом эндоморфизмов некоторой абелевой группы. Видимо, найти необходимые и достаточные условия для этого в общем случае — проблема достаточно трудная, но в отдельных частных случаях известен вполне удовлетворительный ответ на поставленный вопрос. В настоящем параграфе мы рассмотрим указанную проблему для случая сепарабельных p-групп, тогда как следующий параграф будет посвящен случаю групп без кручения.

Наша задача состоит, естественно, в том, чтобы найти достаточное количество свойств колец эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ сепарабельных p-групп A, чтобы всеми этими свойствами одновременно могли обладать только кольца эндоморфизмов. Излишне говорить, что получающиеся условия должны носить теоретико-кольцевой характер: хотя они являются следствиями некоторых свойств лежащей в основе группы A, их нужно уметь восстановить, зная только кольцевую структуру кольца $\mathsf{E}(A)$. Не удивительно, что основным средством для наших исследований оказываются проекции на циклические прямые слагаемые: их можно охарактеризовать как примитивные идемпотенты кольца $\mathsf{E}(A)$.

Пусть A — сепарабельная p-группа, $\mathsf{E} = \mathsf{E}(A)$ — ее кольцо эндоморфизмов. Обозначим через E_0 левый идеал кольца E, порожденный его примитивными идемпотентами. Так как примитивные идемпотенты соответствуют неразложимым прямым слагаемым, эти идемпотенты в рассматриваемом случае имеют конечный порядок.

1) *Правый аннулятор кольца* E_0 *в* E *равен нулю.*

Если η — правый аннулятор кольца E_0, то $\operatorname{Im}\eta$ имеет тривиальную проекцию на любое циклическое прямое слагаемое группы A. Следовательно, $\operatorname{Im}\eta \subseteq A^1 = 0$.

2) *Если* π, $\rho \in \mathsf{E}$ — *примитивные идемпотенты, то* $\pi\mathsf{E}\rho$ — *циклическая группа порядка* p^k *для некоторого* k [*простое число* p *фиксировано*].

Как в § 106, п. б), непосредственно видно, что группу $\pi\mathsf{E}\rho$ можно рассматривать как $\operatorname{Hom}(\rho A, \pi A)$. Здесь ρA и πA — циклические группы, порядки которых — степени простого числа, поэтому и $\pi\mathsf{E}\rho$ — такая же группа.

3) *Если* π, ρ — *примитивные идемпотенты кольца* E *и* $o(\pi) \leqslant o(\rho)$, *то левый аннулятор кольца* $\mathsf{E}\rho$ *содержится в левом аннуляторе кольца* $\mathsf{E}\pi$ *и* $\mathsf{E}\pi\mathsf{E}\rho = \mathsf{E}\rho\,[o(\pi)]$.

Положим $\pi A = \langle a \rangle$, $\rho A = \langle b \rangle$ и выберем такое $\eta \in \mathsf{E}$, что $\eta b = a$. Если для $\xi \in \mathsf{E}$ выполнено $\xi\mathsf{E}\rho = 0$, то $(\xi\mathsf{E})\,b = 0$, откуда $\xi\mathsf{E}a = \xi\mathsf{E}(\eta b) = 0$, т. е. ξ аннулирует также $\mathsf{E}\pi$. Включение $\mathsf{E}\pi\mathsf{E}\rho \subseteq$

$\subseteq \mathsf{E}\rho\,[o(\pi)]$ очевидно. Пусть $\chi \in \mathsf{E}\rho\,[o(\pi)]$. Тогда $\chi b \in A\,[o(\pi)]$ и $\lambda a = \chi b$ для некоторого $\lambda \in \mathsf{E}\pi$. Теперь $\chi b = \lambda\eta b$ влечет за собой $\chi = \lambda\eta \in \mathsf{E}\pi\mathsf{E}\rho$.

4) *Если* $\mathsf{E}_0 = \mathsf{K} \oplus \mathsf{L}$, *где* K, L — *правые идеалы и* $\mathsf{K} \neq 0$, *то* $\tau\mathsf{L} = 0$ *для некоторого примитивного идемпотента* $\tau \in \mathsf{E}_0$.

Очевидно, $A = \mathsf{E}_0 A = \mathsf{K}A + \mathsf{L}A$ (где $\mathsf{K}A$ — множество всех конечных сумм вида $\sum \varkappa_i a_i$, $\varkappa_i \in \mathsf{K}$, $a_i \in A$). Пусть $x \in \mathsf{K}A \cap \mathsf{L}A$, и пусть $x = \sum \varkappa_i a_i = \sum \lambda_j b_j$ ($\lambda_j \in \mathsf{L}$, $b_j \in A$). Если $A = \langle c \rangle \oplus C$, где $o(c) \geqslant \max\{o(a_i), o(b_j)\}$, и если для ξ_i, $\eta_j \in \mathsf{E}$ выполняются равенства $a_i = \xi_i c$, $b_j = \eta_j c$, $\xi_i C = \eta_j C = 0$, то $\sum \varkappa_i \xi_i c = x = \sum \lambda_j \eta_j c$, откуда $\sum \varkappa_i \xi_i = \sum \lambda_j \eta_j \in \mathsf{K} \cap \mathsf{L} = 0$. Следовательно, $x = 0$ и $A = \mathsf{K}A \oplus \mathsf{L}A$. Здесь $\mathsf{K}A \neq 0$, и в качестве τ можно взять проекцию на циклическое слагаемое группы $\mathsf{K}A$.

5) E *служит пополнением для* E_0 *в топологии, в которой в качестве подбазы окрестностей нуля в* E_0 *взяты левые аннуляторы примитивных идемпотентов из* E_0.

В силу предложений 107.2 и 107.3 доказывать нечего. [Напомним, что наше определение полноты включало требование хаусдорфовости, см. § 13.]

Мы хотим показать, что свойства 1) — 5), взятые вместе, характеризуют кольца эндоморфизмов сепарабельных p-групп. Следующий результат был получен в немного другой форме Либертом [4].

Теорема 109.1. *Ассоциативное кольцо* E *с единицей изоморфно кольцу эндоморфизмов* $\mathsf{E}(A)$ *некоторой сепарабельной* p*-группы* A *тогда и только тогда, когда оно обладает свойствами* 1) — 5).

а) Пусть кольцо $\mathsf{E} \neq 0$ обладает свойствами 1) — 5). Тогда $\mathsf{E}_0 \neq 0$ и E содержит примитивные идемпотенты. Если $\pi \in \mathsf{E}$ — один из них, то свойство 2) и включение $\pi \in \pi\mathsf{E}\pi$ дают $o(\pi) = p^k$ при некотором k. Таким образом, примитивные идемпотенты кольца E имеют конечный порядок.

б) Пусть π, ρ — примитивные идемпотенты кольца E и $o(\pi) = p^k \leqslant o(\rho)$. В силу свойства 2) мы можем написать $\pi\mathsf{E}\rho = \langle \xi \rangle$ для некоторого $\xi \in \mathsf{E}$. Используя это ξ, определим φ: $\mathsf{E}\pi \to \mathsf{E}\rho$ как отображение $\eta \mapsto \eta\xi$ ($\eta \in \mathsf{E}\pi$). Очевидно, это E — гомоморфизм левого идеала $\mathsf{E}\pi$ в левый идеал $\mathsf{E}\rho$. Это даже мономорфизм, так как если $\eta\xi = 0$, то $\eta\mathsf{E}\rho = 0$, откуда по свойству 3) также $\eta\mathsf{E}\pi = 0$; в частности, $\eta = \eta\pi = 0$.

в) Выберем теперь такую последовательность $\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ примитивных идемпотентов кольца E, что $o(\pi_1) < \ldots < o(\pi_n) < \ldots$; эту последовательность можно выбрать бесконечной, если только порядки примитивных идемпотентов кольца E не ограничены в совокупности. Как в предыдущем пункте, положим $\pi_n\mathsf{E}\pi_{n+1} = \langle \xi_n \rangle$

и для любого n определим мономорфизм

$$\varphi_n\colon \mathsf{E}\pi_n \to \mathsf{E}\pi_{n+1}$$

как отображение $\eta \mapsto \eta\xi_n$. С помощью спектра E-модулей $\mathsf{E}\pi_n$ и E-мономорфизмов φ_n, мы можем определить группу A как E-модуль

$$A = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\pi_n.$$

Так как модули $\mathsf{E}\pi_n$ аннулируются числом $o(\pi_n)$, то A есть p-группа; она ограниченная тогда и только тогда, когда последовательность $\{\pi_n\}$ конечна. Канонический гомоморфизм группы $\mathsf{E}\pi_n$ в предельную группу является мономорфизмом, который отождествляет $\mathsf{E}\pi_n$ с подмодулем модуля A, причем A — просто теоретико-множественное объединение этих подмодулей. Так как отображения φ_n являются E-гомоморфизмами, каждый элемент $\xi \in \mathsf{E}$ порождает эндоморфизм группы A. Здесь $\xi A = 0$ только в случае, когда $\xi\mathsf{E}\pi_n = 0$ при любом n. Но тогда по свойству 3) $\xi\mathsf{E}\rho = 0$ для любого примитивного идемпотента $\rho \in \mathsf{E}$, а по свойству хаусдорфовости из 5) имеем $\xi = 0$. Следовательно, кольцо E изоморфно подкольцу кольца эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ группы A.

г) Следующий шаг доказательства состоит в проверке того, что кольца E и $\mathsf{E}(A)$ имеют одинаковые примитивные идемпотенты. Если ρ — примитивный идемпотент кольца E, то он должен быть примитивным и в $\mathsf{E}(A)$, так как группа $\rho A = \varinjlim \rho\mathsf{E}\pi_n$ как предел прямого спектра циклических p-групп, порядки которых не больше $o(\rho)$, сама является циклической группой. С другой стороны, если σ — примитивный идемпотент порядка p^m в кольце $\mathsf{E}(A)$, то $A = \sigma A \oplus B$, где $B = \operatorname{Ker}\sigma$. Множества $\mathsf{H}(\sigma A)$ и $\mathsf{H}(B)$ всех элементов $\eta \in \mathsf{E}_0$, для которых $\eta A \subseteq \sigma A$ и $\eta A \subseteq B$ соответственно, являются такими правыми идеалами кольца E_0, что $\mathsf{E}_0 = \mathsf{H}(\sigma A) \oplus \mathsf{H}(B)$. По свойству 4) для некоторого примитивного идемпотента $\tau \in \mathsf{E}_0$ имеем $\tau\mathsf{H}(B) = 0$. Используя тот факт, что порядки примитивных идемпотентов кольца $\mathsf{E}(A)$ не могут быть больше порядков примитивных идемпотентов кольца E_0, получаем, что $\tau B = 0$. Очевидно, из $A = \tau A \oplus \operatorname{Ker}\tau$ и $B \subseteq \operatorname{Ker}\tau$ следует, что $B = \operatorname{Ker}\tau$. Из леммы 9.5 имеем $\sigma = \tau - (1-\tau)\varphi\tau$ для некоторого $\varphi \in \mathsf{E}(A)$. Но $\mathsf{E}(A)\tau = \mathsf{E}\tau$, так как по условию 3) справедливо равенство $\mathsf{E}\tau\mathsf{E}\pi_n = \mathsf{E}\pi_n[o(\tau)]$, если $o(\tau) \leqslant o(\pi_n)$, а последнюю группу можно отождествить с $A[o(\tau)]$. Следовательно, $\varphi\tau \in \mathsf{E}\tau$, и σ принадлежит E.

д) Чтобы проверить, что в кольце $\mathsf{E}(A)$ нет других примитивных идемпотентов [т. е. что группа A редуцированная] и что, более того, группа A сепарабельна, заметим, что если элемент $a \in A^1$ представлен элементом $\eta\pi_n \in \mathsf{E}\pi_n$, то для всех примитивных идемпотентов $\rho \in \mathsf{E}(A)$, имеющих конечный порядок, должно быть $\rho a = \rho\eta\pi_n = 0$. Так как $\rho \in \mathsf{E}_0$, то из условия 1) имеем $\eta\pi_n = 0$, т. е. $A^1 = 0$.

е) Для завершения доказательства обратимся к условию 5), где утверждается, что E — пополнение E_0 в конечной топологии кольца E_0. В силу сепарабельности группы A кольцо $\mathsf{E}(A)$ также является пополнением кольца E в этой топологии, и из $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{E}(A)$ следует, что $\mathsf{E}(A) = \mathsf{E}$. ■

Упражнения

1 (Шода [1], Бэр [9]). (а) Для подмножества S группы A положим $\Lambda(S) = \{\eta \in \mathsf{E}(A) \mid \eta S = 0\}$ и $P(S) = \{\eta \in \mathsf{E}(A) \mid \eta A \subseteq S\}$. Показать, что это односторонние идеалы, для которых $\Lambda(S)P(S) = 0$.

(б) Если Σ — подмножество кольца $\mathsf{E}(A)$, то $N(\Sigma) = \{a \in A \mid \Sigma a = 0\}$ — такая подгруппа группы A, что $\Lambda(\Sigma A)$ — левый, а $P(N(\Sigma))$ — правый аннуляторы множества Σ в кольце $\mathsf{E}(A)$.

2 (Либерт [1]). Пусть E — такое конечное кольцо с единицей, что $p^k\mathsf{E} = 0$, но $p^{k-1}\mathsf{E} \neq 0$. Тогда кольцо E изоморфно кольцу эндоморфизмов конечной группы A в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

(1) кольцо E обладает антиавтоморфизмом;

(2) для любого примитивного идемпотента ρ кольца E справедливо равенство $\rho\mathsf{E}\rho = \langle\rho\rangle$;

(3) пересечения $p^i\mathsf{E} \cap \Lambda(\mathsf{E}[p^{k-1}])$, где $i = 0, \ldots, k$, являются единственными идеалами кольца E, содержащимися в его правом цоколе [равном объединению всех его минимальных правых идеалов].

3 (Либерт [2]). (а) Если A — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^k и $A = B \oplus C$, где $r(B) \leqslant r(C)$, то всякий эндоморфизм φ группы A, для которого $\varphi C = 0$, содержится в подкольце $\mathsf{E}_0(A)$ кольца $\mathsf{E}(A)$, порожденном идемпотентами кольца $\mathsf{E}(A)$.

(б) Если $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и для любого i справедливо $\mathsf{E}_0(A_i) = \mathsf{E}(A_i)$, то $\mathsf{E}_0(A) = \mathsf{E}(A)$.

(в) Вывести отсюда, что кольцо эндоморфизмов ограниченной группы порождается своими идемпотентами.

4. Охарактеризовать кольцо эндоморфизмов делимой p-группы конечного ранга.

5. Если A — редуцированная p-группа, то множество всех левых аннуляторов примитивных идемпотентов совпадает с $P(A^1)$ [ср. упр. 1].

6. Пусть $A = C \oplus D$, где C — редуцированная, а D — делимая p-группы.

(а) Примитивные идемпотенты бесконечного порядка кольца $\mathsf{E}(A)$ порождают левый идеал, изоморфный кольцу $\mathsf{E}(D)$.

(б) Факторкольцо кольца $\mathsf{E}(A)$ по идеалу, порожденному примитивными идемпотентами бесконечного порядка, изоморфно кольцу $\mathsf{E}(C)$.

§ 110. Счетные кольца эндоморфизмов без кручения

Перейдем к кольцам эндоморфизмов групп без кручения. Первое, что можно заметить,— это что неизоморфные группы без кручения вполне могут иметь изоморфные кольца эндоморфизмов. Примеры очень многочисленны; в частности, их легко найти среди групп жестких систем или среди групп различных мощностей, или даже среди групп ранга 1.

Другое существенное различие в поведении колец эндоморфизмов периодических групп и групп без кручения состоит в том, что в периодическом случае эти кольца принадлежат довольно специальному классу колец, а в случае групп без кручения на них налагается значительно меньше ограничений. Это высказывание вполне оправдывается следующей замечательной теоремой.

Теорема 110.1 (Корнер [3]). *Всякое счетное редуцированное кольцо без кручения* $\mathbf{R}$ *с единицей изоморфно кольцу эндоморфизмов* $\mathbf{E}(A)$ *некоторой счетной редуцированной группы без кручения* A

Настоящий параграф посвящен доказательству этого мощного результата. Орсатти [6] принадлежит идея локализации в этом доказательстве, так что метод Корнера понадобится только в более простом локальном случае.

а) Прежде всего локализуем проблему и, кроме того, предположим, что кольцо $\mathbf{R}_p$ является алгеброй над $\mathbf{Q}_p$ для некоторого простого числа p. Это равносильно предположению, что $q\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_p$ для всех простых чисел $q \neq p$. Кольцо $\mathbf{R}_p$ снабдим p-адической топологией; редуцированность кольца $\mathbf{R}_p$ обеспечивает хаусдорфовость этой топологии. Затем образуем пополнение $\hat{\mathbf{R}}_p$ в p-адической топологии; в результате получается $\mathbf{Q}_p^*$-алгебра, содержащая $\mathbf{R}_p$ в качестве (сервантного) подкольца [ср. следствие 119.4]. Так как кольцо $\mathbf{R}_p$ счетно, то в нем существует конечное или бесконечное счетное множество $\{\xi_n\}$ элементов, являющееся максимальным независимым множеством над $\mathbf{Q}_p^*$. Это означает, что для каждого $\alpha \in \mathbf{R}_p$ существует соотношение зависимости

$$p^n\alpha = \pi_1\xi_1 + \ldots + \pi_k\xi_k \quad (\pi_i \in \mathbf{Q}_p^*).$$

Элементы π_i здесь определены однозначно с точностью до множителей p^m. Поэтому имеет смысл говорить о сервантном подкольце $\mathbf{S}_p$ кольца $\mathbf{Q}_p^*$, порожденном подкольцом $\mathbf{Q}_p$ и элементами π_i, взятыми для всех $\alpha \in \mathbf{R}_p$. Ясно, что $\mathbf{S}_p$ также счетно.

б) Теперь докажем, что если $\gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_m\alpha_m = 0$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{R}_p$, где элементы $\gamma_1 \ldots, \gamma_m \in \mathbf{Q}_p^*$ линейно независимы над $\mathbf{S}_p$, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. В самом деле, $p^n\alpha_j = \sum_i \pi_{ij}\xi_i$, где $\pi_{ji} \in \mathbf{S}_p$, если n — достаточно большое число, поэтому $\sum_{i,j} \gamma_j\pi_{ji}\xi_i = 0$.

Отсюда в силу независимости элементов ξ_i имеем $\sum_j \gamma_j \pi_{ji} = 0$. Следовательно, все α_j равны 0.

в) Для каждого $\alpha \in \mathsf{R}_p$ выберем такие целые p-адические числа ρ_α и σ_α, что множество $\{\rho_\alpha, \sigma_\alpha \mid \alpha \in \mathsf{R}_p\}$ алгебраически независимо над S_p. Это возможно, так как S_p счетно, а Q_p^* имеет мощность континуума, так что степень трансцендентности Q_p^* над S_p также равна мощности континуума. Для этих ρ_α, σ_α положим

$$\varepsilon_\alpha = \rho_\alpha 1 + \sigma_\alpha \alpha \in \hat{\mathsf{R}}_p. \tag{1}$$

Через A обозначим сервантную подгруппу

$$\langle \mathsf{R}_p, \ \mathsf{R}_p \varepsilon_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathsf{R}_p \rangle_*$$

группы $\hat{\mathsf{R}}_p$. Очевидно, что A — счетная редуцированная группа без кручения.

г) В силу определения группы A ясно, что элементы кольца R_p действуют на A слева согласно определению умножения в $\hat{\mathsf{R}}_p$. Различные элементы из R_p действуют по-разному, так как $1 \in A$. Следовательно, R_p можно рассматривать как подкольцо кольца $\mathsf{E}(A)$.

д) Чтобы доказать, что $\mathsf{R}_p = \mathsf{E}(A)$, возьмем элемент $\eta \in \mathsf{E}(A)$. Так как R_p сервантно в A, а A — сервантная подгруппа в $\hat{\mathsf{R}}_p$, то p-адическое пополнение $\hat{A}$ группы A совпадает с $\hat{\mathsf{R}}_p$. Поэтому в силу п. и) из § 106 эндоморфизм η продолжается до однозначно определенного Q_p^*-эндоморфизма $\hat{\eta}$ группы $\hat{\mathsf{R}}_p$. Используя этот эндоморфизм $\hat{\eta}$, получаем

$$\eta \varepsilon_\alpha = \hat{\eta} (\rho_\alpha 1 + \sigma_\alpha \alpha) = \rho_\alpha (\hat{\eta} 1) + \sigma_\alpha (\hat{\eta} \alpha) = \rho_\alpha (\eta 1) + \sigma_\alpha (\eta \alpha).$$

В силу определения группы A можно записать следующие равенства:

$$p^k (\eta \varepsilon_\alpha) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \varepsilon_{\alpha_i},$$

$$p^k (\eta 1) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \varepsilon_{\alpha_i},$$

$$p^k (\eta \alpha) = \delta_0 + \sum_{i=1}^n \delta_i \varepsilon_{\alpha_i},$$

где α, β, γ, $\delta \in \mathsf{R}_p$, а числа k и n фиксированы. Для простоты предположим, что $\alpha = \alpha_1$. Подстановка дает

$$\beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i (\rho_{\alpha_i} 1 + \sigma_{\alpha_i} \alpha_i) =$$
$$= \rho_\alpha \Big[\gamma_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i (\rho_{\alpha_i} 1 + \sigma_{\alpha_i} \alpha_i)\Big] + \sigma_\alpha \Big[\delta_0 + \sum_{i=1}^n \delta_i (\rho_{\alpha_i} 1 + \sigma_{\alpha_i} \alpha_i)\Big].$$

В силу выбора p-адических чисел ρ_α и σ_α эти числа и их произведения линейно независимы над S_p. Поэтому из п. б) и сравнения коэффициентов в левой и правой части последнего равенства получаем, что $\beta_1 = \gamma_0$, $\beta_1\alpha = \delta_0$, а все остальные элементы β, γ и δ равны нулю. Таким образом, $p^k(\eta 1) = \gamma_0$ и $p^k(\eta\alpha) = \gamma_0\alpha$. Положив $\eta 1 = \gamma$, получаем равенство $\eta\alpha = \gamma\alpha$ для любого $\alpha \in R_p$. Значит, η действует на R_p как умножение слева на γ. То же утверждение справедливо для $\hat{\eta}$ и для $\eta = \hat{\eta} \mid A$. Это завершает доказательство в локальном случае.

е) Переходя к глобальному случаю, предположим, что R — кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы. Так как R — редуцированное кольцо без кручения, его Z-адическое пополнение $\hat{R}$ содержит R в качестве сервантного подкольца. Предложение 40.1 дает представление

$$\hat{R} = \prod_p \hat{R}_p,$$

где $\hat{R}_p$ — это p — адическое пополнение редуцированной части R_p тензорного произведения $Q_p \otimes R$. Заметим, что каноническое вложение $R \to \hat{R}$ превращает R в подкольцо кольца $\prod_p R_p$, и если $\alpha \in R$, то можно писать $\alpha = (\ldots, \alpha_p, \ldots)$, где $\alpha_p \in R_p$.

ж) Как и в п. в), для каждого $\alpha \in R$ выберем ρ_α, σ_α таким образом: $\rho_\alpha = (\ldots, \rho_{\alpha_p}, \ldots)$, $\sigma_\alpha = (\ldots, \sigma_{\alpha_p}, \ldots)$, где ρ_{α_p}, σ_{α_p} — целые p-адические числа, алгебраически независимые над S_p [если $R_p = 0$ при некотором p, то можно взять $\rho_{\alpha_p} = \sigma_{\alpha_p} = 0$]. Используя элементы ε_α из (1), определим группу A так:

$$A = \langle R,\ R\varepsilon_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in R\rangle_*. \tag{2}$$

Это опять счетная редуцированная подгруппа в $\hat{R}$. Очевидно, что R является подкольцом в $E(A)$. Если $\eta \in E(A)$, то η однозначно продолжается до некоторого эндоморфизма $\hat{\eta} \in E(\hat{R})$, который должен действовать покоординатно, так как $\hat{R}_p$ вполне характеристично в $\hat{R}$. Локальный случай д) показывает, что $\hat{\eta}$ действует на $\hat{R}_p$ как умножение слева на R_p-компоненту элемента $\eta 1 = \gamma \in R$. Поэтому $\hat{\eta}$ совпадает с умножением слева на γ на всем кольце $\hat{R}$, а значит, и на группе A. Этим доказано, что $E(A) \cong R$.

Окончательно получаем, что группа A, заданная формулой (2), является счетной редуцированной группой без кручения, а ее кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу R, о котором говорится в формулировке теоремы 110.1. ∎

Пользуясь теоремой 110.1, можно легко доказать существование счетных групп без кручения с теми или иными свойствами, которые можно выразить с помощью эндоморфизмов [см., например, теоремы 91.5 и 91.6].

Следует заметить, что кольца эндоморфизмов некоторых счетных групп без кручения имеют мощность континуума. Эти кольца тоже можно охарактеризовать, если снабдить их конечной топологией [ср. Корнер [6]].

Если кольцо $\mathbf{R}$, о котором говорится в предыдущей теореме, имеет счетный ранг, то группа A, очевидно, должна быть по меньшей мере счетного ранга. Однако для колец конечного ранга теорема 110.1 может быть усилена:

Теорема 110.2 (Корнер [3]). *Всякое редуцированное кольцо без кручения* $\mathbf{R}$ *конечного ранга* n *с единицей изоморфно кольцу эндоморфизмов редуцированной группы без кручения* A *ранга не больше* $2n$.

Пусть $1 = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимые элементы кольца $\mathbf{R}$ [над $\mathbf{Z}$]. Выберем такие элементы $\rho_i = (\ldots, \rho_{ip}, \ldots)$ $(i = 1, \ldots, n)$, что целые p-адические числа $\rho_{1p}, \ldots, \rho_{np}$ при любом простом числе p алгебраически независимы над $\mathbf{S}_p$. Возьмем в Z-адическом пополнении $\hat{\mathbf{R}}$ кольца $\mathbf{R}$ элемент

$$\varepsilon = \rho_1\alpha_1 + \ldots + \rho_n\alpha_n$$

и положим

$$A = \langle \mathbf{R}, \mathbf{R}\varepsilon \rangle_*. \qquad (3)$$

Тогда, очевидно, A — редуцированная группа без кручения ранга не больше $2n$, причем $\mathbf{R}$ — подкольцо кольца $\mathbf{E}(A)$. Возьмем снова эндоморфизм $\eta \in \mathbf{E}(A)$ и продолжим его до эндоморфизма $\hat{\eta} \in \mathbf{E}(\hat{\mathbf{R}})$. Тогда $\eta\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \eta\alpha_i$, причем для некоторого натурального числа m и элементов $\beta_i, \gamma_i \in \mathbf{R}$ имеем

$$m(\eta\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_0\varepsilon, \quad m(\eta\alpha_i) = \beta_i + \gamma_i\varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Подстановка дает

$$\beta_0 + \gamma_0 \left(\sum_i \rho_i\alpha_i\right) = \sum_i \rho_i \left(\beta_i + \gamma_i \sum_j \rho_j\alpha_j\right),$$

и утверждение, аналогичное п. б), влечет за собой

$$\beta_0 = 0, \; \gamma_0\alpha_i = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n), \; 0 = \gamma_i\alpha_j + \gamma_j\alpha_i \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Последнее равенство при $i = j = 1$ дает $\gamma_1 = 0$, поэтому, полагая в том же равенстве $j = 1$, получаем $\gamma_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Следовательно, $m(\eta\varepsilon) = \gamma_0\varepsilon$ и $m(\eta\alpha_i) = \beta_i = \gamma_0\alpha_i$. Таким образом, положив $\eta 1 = \gamma \in \mathbf{R}$, получаем $\eta\alpha_i = \gamma\alpha_i$. Это показывает, что эндоморфизм η совпадает с умножением слева на γ и $\mathbf{E}(A) = \mathbf{R}$, что и требовалось. ∎

Корнер [3] заметил, что при $n \geqslant 2$ последний результат не может быть усилен: существует кольцо без кручения ранга n, не изоморфное кольцу эндоморфизмов никакой группы ранга меньше $2n$. Цассенхауз [1] нашел условия, при которых кольцо ранга n является кольцом эндоморфизмов группы без кручения того же ранга. Одно обобщение этого результата можно найти в работе Батлера [2].

Упражнения

1 (Корнер [3]). Если $\mathsf{E}(A)$ — счетное редуцированное кольцо без кручения, то группа A должна быть редуцированной и без кручения.

2 (Корнер [3]). Показать, что если в теореме 110.1 отбросить любое из трех условий: 1) счетность, 2) редуцированность, 3) свойство быть кольцом без кручения,— то кольцо R уже не обязательно будет кольцом эндоморфизмов. [*Указание*: $\mathsf{Q}_p^* \oplus \mathsf{Q}_p^*$, $\mathsf{Q} \oplus \mathsf{Q}$, $\mathsf{Z}/(p) \oplus \oplus \mathsf{Z}/(p)$.]

3. Если S — счетная полугруппа с единицей, то полугрупповое кольцо $\mathsf{Z}S$ полугруппы S над кольцом целых чисел всегда может быть представлено как кольцо эндоморфизмов.

4 (Сонсяда [6], Корнер [3]). Существуют группы без кручения конечного ранга с изоморфными группами эндоморфизмов, кольца эндоморфизмов которых не изоморфны. [*Указание*: взять в качестве колец эндоморфизмов $\mathsf{Z} \oplus \mathsf{Z}$ и кольцо целых гауссовых чисел.]

5 (Орсатти [6]). Заменив условие счетности требованием, чтобы редуцированная часть R_p тензорного произведения $\mathsf{Q}_p \otimes \mathsf{R}$ была счетной для любого простого числа p, распространить теорему 110.1 на случай $|A| = |\mathsf{R}|$.

6. Всякое кольцо без кручения ранга 1 с единицей является кольцом эндоморфизмов группы без кручения ранга 1.

7. Показать, что группа, построенная по формуле (3), имеет в точности ранг $2n$.

8. Пусть R — кольцо целых алгебраических чисел, лежащих в расширении степени 2 поля рациональных чисел, такое, что ± 1 — единственные обратимые элементы в R [например, можно взять $\mathsf{R} = \mathsf{Z}[\sqrt{-5}]$]. Пусть A — группа без кручения ранга 4, для которой $\mathsf{E}(A) \cong \mathsf{R}$. Проверить справедливость следующих утверждений:

(а) все подгруппы группы A являются характеристическими;

(б) все эндоморфизмы группы A — мономорфизмы;

(в) группа A не имеет вполне характеристических подгрупп ранга 1. Вывести отсюда, что группы без кручения конечного ранга могут иметь характеристические, но не вполне характеристические подгруппы.

9. Если $\mathfrak{m}$ — кардинальное число, меньшее первого сильно недостижимого кардинального числа, то существуют группы без кручения A мощности $\mathfrak{m}$, которые не порождаются как $\mathsf{E}(A)$-модули меньше, чем $\mathfrak{m}$ элементами. [*Указание*: жесткие группы.]

10. Для любого кардинального числа $\mathfrak{m}$ из упр. 9 существуют коммутативные кольца эндоморфизмов мощности $2^{\mathfrak{m}}$. [*Указание*: прямая сумма групп жесткой системы.]

11 (Дж. Д. Рейд [5], Орсатти [2]). Кольцо R называется *подкоммутативным*, если для любых элементов $\alpha, \beta \in \mathsf{R}$ существует такой элемент $\gamma \in \mathsf{R}$, что $\alpha\gamma = \beta\alpha$.

(а) Если кольцо $\mathsf{E}(A)$ подкоммутативно, то эндоморфные образы группы A являются вполне характеристическими подгруппами.

(б) Используя тот факт, что алгебра кватернионов над полем рациональных чисел содержит подкоммутативное [но не коммутативное] кольцо с единицей, аддитивная группа которого редуцированная, показать, что свойство эндоморфных образов быть вполне характеристическими подгруппами не влечет за собой коммутативности кольца эндоморфизмов.

12. Центр кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения изоморфен подкольцу поля $\mathbf{Q}$.

13. Однородная сепарабельная группа A без кручения не имеет вполне характеристических подгрупп, кроме подгрупп nA ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

§ 111. Кольца эндоморфизмов со специальными свойствами

До сих пор наше исследование связей между группами и их кольцами эндоморфизмов касалось в основном вопроса, как структура группы отражается на ее кольце эндоморфизмов. Теперь мы займемся вопросом, какое влияние оказывает кольцевая структура колец эндоморфизмов на соответствующие группы. Естественно, основное внимание мы будем уделять стандартным теоретико-кольцевым свойствам.

Сначала сделаем несколько простых замечаний технического характера.

а) *Если $\alpha \in \mathsf{E}(A)$, то $n \mid \alpha$ влечет за собой $\alpha A \subseteq nA$, а $n\alpha = 0$ влечет за собой $\alpha A \subseteq A[n]$.*

Если для $\beta \in \mathsf{E}(A)$ выполняется равенство $n\beta = \alpha$, то $\alpha A = n\beta A \subseteq nA$. Если $n\alpha = 0$, то $n\alpha A = 0$ и $\alpha A \subseteq A[n]$.

б) *Пусть для группы A имеют место разложения*

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus C_n, \quad \text{где} \quad C_n = A_{n+1} \oplus C_{n+1}$$

и $A_n \neq 0$, при любом n. Тогда в кольце $\mathsf{E} = \mathsf{E}(A)$ условие минимальности не выполнено ни для правых, ни для левых [главных] идеалов.

Пусть $\pi_n\colon A \to C_n$ — проекция. Тогда $\pi_n\pi_{n+1} = \pi_{n+1}$, но не существует такого $\alpha \in \mathsf{E}$, что $\pi_{n+1}\alpha = \pi_n$, так как $\operatorname{Im}\pi_{n+1}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\pi_{n+1} \subset \operatorname{Im}\pi_n$. Следовательно, имеет место строгое включение $\pi_n\mathsf{E} \supset \pi_{n+1}\mathsf{E}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Далее, $\pi_{n+1}\pi_n = \pi_{n+1}$ и не существует такого $\beta \in \mathsf{E}$, что $\beta\pi_{n+1} = \pi_n$, так как $\operatorname{Ker}\pi_n \subset \operatorname{Ker}\pi_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker}\beta\pi_{n+1}$. Это показывает, что $\mathsf{E}\pi_n \supset \mathsf{E}\pi_{n+1}$.

Из $\mathsf{E} = (1 - \pi_n)\mathsf{E} \oplus \pi_n\mathsf{E} = \mathsf{E}(1 - \pi_n) \oplus \mathsf{E}\pi_n$ и п. б) непосредственно получается следующее утверждение [на самом деле в силу теоремы 123.3 это более сильное, чем п. б), утверждение]:

в) *Если A — такая группа, как в п. б), то кольцо $\mathsf{E}(A)$ обладает бесконечной строго возрастающей цепью правых [левых] идеалов.*

Начнем наше изложение со случая [не обязательно коммутативных] тел. Среди колец эндоморфизмов они встречаются удивительно редко.

Теорема 111.1 (Селе [5]). *Кольцо эндоморфизмов* $\mathsf{E}(A)$ *группы* A *является телом тогда и только тогда, когда группа* A *изоморфна* Q *или* $Z(p)$ *при некотором* p [*т. е. группа* A *является аддитивной группой некоторого простого поля*].

Тело служит кольцом эндоморфизмов абелевой группы в точности тогда, когда оно — простое поле.

Если $\mathsf{E}(A)$ — тело, то всякий ненулевой элемент $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ является автоморфизмом. Следовательно, для любого простого числа p или $pA = 0$, или $pA = A$. Если $pA = 0$ для некоторого p, то A — элементарная p-группа. Так как в нашем случае проекции на ненулевые слагаемые должны быть автоморфизмами, то группа A неразложима и $A \cong Z(p)$. С другой стороны, если $pA = A$ для всех p, то A — делимая группа и, как и в первом случае, она неразложима. Умножение на p является эндоморфизмом с ядром 0, поэтому A — группа без кручения. Таким образом, $A \cong Q$.

Обратно, кольца эндоморфизмов групп Q и $Z(p)$ являются простыми полями характеристики 0 и p соответственно. ∎

Далее, рассмотрим простые кольца, т. е. кольца, не имеющие нетривиальных идеалов. Все простые кольца эндоморфизмов легко перечислить:

Теорема 111.2. *Кольцо эндоморфизмов* $\mathsf{E}(A)$ *является простым кольцом тогда и только тогда, когда* A — *или конечная прямая сумма групп, изоморфных полной рациональной группе* Q, *или конечная прямая сумма циклических групп фиксированного простого порядка* p.

Простое кольцо служит кольцом эндоморфизмов абелевой группы тогда и только тогда, когда оно — полное кольцо матриц конечного порядка над простым полем.

Если $\mathsf{E} = \mathsf{E}(A)$ — простое кольцо, то для любого простого числа p или $p\mathsf{E} = 0$, или $p\mathsf{E} = \mathsf{E}$. В первом случае из п. а) легко следует, что $A \subseteq A[p]$, т. е. A — элементарная p-группа. Если $p\mathsf{E} = \mathsf{E}$ для любого простого числа p, то E — делимая группа и группа A — тоже [см. п. а)]. Цоколь в E является идеалом [ср. § 117, п. А)], поэтому E должно быть кольцом без кручения, и умножение на p^{-1} — эндоморфизм группы A. Отсюда следует, что A — также группа без кручения. Таким образом, или $A = \oplus Z(p)$, или $A = \oplus Q$. Эндоморфизмы группы A, отображающие ее на подгруппу конечного ранга, образуют ненулевой идеал в E, который должен совпадать с E. Следовательно, A — конечная прямая сумма, и необходимость доказана.

Достаточность очевидна в силу теоремы 106.1. Второе утверждение теоремы также очевидно. ∎

В частности, теорема 111.2 показывает, что простое кольцо эндоморфизмов должно удовлетворять условию минимальности для левых и правых идеалов. Вообще, переходя к артиновым кольцам, получаем:

Теорема 111.3. *Кольцо эндоморфизмов* $\mathsf{E}(A)$ *группы* A *является артиновым слева* [*или справа*] *тогда и только тогда, когда* $A = B \oplus D$, *где* B — *конечная группа, а* D — *делимая группа без кручения конечного ранга.*

Пусть кольцо $\mathsf{E} = \mathsf{E}(A)$ артиново слева [или справа]. Тогда существует такое натуральное число m, что $m\mathsf{E}$ — делимая группа [см., например, § 122]. В силу п. а) из $nm \mid m1_A$ вытекает, что $mA \subseteq \subseteq nmA$, т. е. mA — делимая группа. Следовательно, $A = B \oplus D$, где $mB = 0$, а D — делимая группа. В силу п. б) слагаемые B и D имеют конечный ранг; в частности, B — конечная группа. Мы можем утверждать, что $Z(p^\infty)$ в D не входит, заметив, что $m1_A$ должно делиться на степени числа p. Следовательно, группа A должна иметь вид, указанный в теореме.

Обратно, если группа A имеет указанный в теореме вид, то $\mathsf{E}(A) = \mathsf{E}(B) \oplus \mathsf{E}(D)$, так как B и D — вполне характеристические подгруппы группы A. Здесь $\mathsf{E}(B)$ — конечное кольцо, а $\mathsf{E}(D)$ — полное кольцо матриц конечного порядка над $\mathbf{Q}$. Артиновость слева и справа кольца $\mathsf{E}(A)$ теперь очевидна. ∎

Заметим, что если группа A устроена как в теореме 111.3, то ее кольцо эндоморфизмов является кольцевой прямой суммой конечного кольца $\mathsf{E}(B)$ и кольца $\mathsf{E}(D)$, изоморфного полному кольцу матриц конечного порядка над $\mathbf{Q}$.

Пересматривая последнее доказательство, можно заметить, что то же заключение можно получить при более слабом предположении, что $\mathsf{E}(A)$ удовлетворяет условию минимальности для левых [или правых] главных идеалов [см. Сас [1]].

В противоположность условию минимальности условие максимальности, наложенное на кольцо эндоморфизмов, не слишком ограничивает групповую структуру, как показывает хотя бы пример больших неразложимых групп, имеющих кольцо эндоморфизмов, изоморфное подкольцу поля $\mathbf{Q}$. Однако в периодическом случае условие максимальности оказывается большим ограничением.

Предложение 111.4. *Пусть* A — *периодическая группа. Кольцо* $\mathsf{E}(A)$ *нётерово слева* [*или справа*] *тогда и только тогда, когда* A — *прямая сумма конечного числа коциклических групп.*

Используя п. в), легко проверить, что базисная подгруппа B группы A конечна [см. теорему 32.4]. Поэтому по теореме 27.5 имеем $A = B \oplus C$, где C — делимая группа, обязательно конечного ранга.

Чтобы доказать обратное, предположим, что $A = B \oplus D$, где B — конечная группа, а D — делимая группа конечного ранга, и пусть $\pi\colon A \to D$ — проекция. Тогда $\mathsf{E} = \mathsf{E}\pi \oplus \mathsf{E}(1 - \pi)$, где второе слагаемое конечно, а первое слагаемое $\mathsf{E}\pi = \pi\mathsf{E}\pi$ является в силу

теоремы 106.1 полным матричным кольцом над Q_p^*, т. е. также нётеровым [слева и справа] кольцом. Следовательно, и $E\pi$, и $E(1-\pi)$ — нётеровы левые E-модули и этим же свойством обладает кольцо E. Аналогичные рассуждения применимы при доказательстве нётеровости справа. ∎

Другие условия на кольца эндоморфизмов будут рассмотрены в следующем параграфе.

Упражнения

1. (а) Доказать, что кольцо эндоморфизмов $E(A)$ является полупростым кольцом с условием минимальности для левых [или, что эквивалентно, правых] идеалов тогда и только тогда, когда $A = B \oplus D$, где B — конечная элементарная группа, а D — делимая группа без кручения конечного ранга.

(б) Какие полупростые кольца с условием минимальности служат кольцами эндоморфизмов?

2. (Кертес). Если A является p-группой, то радикал Джекобсона кольца $E(A)$ равен нулю тогда и только тогда, когда A — элементарная группа. [*Указание*: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n p^n\theta^n$ — элемент, квазиобратный к $p\theta$.]

3. Доказать, что для периодических групп A справедливо следующее свойство симметрии: кольцо $E(A)$ удовлетворяет условию минимальности [максимальности] для левых (или правых) идеалов тогда и только тогда, когда в группе A выполнено условие максимальности [минимальности] для подгрупп.

4. Радикал артинова кольца эндоморфизмов конечен.

5. Описать p-группы, кольца эндоморфизмов которых удовлетворяют условию минимальности [максимальности] для левых или правых аннуляторов элементов.

6. Если кольцо $E(A)$ удовлетворяет условию максимальности для левых [или правых] идеалов, то периодическая часть группы A конечно копорождена.

7. (а) Если $E(A)$ — область целостности, то группа A неразложима.

(б) Показать, что не всякое кольцо эндоморфизмов, являющееся областью целостности, может быть вложено в тело. [*Указание*: использовать теорему 110.1.]

8. (Селпал [3]). (а) Кольцо эндоморфизмов $E(A)$ является периодическим тогда и только тогда, когда A — ограниченная группа.

(б) $E(A)$ является кольцом без кручения в том и только в том случае, когда $A = D \oplus C$, где D — делимая периодическая группа, а C — такая группа без кручения, что $pC = C$ для тех простых чисел p, для которых $D[p] \neq 0$.

9. (Орсатти [1]). (а) Всякая группа A, кольцо эндоморфизмов которой локально, неразложима.

(б) Кольцо эндоморфизмов группы, не являющейся группой без кручения, является локальным тогда и только тогда, когда группа коциклическая.

(в) Сервантные подгруппы конечного ранга группы J_p имеют локальные кольца эндоморфизмов.

10. Перечислить группы, каждый эндоморфизм которых или является автоморфизмом, или нильпотентен.

11. Кольцо эндоморфизмов сепарабельной группы A без кручения нётерово слева [справа] тогда и только тогда, когда группа A имеет конечный ранг.

12 (Селе и Сендрей [1]). (а) Если кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативно, то p-компоненты T_p группы A являются коциклическими, а A/T есть p-делимая группа для любого простого числа p, для которого $T_p \neq 0$.

(б) Расщепляющаяся группа A имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}(T)$ и $\mathsf{E}(A/T)$ — коммутативные кольца и группа A удовлетворяет условию п. (а).

§ 112. Регулярные и обобщенные регулярные кольца эндоморфизмов

Продолжим рассмотрение вопроса о группах, кольца эндоморфизмов которых принадлежат тем или иным интересным классам колец. В этом параграфе мы сосредоточим внимание на кольцах эндоморфизмов, являющихся регулярными или обобщенными регулярными в соответствующем смысле.

Для начала сформулируем нужные определения.

Элемент α кольца R назовем *регулярным*, если

$$\alpha\beta\alpha = \alpha \text{ для некоторого } \beta \in R,$$

и *m-регулярным*, где m — натуральное число, если α^m — регулярный элемент. Элемент α назовем *регулярным слева* [*справа*], если

$$\alpha = \gamma\alpha^2 \ [\alpha = \alpha^2\gamma] \text{ для некоторого } \gamma \in \mathsf{R}.$$

Если α^m — элемент, регулярный слева [справа], то элемент α будем называть *m-регулярным слева* [*справа*]. Кольцо R назовем *регулярным*, *m-регулярным* и т. д., если соответствующим свойством обладает каждый его элемент. Кольцо R назовем *π-регулярным* [слева, справа], если каждый его элемент m-регулярен [слева, справа] для некоторого целого числа m, зависящего от элемента.

Дальнейшие результаты существенно опираются на следующую простую, но важную лемму.

Лемма 112.1 (Рангасвами [8]). *Эндоморфизм α группы A является регулярным элементом кольца $\mathsf{E}(A)$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}\alpha$ *и* $\operatorname{Ker}\alpha$ — *прямые слагаемые группы A.*

Пусть для $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ выполнено $\alpha\beta\alpha = \alpha$ при некотором $\beta \in \mathsf{E}(A)$. Так как эндоморфизмы $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ — идемпотенты в кольце $\mathsf{E}(A)$, то они

являются проекциями группы A, и поэтому их образы и ядра — прямые слагаемые этой группы. Очевидно,

$$\operatorname{Im} \alpha\beta\alpha \subseteq \operatorname{Im} \alpha\beta \subseteq \operatorname{Im} \alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} \alpha \subseteq \operatorname{Ker} \beta\alpha \subseteq \operatorname{Ker} \alpha\beta\alpha.$$

Отсюда $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \alpha\beta$ и $\operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Ker} \beta\alpha$ — прямые слагаемые группы A.

Обратно, пусть $\operatorname{Im} \alpha = G$ и $\operatorname{Ker} \alpha = K$ — прямые слагаемые группы A, скажем $A = G \oplus H = K \oplus L$ для некоторых подгрупп H, $L \subseteq A$. Так как $L \cap K = 0$, мы можем утверждать, что $\alpha \mid L$ отображает L изоморфно в группу G, а значит, на нее. Следовательно, существует эндоморфизм $\beta \in \mathsf{E}(A)$, действующий тривиально на H и обратный к $\alpha \mid L$ на G. Записав элемент $a \in A$ в виде $a = a_1 + a_2$ ($a_1 \in K$, $a_2 \in L$), получаем $(\alpha\beta\alpha) a = \alpha [\beta (\alpha a_2)] = \alpha a_2 = \alpha a$, откуда $\alpha\beta\alpha = \alpha$. ∎

Следующий результат непосредственно вытекает из нашей леммы; он является просто переформулировкой (связанной с группой) условия регулярности [π-регулярности] кольца эндоморфизмов.

Предложение 112.2. *Кольцо эндоморфизмов группы A регулярно [π-регулярно] тогда и только тогда, когда образы и ядра [подходящих степеней] эндоморфизмов группы A служат прямыми слагаемыми для A.* ∎

Прежде чем приступить к рассмотрению строения групп, кольца эндоморфизмов которых регулярны или π-регулярны, приведем несколько примеров и затем докажем один предварительный результат, который нам понадобится в дальнейшем.

Пример 1. Кольцо эндоморфизмов элементарной группы регулярно. Действительно, всякая подгруппа такой группы служит в ней прямым слагаемым, поэтому регулярность кольца эндоморфизмов вытекает из предложения 112.2.

Пример 2. Всякая делимая группа без кручения имеет регулярное кольцо эндоморфизмов. Это очевидно в силу предложения 112.2.

Пример 3. Группы, о которых говорится в теореме 111.3, имеют m-регулярные кольца эндоморфизмов. Чтобы это проверить, покажем, что артиново слева кольцо R с единицей m-регулярно для некоторого m. Из следствия 123.4 непосредственно вытекает, что кольцо R, рассматриваемое как левый R-модуль, имеет конечный композиционный ряд, скажем, длины l. Для $\alpha \in \mathsf{R}$ убывающая цепочка левых идеалов, порожденных элементами α, α^2, ... соответственно, стабилизируется самое большее через l шагов, т. е. $\alpha^l = \beta\alpha^{2l}$ при некотором $\beta \in \mathsf{R}$. Отсюда $(1 - \alpha^l\beta) \alpha^{2l} = 0$. По той же причине левые аннуляторы элементов α, α^2, ... совпадают, начиная, самое большее, с l-го места, поэтому $1 - \alpha^l\beta$ аннулирует также α^l, т. е. $(1 - \alpha^l\beta) \alpha^l = 0$. Следовательно, кольцо R является l-регулярным. Как показывает доказательство, оно также l-регулярно слева.

Пример 4. Пусть $A = \bigoplus_p Z(p^m)$ для некоторого фиксированного m и различных простых чисел p. Так как всякий эндоморфизм группы $Z(p^m)$ или является автоморфизмом, или нильпотентен и имеет индекс нильпотентности не больше m, то кольцо $\mathsf{E}(A)$ m-регулярно. Здесь кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативно.]

Пример 5. Кольцо эндоморфизмов аддитивной группы коммутативного π-регулярного кольца $\mathbf{N}$ из теоремы 125.3 изоморфно $\mathbf{N}$. Оно π-регулярно, но не m-регулярно ни при каком m, кроме случая, когда числа l_i ограничены.

Лемма 112.3. *Если группа A имеет регулярное [π-регулярное] кольцо эндоморфизмов, то этим же свойством обладает кольцо эндоморфизмов любого прямого слагаемого C группы A.*

Пусть $\varepsilon\colon A \to C$ — проекция. Любое $\alpha \in \mathbf{E}(C)$ можно рассматривать как эндоморфизм группы A, переводящий $\operatorname{Ker}\varepsilon$ в 0. Если этот эндоморфизм m-регулярен в кольце $\mathbf{E}(A)$ для некоторого $m \geqslant 1$, т. е. $\alpha^m\beta\alpha^m = \alpha^m$ при соответствующем $\beta \in \mathbf{E}(A)$, то для элемента $\beta' = \varepsilon\beta\varepsilon \in \mathbf{E}(C)$ справедливо равенство $\alpha^m\beta'\alpha^m = \alpha^m$.

Наша первая задача — получить основные сведения о влиянии π-регулярности кольца $\mathbf{E}(A)$ на строение группы A.

Предложение 112.4 (Фукс и Рангасвами [1]). *Если кольцо $\mathbf{E}(A)$ является π-регулярным, то $A = C \oplus D$, где*

1) C — редуцированная группа, такая, что ее p-компоненты C_p — или конечные, или элементарные группы, $C/T(C)$ — делимая группа и, кроме того,

$$\bigoplus_p C_p \subseteq C \subseteq \prod_p C_p;$$

2) D — делимая группа без кручения.

Умножение на простое число p является эндоморфизмом группы A, который можно, не опасаясь недоразумений, обозначать просто через p. В силу π-регулярности $p^m = p^m\beta p^m$ для некоторого $m \geqslant 1$ и некоторого $\beta \in \mathbf{E}(A)$. Таким образом, для всех $a \in A$ выполнено $p^m a = p^{2m}\beta a$, откуда вытекает, что $p^m A = p^{2m}A$ есть p-делимая группа и $p^m a = 0$ для всех элементов a из p-компоненты A_p группы A. Следовательно, A_p — прямое слагаемое группы A, т. е. $A = A_p \oplus B$ для некоторого $B \subseteq A$. Отсюда $p^m A = p^m B$ и $p^m B$ есть p-делимая группа. Деление на p в группе B определяется однозначно, поэтому $p^m B = B$. Таким образом, $A = A_p \oplus p^m A$, где $p^m A_p = 0$. Теперь ясно, что максимальная делимая подгруппа D группы A удовлетворяет условию 2). Группа $C/T(C)$ — эпиморфный образ каждой группы $A/A_p \cong p^m A$, где последняя группа p-делима. Следовательно, $C/T(C)$ — делимая группа.

Остается показать, что если группа $C_p = A_p$ не элементарная, то она конечна. В силу ограниченности C_p — прямая сумма циклических групп порядка не больше p^m. Если C_p — не конечная группа, то она имеет прямое слагаемое $G = G_0 \oplus G_1 \oplus \ldots \oplus G_n \oplus \ldots$, где $G_0 \cong Z(p^m)$ и $G_n \cong Z(p^i)$, причем $i \leqslant m$ фиксировано для всех $n \geqslant 1$. Существует эндоморфизм α группы A, переводящий в нуль дополнительное к G прямое слагаемое группы A и такой, что $\alpha G_0 = 0$, $\alpha G_1 = p^{m-1}G_0$, $\alpha G_n = G_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Очевидно, $p^{m-1}G_0 \subseteq \operatorname{Im}\alpha^k$ при всех $k \geqslant 1$, и $\operatorname{Im}\alpha^k$ не может служить прямым слагаемым группы G,

если $m \neq 1$. Из предложения 112.2 следует, что C_p обладает нужными свойствами.

Наконец, из существования разложений $C = C_p \oplus p^m C$ вытекает, что для всех p существуют эпиморфизмы $C \to C_p$. Они индуцируют гомоморфизм $C \to \prod_p C_p$. Чтобы проверить, что $C \subseteq \prod C_p$, достаточно показать, что $K = \bigcap_p p^m C = 0$. Если q — простое число, отличное от p, то C_q — прямое слагаемое группы $p^m C$ и $C = C_p \oplus C_q \oplus \oplus (p^m C \cap q^n C)$. Заметим, что каждый элемент $a \in p^m C \cap q^n C$ однозначно делится на p в подгруппе $p^m C \cap q^n C$, так что каждый элемент $a \in K = \bigcap_q (p^m C \cap q^n C)$ делится на p в K. Это означает делимость группы K, откуда $K = 0$. ∎

Теперь мы в состоянии рассмотреть вопрос о периодических группах с π-регулярными кольцами эндоморфизмов.

Теорема 112.5 (Фукс и Рангасвами [1]). *Пусть A — периодическая группа с p-компонентами A_p. Для π-регулярности кольца $\mathsf{E}(A)$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число $e \geqslant 0$, что при любом p или A_p — элементарная группа, или $|A_p| \leqslant \leqslant p^e$.*

Пусть кольцо $\mathsf{E}(A)$ является π-регулярным и A_p — неэлементарная группа при некотором p. В силу утверждения 1) из предложения 112.4 существует такое наименьшее целое число $k_p \geqslant 2$, что $p^{k_p} A_p = 0$. Лемма 112.1 показывает, что умножение на p в группе A_p — это k_p-регулярный эндоморфизм, который не k-регулярен, если $1 \leqslant k < k_p$. Поэтому эндоморфизм группы A, действующий как умножение на p на группе A_p при каждом p, может быть m-регулярным при некотором m только в случае, когда множество $\{k_p\}$, где p пробегает все простые числа, для которых $pA_p \neq 0$, ограничено. Предположим теперь, что группа A_p имеет прямое слагаемое $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_{l_p}$, где все B_j — циклические группы, $|B_1| \geqslant p^2$ и $|B_1| \geqslant \ldots \geqslant |B_{l_p}|$. Существует эндоморфизм β группы B, отображающий B_j на B_{j+1} ($j = 1, \ldots, l_p - 1$), а B_{l_p} — на $B_1[p]$. В силу леммы 112.1 эндоморфизм β не l-регулярен, если $l \leqslant l_p$. Как и для чисел k_p, мы получаем существование верхней грани чисел l_p. Используя верхние грани для k_p и l_p, получаем такое целое число e, что $|A_p| \leqslant p^e$ для всех неэлементарных p-компонент A_p группы A.

Обратно, пусть группа A обладает указанным в теореме свойством. Если порядок группы A_p не больше p^e, то легко видеть, что $\mathsf{E}(A_p)$ имеет порядок не больше p^{e^2}. Следовательно, $\mathsf{E}(A_p)$ как левый модуль над собой имеет длину не больше $l = e^2$, и из примера 3 вытекает l-регулярность кольца $\mathsf{E}(A_p)$. Если A_p — элементарная p-группа, то пример 1 показывает, что кольцо $\mathsf{E}(A_p)$ регулярно. Теперь ясно, что $\mathsf{E}(A) = \prod_p \mathsf{E}(A_p)$ есть l-регулярное кольцо. ∎

Полностью охарактеризовать группы с π-регулярными кольцами эндоморфизмов в общем случае не удается. Самое большее, что можно сделать,— это свести вопрос к случаю редуцированных групп, причем даже это далеко не просто.

Предложение 112.6 (Фукс и Рангасвами [1]). *Пусть $A = C \oplus D$, где C — редуцированная, а D — делимая группа. Кольцо $\mathsf{E}(A)$ является π-регулярным тогда и только тогда, когда*

а) *$\mathsf{E}(C)$ есть π-регулярное кольцо,*

б) *D — группа без кручения,*

в) *C — периодическая группа, если ранг группы D бесконечен.*

Если кольцо $\mathsf{E}(A)$ является π-регулярным, то утверждения а) и б) вытекают из леммы 112.3 и предложения 112.4. Чтобы доказать утверждение в), предположим, что группа D имеет бесконечный ранг, и запишем $D = D_0 \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} D_n$, где $D_n \cong Q$ при $n \geqslant 1$. Если группа C не периодическая, то в силу предложения 112.4 существует эпиморфное отображение группы C на D_1, и группа A обладает таким эндоморфизмом α, что $\alpha \mid D_0 = 1_{D_0}$, $\alpha D_n = D_{n+1}$ при $n \geqslant 1$ и $\alpha C = D_1$. Легко видеть, что $\operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Ker} \alpha^k$ при всех $k \geqslant 1$ и $T(C) \subseteq \operatorname{Ker} \alpha \subset C$, откуда следует, что $\operatorname{Ker} \alpha^k$ не может служить прямым слагаемым для группы A. Получилось противоречие, и утверждение в) доказано.

Докажем достаточность. Пусть $A = C \oplus D$ и выполнены условия а) — в). Если ранг группы D бесконечен, то в силу условия в) подгруппа C вполне характеристична в A. Поэтому $\mathsf{E}(A) = \mathsf{E}(C) \oplus \mathsf{E}(D)$. Из условия б) и примера 2 получаем, что кольцо $\mathsf{E}(A)$ является π-регулярным. Если D имеет конечный ранг, то требуются более сложные рассуждения.

Для $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ положим $A_k = \alpha^k A$ $(k \geqslant 1)$ и напишем разложение $A_k = C_k \oplus D_k$, где C_k — редуцированная, а D_k — делимая группа. Так как $A_{k+1} \subseteq A_k$ и $D_{k+1} \subseteq D_k$, то конечность ранга группы D влечет за собой $D_n = D_{n+1} = \ldots$ при некотором n. Теперь можно выбрать $C_{n+i} = C_n \cap A_{n+i}$ при $i \geqslant 1$, т. е. $C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \ldots$. Ясно, что каждая группа C_k является эпиморфным образом группы C. Отсюда заключаем, что $C_k/T(C_k)$ — делимая группа. Легко видеть, что C_k — подпрямая сумма подгруппы C' группы C и подгруппы D' группы D, причем $T(C') = T(C_k)$. Следовательно, $C_k/T(C_k)$ — подпрямая сумма обязательно делимых групп без кручения $C'/T(C')$ и D'. Ядра этой подпрямой суммы сервантны в подпрямой сумме, так как компоненты — группы без кручения [см. т. 1, стр. 55], и из делимости группы $C_k/T(C_k)$ следует, что $C_k/T(C_k)$, а значит, и C_k пересекается с D' по делимой подгруппе. Но так может быть лишь в случае, когда $C_k \cap D' = 0$, откуда $C_k \cap D = 0$. Без ограничения общности можно предполагать, что $C_k \subseteq C$ при всех $k \geqslant n$; иными словами, если $\varepsilon\colon A \to C$ — проекция, то $\varepsilon A_k = C_k$ при всех $k \geqslant n$. Заметим, что для эндоморфизма $\varepsilon\alpha^k\varepsilon$ выполняется равенство $\varepsilon\alpha^k\varepsilon C = \varepsilon\alpha^k C = C_k$. Теперь из условия а) вытекает существование такого

m, что $\operatorname{Im}(\varepsilon\alpha^n\varepsilon)^m$ и $\operatorname{Ker}(\varepsilon\alpha^n\varepsilon)^m \cap C$ — прямые слагаемые группы C. Так как $(\varepsilon\alpha^n\varepsilon)^m = \varepsilon\alpha^{nm}\varepsilon$, то C_{nm}, а значит, и A_{nm} — прямые слагаемые группы A. Для завершения доказательства остается только проверить, что $\operatorname{Ker}\alpha^{nm} + D = \operatorname{Ker}\varepsilon\alpha^{nm}\varepsilon$, так как тогда редуцированные части этих двух ядер одинаковы. Включение $\subseteq$ очевидно. Предположим, что $\varepsilon\alpha^{nm}\varepsilon a = 0$, где $a = c + d$ $(c \in C,\ d \in D)$. Равенство $\varepsilon\alpha^{nm}c = 0$ означает, что $\alpha^{nm}c \in D$, откуда $\alpha^{nm}c \in D_n$. В силу выбора числа n имеем $\alpha^{nm}c = \alpha^{nm}g$ для некоторого $g \in D$. Следовательно, $a = (c - g) + (d + g) \in \operatorname{Ker}\alpha^{nm} + D$, что и требовалось. ∎

Посмотрим, что дают наши теоремы в частном случае регулярных колец эндоморфизмов.

Предложение 112.7. а) *Если A — нередуцированная группа, то кольцо $\mathrm{E}(A)$ регулярно тогда и только тогда, когда A — прямая сумма делимой группы без кручения и элементарной группы.*

б) *Если A — периодическая группа, то кольцо $\mathrm{E}(A)$ регулярно в том и только в том случае, когда A — элементарная группа.*

в) *Если A — редуцированная группа и $\mathrm{E}(A)$ — регулярное кольцо, то $T(A)$ — элементарная группа, $A/T(A)$ — делимая группа и $\bigoplus_p A_p \subseteq A \subseteq \prod_p A_p$.*

Из первой части доказательства предложения 112.4 мы заключаем, что все p-компоненты A_p — элементарные группы, если кольцо $\mathrm{E}(A)$ регулярно. Этот факт и пример 1 доказывают утверждение б). В силу 1) из предложения 112.4 это доказывает также утверждение в). Наконец, чтобы доказать утверждение а), запишем $A = C \oplus D$, как в предложении 112.4, и заметим, что ядро нетривиального гомоморфизма $C \to D$ не может быть прямым слагаемым. Теперь необходимость условия а) очевидна. Его достаточность была установлена при доказательстве предложения 112.6. ∎

С кольцами эндоморфизмов, π-регулярными слева или справа, можно действовать аналогичным образом. В самом деле, фактически все, что мы получили для случая π-регулярности, переносится на случай колец эндоморфизмов, π-регулярных слева или справа, хотя доказательства должны быть несколько изменены. Заранее во всяком случае не очевидно, что для колец эндоморфизмов π-регулярность слева эквивалентна π-регулярности справа [и каждая из них влечет за собой π-регулярность]. Однако это будет следовать из предложения 112.9.

Начнем с аналога предложения 112.4.

Предложение 112.8 (Фукс и Рангасвами [1]). *Если кольцо $\mathrm{E}(A)$ является π-регулярным слева или справа, то $A = C \oplus D$, где*

1) *C — редуцированная группа, такая, что ее p-компоненты C_p конечны, $C/T(C)$ — делимая группа и $\bigoplus_p C_p \subseteq C \subseteq \prod_p C_p$;*

2) *D — делимая группа без кручения конечного ранга.*

Первая и последняя часть доказательства предложения 112.4 проходят для π-регулярности слева и справа. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что группа A не имеет слагаемых $G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$, равных прямой сумме бесконечного числа изоморфных между собой групп G_n. Если бы группа A имела такое слагаемое G, то существовали бы эндоморфизмы α, $\beta \in \mathsf{E}(A)$, для которых $\alpha G_n = G_{n+1}$, $\beta G_1 = 0$, $\beta G_{n+1} = G_n$ при $n = 1, 2, \ldots$ и которые действуют тривиально на дополнительном к G слагаемом группы A. Отсюда следовало бы, что $\operatorname{Im} \alpha^k \neq \operatorname{Im} \alpha^{k+1}$ и $\operatorname{Ker} \beta^k \neq \operatorname{Ker} \beta^{k+1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Но если эндоморфизм α является m-регулярным справа, то $\operatorname{Im} \alpha^m = \operatorname{Im} \alpha^{m+1}$, а если эндоморфизм β является m-регулярным слева, то $\operatorname{Ker} \beta^m = \operatorname{Ker} \beta^{m+1}$. ■

Теперь мы вплотную подошли к доказательству более сложного аналога предложения 112.2, который в то же время устанавливает эквивалентность π-регулярности слева и справа для колец эндоморфизмов.

Предложение 112.9 (Фукс и Рангасвами [1]). *Для кольца эндоморфизмов* $\mathsf{E}(A)$ *группы* A *эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\mathsf{E}(A)$ — *π-регулярное слева кольцо,*

2) $\mathsf{E}(A)$ — *π-регулярное справа кольцо,*

3) *для любого* $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ *существует такое натуральное число* m, *что*

$$A = \operatorname{Im} \alpha^m \oplus \operatorname{Ker} \alpha^m.$$

Пусть $A = \operatorname{Im} \alpha^m \oplus \operatorname{Ker} \alpha^m$. Тогда, очевидно, α^m индуцирует на $\operatorname{Im} \alpha^m = G$ мономорфизм. Он должен быть автоморфизмом, так как $G = \alpha^m A = \alpha^m G$. Если эндоморфизм $\gamma \in \mathsf{E}(A)$ обратен к α^m на G и аннулирует $\operatorname{Ker} \alpha^m$, то $\gamma\alpha^{2m} = \alpha^m = \alpha^{2m}\gamma$, т. е. эндоморфизм α является m-регулярным слева и справа. Таким образом, условие 3) влечет за собой 1) и 2).

Чтобы доказать обратные импликации, предположим сначала, что A — редуцированная группа.

Из условия 1) следует, что для всякого $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ справедливо $\alpha^m = \gamma\alpha^{2m}$ при некотором $\gamma \in \mathsf{E}(A)$ и некотором натуральном числе m. Очевидно, $\alpha^m = \gamma\alpha^{2m}$ влечет за собой $\operatorname{Im} \alpha^m \cap \operatorname{Ker} \alpha^m = 0$. Поэтому, чтобы доказать, что выполнено условие 3), остается только показать, что $A = \operatorname{Im} \alpha^m + \operatorname{Ker} \alpha^m$. В силу 1) из предложения 112.8 все p-компоненты A_p группы A конечны, поэтому при любом p сравнение порядков групп дает $A_p = \operatorname{Im} (\alpha^m \mid A_p) + \operatorname{Ker} (\alpha^m \mid A_p)$. Точнее, всякий элемент $a \in A_p$ может быть записан в виде $a = \alpha^m a_1 + a_2$, где a_1, $a_2 \in A_p$ и $\alpha^m a_2 = 0$. Следовательно, $a - \gamma\alpha^m a = a_2$ и $\alpha^m a - \alpha^m\gamma\alpha^m a = 0$. Таким образом, представляя A в виде подпрямой суммы групп A_p как в 1) из предложения 112.8, для любого $a \in A$ получаем, что все координаты элемента $(\alpha^m - \alpha^m\gamma\alpha^m)\, a$ должны равняться нулю.

Отсюда $\alpha^m\gamma\alpha^m = \alpha^m$ и $A = \operatorname{Im}\gamma\alpha^m + \operatorname{Im}(1-\gamma\alpha^m) \subseteq \operatorname{Im}\alpha^m + \operatorname{Ker}\alpha^m$.

Предположим, что выполнено условие 2), и пусть $\alpha^m = \alpha^{2m}\gamma$, где $\alpha, \gamma \in \mathsf{E}(A)$. Так как $\alpha^m(a - \alpha^m\gamma a) = 0$ для всех $a \in A$, то $a = a_1 + a_2$, где $a_1 = \alpha^m\gamma a \in \operatorname{Im}\alpha^m$ и $a_2 \in \operatorname{Ker}\alpha^m$. Другими словами, $A = \operatorname{Im}\alpha^m + \operatorname{Ker}\alpha^m$. Теперь будем рассуждать как в предыдущем абзаце. Так как p-компоненты A_p конечны, то $\operatorname{Im}(\alpha^m \mid A_p) \cap \operatorname{Ker}(\alpha^m \mid A_p) = 0$ для любого простого числа p. Следовательно, элементы из $\operatorname{Im}\alpha^m \cap \operatorname{Ker}\alpha^m$ имеют нулевые координаты в каждом A_p. Отсюда $\operatorname{Im}\alpha^m \cap \operatorname{Ker}\alpha^m = 0$, и 3) доказано.

Если группа A нередуцированная, то нужно сослаться на следующую лемму. ∎

Лемма 112.10. *Если $A = C \oplus D$, где C — редуцированная, а D — делимая группы, то кольцо $\mathsf{E}(A)$ является π-регулярным слева [справа] тогда и только тогда, когда*

а) $\mathsf{E}(C)$ *есть π-регулярное слева [справа] кольцо,*

б) D *— делимая группа без кручения конечного ранга.*

Необходимость непосредственно следует из предложения 112.8 и очевидного аналога леммы 112.3. Докажем достаточность. Пусть ε: $A \to C$ — проекция. Используя уже доказанную часть предложения 112.9, мы можем для некоторого m написать $C = \operatorname{Im}\varepsilon\alpha^m\varepsilon \oplus (C \cap \operatorname{Ker}\varepsilon\alpha^m\varepsilon)$. Кроме того, доказательство предложения 112.9 показывает, что такое же разложение имеет место для всех бо́льших целых чисел. Следовательно, $D \subseteq \operatorname{Ker}\varepsilon\alpha^k\varepsilon$ влечет за собой $A = \operatorname{Im}\varepsilon\alpha^k\varepsilon \oplus \operatorname{Ker}\varepsilon\alpha^k\varepsilon$ для всех $k \geqslant m$. Если выбрать D_n как в доказательстве предложения 112.6, то будет $\operatorname{Im}\alpha^k = \operatorname{Im}\varepsilon\alpha^k\varepsilon \oplus D_k$ и $\operatorname{Ker}\alpha^k \oplus D_k = \operatorname{Ker}\varepsilon\alpha^k\varepsilon$ для любого $k \geqslant n$. Следовательно, $A = \operatorname{Im}\alpha^k \oplus \operatorname{Ker}\alpha^k$ для некоторого k, и по предложению 112.9 кольцо $\mathsf{E}(A)$ является π-регулярным слева [справа]. ∎

Более или менее полное описание редуцированных групп, имеющих регулярные, π-регулярные или π-регулярные слева кольца эндоморфизмов,— видимо, сложная проблема. Ясно, что трудность заключается в выделении нужных смешанных групп, лежащих между прямой суммой и прямым произведением их p-компонент.

Упражнения

1. Показать, что если кольцо $\mathsf{E}(A)$ является m-регулярным, то в п. 1) из предложения 112.4 для неэлементарных p-компонент C_p выполняется неравенство $|C_p| \leqslant p^{m^2}$.

2. Доказать теорему 112.5 для групп $A = \prod_p A_p$, где A_p — некоторые p-группы.

3. Найти неизоморфные группы, имеющие изоморфные регулярные кольца эндоморфизмов. [*Указание*: прямая сумма и прямое произведение групп $Z(p)$.]

4. (а) Если в предложении 112.6 кольцо $\mathsf{E}(C)$ является m-регулярным, а группа D имеет ранг r, то $\mathsf{E}(A)$ есть $(r+1)\,m$-регулярное кольцо.

(б) Кольцо эндоморфизмов группы $Q \oplus \prod_p Z(p)$ является 2-регулярным, но не регулярным.

5. Доказать, что группа $\bigoplus_p Z(p) \oplus \prod_p Z(p)$ служит аддитивной группой регулярного кольца и удовлетворяет условию в) из предложения 112.7, но что кольцо эндоморфизмов этой группы не регулярно.

6 (Кертес и Селе [1]). Показать, что если всякий эндоморфный образ группы A служит для нее прямым слагаемым, то каждая p-компонента группы A—или элементарная, или делимая группа и $A/T(A)$— делимая группа. [*Указание*: pA.]

7 (Рангасвами [8]). Ядра и образы эндоморфизмов группы A сервантны в A тогда и только тогда, когда $T(A)$ — элементарная группа и $A/T(A)$ — делимая группа.

8. Если $\mathsf{E}(A)$ — коммутативное π-регулярное кольцо, то A — или сервантная подгруппа группы $\prod_p Z(p^{k_p})$, содержащая $\bigoplus_p Z(p^{k_p})$, или группа, изоморфная группе $Q \oplus \bigoplus_p Z(p^{k_p})$, где p пробегает некоторое множество различных простых чисел, а k_p — целые числа.

9. Охарактеризовать алгебраически компактные [копериодические] группы, имеющие π-регулярные кольца эндоморфизмов. Показать, что эти кольца являются тогда m-регулярными для некоторого m.

10. Кольцо эндоморфизмов, π-регулярное слева или справа, π-регулярно.

11. Описать строение периодических групп, имеющих π-регулярные слева кольца эндоморфизмов.

12. Кольцо эндоморфизмов является 1-регулярным слева тогда и только тогда, когда оно коммутативно и регулярно.

13 (Рангасвами [9]). Кольцо R с единицей называется *бэровским*, если левые [или, эквивалентно этому, правые] аннуляторы непустых подмножеств из R порождаются идемпотентами.

(а) Кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ периодической группы A является бэровским тогда и только тогда, когда p-компонента A_p группы A для любого простого числа p — или делимая, или элементарная группа.

(б) Если $A = A_p \oplus pA$ для любого простого числа p, то $\mathsf{E}(A)$ — бэровское кольцо тогда и только тогда, когда всякая подгруппа группы A, замкнутая в Z-адической топологии группы A, служит для A прямым слагаемым. [*Указание*: в рассматриваемом случае замкнутость подгруппы эквивалентна тому, что эта подгруппа — пересечение ядер эндоморфизмов.]

14*. (а) (Вольфсон [1]). Если F — свободная группа, то $\mathsf{E}(F)$ — бэровское кольцо тогда и только тогда, когда пересечения ядер эндоморфизмов служат для F прямыми слагаемыми.

(б) (Рангасвами [9]). Группа F обладает свойством, указанным в п. (а), тогда и только тогда, когда она счетна. [*Указание*: ср. теорему 19.2.]

Замечания

Изучение колец эндоморфизмов берет начало в теории линейных преобразований конечномерного векторного пространства. Давно было известно, что эти преобразования образуют простое кольцо, изоморфное кольцу матриц. Шода [1] положил начало теории колец эндоморфизмов конечных абелевых групп. Матричное представление, данное в теореме 106.1, в конечном случае принадлежит ему.

Бэр [9] первым сосредоточил внимание на кольцах эндоморфизмов как кольцах со специальными свойствами. Ему удалось полностью охарактеризовать кольца эндоморфизмов ограниченных групп в терминах теории идеалов. Другой подход можно найти в работах Либерта [1, 2 и 4], который дал теоретико-кольцевую характеризацию колец эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ сепарабельных p-групп A. Различные виды колец эндоморфизмов p-групп исследовали Пирс [2, 3] и Корнер [7]. Делимый случай рассматривал Либерт [5].

Тот факт, что кольца эндоморфизмов периодических групп определяют эти группы с точностью до изоморфизма, был установлен Бэром [9] в случае ограниченных групп и доказан Капланским [2] в общем случае. Для групп без кручения аналогичный результат места не имеет, если не ограничиваться рассмотрением групп с соответствующим запасом эндоморфизмов. Например, как показал Хауптфлейш (G. Hauptfleisch), верно следующее: если A и C — однородные сепарабельные группы без кручения типов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$ соответственно, то $\mathsf{E}(A) \cong \mathsf{E}(C)$ влечет за собой $A \otimes T \cong B \otimes S$, где S и T — рациональные группы типов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$ соответственно. Имеются и еще частные случаи, когда изоморфизм групп следует из изоморфизма колец эндоморфизмов, ср. Вольфсон [Wolfson K., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 712—714, и **14** (1963), 589—594; *Michigan Math. J.*, **9** (1962), 69—75].

В случае групп без кручения, несомненно, наиболее значительным результатом, известным до сих пор, является теорема 110.1. Примыкающие к ней результаты для случая бо́льших мощностей были получены Корнером [6] путем рассмотрения кольца $\mathsf{E}(A)$ как топологического кольца, снабженного конечной топологией. Еще об эндоморфизмах групп без кручения см. в работах Бреннера и Батлера [1], Корнера [8], Кишкиной [1] и Круль [2].

Сравнительно мало внимания до сих пор уделялось кольцам эндоморфизмов смешанных групп. Интересный частный случай — это когда эндоморфизмы вполне определяются их действием на периодическую часть, как это имеет место в урегулированных копериодических группах [см. упр. 7 из § 108].

Интересное обобщение теоремы 108.3 получил Нунке [8].

В работе [23] автор поставил вопрос о группах A, для которых подкольцо, порожденное обратимыми элементами кольца $\mathsf{E}(A)$, совпадает с $\mathsf{E}(A)$. Этот вопрос, видимо, должен легче поддаваться решению в случае периодических групп A. В то время как легко найти даже конечную 2-группу, которая не обладает указанным свойством [см. упр. 10 из § 108, ср. также Пирс [2]), все тотально проективные p-группы, где $p > 2$, и все периодически полные p-группы обладают даже более сильным свойством, а именно всякий их эндоморфизм равен сумме двух автоморфизмов [ср. Хилл [14] и Кастанья [1], см. также Фридман [2] и Стринголл [3]].

Всякое кольцо с единицей тривиальным образом является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля. Однако вопрос о кольцах эндоморфизмов становится очень трудным, если зафиксировать кольцо, модули над которым рассматриваются, или наложить условия на модули. Здесь один из наиболее полных результатов касается квазиинъективных модулей M [см. Faith C., Utumi Y., *Arch. Math.*, **15** (1964), 166—174]: радикал Джекобсона J кольца $\mathsf{E}_R(M)$ состоит в этом случае из всех эндоморфизмов, ядра которых — существенные подмодули в M,

а $E_R(M)/J$ — регулярное кольцо. О радикалах колец эндоморфизмов см. также Хаймо [3, 4].

Имеется ряд классов колец, строение которых известно лучше. Можно было бы исследовать их роль как колец эндоморфизмов, в частности, установить, какие из них служат кольцами эндоморфизмов. Эту программу предложил Селе [5], и с тех пор она привлекала большое внимание [ср. § 111 и 112, Рангасвами [9, 10]], но тем не менее здесь остается много открытых вопросов. Первоначальное предположение, что указанные исследования дадут возможность глубоко проникнуть в строение групп, не оправдалось, так как традиционные кольцевые свойства оказались жесткими ограничениями на кольца эндоморфизмов. В случае модулей дело обстоит сложнее, и, насколько мы знаем, здесь были получены только спорадические результаты. Вэр и Зельманович [Ware R., Zelmanowitz J., *Amer. Math. Monthly*, **77** (1970), 987—989] исследовали модули M над коммутативными кольцами R, для которых $E_R(M)$ — простое кольцо, и модули без кручения M над коммутативными областями целостности, для которых кольцо $E_R(M)$ регулярно. Дополнительно отметим, что коммутативные кольца эндоморфизмов изучал Зельманович [Zelmanowitz J., *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 69—76], а полунаследственные кольца эндоморфизмов — Ленцинг [Lenzing H., *Math. Z.*, **118** (1970), 219—240].

Проблема 84. Для различных типов колец найти критерии, при которых эти кольца служат кольцами эндоморфизмов; в частности, сделать это для

а) областей главных идеалов,
б) локальных и полулокальных колец,
в) нётеровых колец,
г) самоинъективных колец.

Проблема 85. Дать общую характеризацию колец эндоморфизмов p-групп. Какие из них являются кольцами эндоморфизмов тотально проективных p-групп?

Проблема 86. Кольца эндоморфизмов каких p-групп допускают компактную кольцевую топологию?

Проблема 87. Обязательно ли две смешанные группы ранга без кручения 1 будут изоморфными, если их кольца эндоморфизмов [группы автоморфизмов] изоморфны, а их факторгруппы по периодической части изоморфны группе Q?

Глава XVI

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

Всякая группа A определяет группу $\operatorname{Aut} A$, состоящую из всех ее автоморфизмов. Последняя коммутативна лишь в исключительных случаях, так что при изучении групп автоморфизмов неизбежно приходится применять методы теории некоммутативных групп.

В основном нас будет интересовать вопрос о взаимоотношении группы и ее группы автоморфизмов. Поскольку $\operatorname{Aut} A$ — не что иное, как группа обратимых элементов кольца $\mathsf{E}(A)$, ясно, что группа $\operatorname{Aut} A$ дает, вообще говоря, меньше сведений о группе A, чем кольцо $\mathsf{E}(A)$. С другой стороны, концентрируя внимание на группе $\operatorname{Aut} A$, мы получаем возможность использовать мощные теоретико-групповые методы, т. е. совершенно новый подход, и можно ожидать, что в этом направлении мы получим новые результаты.

Первый параграф в этой главе имеет вводный характер, назначение его — ознакомить читателя с простейшими отношениями, существующими между группой, ее прямыми разложениями и автоморфизмами. Всестороннее изучение групп автоморфизмов начинается с исследования некоторых нормальных подгрупп группы $\operatorname{Aut} A$, тесно связанных с группой A. Более существенные результаты будут получены в § 115 и 116, где группа $\operatorname{Aut} A$ подробно исследуется для периодических групп и для групп без кручения соответственно.

§ 113. Группы автоморфизмов

Автоморфизмы группы A образуют группу относительно композиции отображений: произведение $\alpha\beta$ двух автоморфизмов α, β группы A действует так:

$$(\alpha\beta)(a) = \alpha(\beta a) \quad \text{для всех} \quad a \in A.$$

Группа $\operatorname{Aut} A$ называется *группой автоморфизмов* группы A. Очевидно, группа $\operatorname{Aut} A$ в точности совпадает с группой обратимых элементов кольца $\mathsf{E}(A)$.

Циклические группы порядков 1 и 2 не имеют иных автоморфизмов, кроме тождественного. Но всякая группа A порядка больше 2 обладает нетривиальными автоморфизмами. Действительно, соответствие $a \to -a$ является автоморфизмом, отличным от 1_A, кроме случая, когда A — элементарная 2-группа. Для элементарной 2-группы A порядка $n \geqslant 4$ перестановка элементов базиса дает автоморфизм, отличный от тождественного.

Группы автоморфизмов некоторых важных групп описать легко.

Пример 1. Очевидно, Z обладает ровно двумя автоморфизмами, и $\operatorname{Aut} Z \cong Z(2)$.

Пример 2. Автоморфизм группы $Z(n)$ переводит образующий a в другой образующий b; очевидно, b должен иметь вид $b = ka$, где $(k, n) = 1$. Обратно, всякое такое k дает автоморфизм, переводящий a в ka.

Отсюда сразу следует, что группа автоморфизмов группы $Z(n)$ изоморфна мультипликативной группе тех классов вычетов по модулю n, которые определяются числами, взаимно простыми с n. Таким образом, группа Aut $Z(n)$ коммутативна и ее порядок — значение функции Эйлера $\varphi(n) = n(1 - p_1^{-1}) \ldots (1 - p_r^{-1})$, где $p_1, \ldots, p_r$ — различные простые делители числа n.

Пример 3. Из примера 3 в § 106 следует, что группа автоморфизмов группы $Z(p^\infty)$ изоморфна мультипликативной группе p-адических единиц. [Эта группа будет подробно описана в § 127.]

Пример 4. Аналогично, группа автоморфизмов группы J_p изоморфна мультипликативной группе p-адических единиц.

Пример 5. Пусть R — рациональная группа типа $\mathbf{t} = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$. Тогда сопоставление $a \mapsto p_n a$ (где $a \in R$, а p_n есть n-е простое число) является автоморфизмом группы R в том и только в том случае, когда $k_n = \infty$. Мы заключаем отсюда, что группа Aut R изоморфна мультипликативной группе рациональных чисел, числители и знаменатели которых делятся только на те простые числа p_n, для которых $k_n = \infty$. Таким образом, группа Aut R изоморфна дискретному прямому произведению группы $Z(2)$ и стольких бесконечных циклических групп, сколько имеется k_n, равных ∞.

Пример 6. Пусть A — элементарная p-группа ранга $\mathfrak{m}$. Тогда A — векторное пространство над простым полем $\mathbf{F}_p$ характеристики p и $\dim A = \mathfrak{m}$. Поскольку всякий автоморфизм группы A является линейным преобразованием векторного пространства, мы видим, что Aut A в этом случае — полная линейная группа GL $(\mathfrak{m}, p)$.

Сделаем теперь несколько простых замечаний.

а) Если C — характеристическая подгруппа группы A и $\alpha \in \text{Aut } A$, то $\alpha \mid C$ — автоморфизм группы C и $a + C \mapsto \alpha a + C$ — автоморфизм группы A/C.

б) Изоморфизм $\varphi\colon A \to C$ индуцирует изоморфизм $\varphi^\#\colon \text{Aut } A \to \text{Aut } C$ между группами автоморфизмов, а именно:

$$\varphi^\#\colon \alpha \mapsto \varphi\alpha\varphi^{-1}.$$

в) Если A — прямая сумма групп и если эндоморфизмы группы A представлены матрицами, как указано в теореме 106.1, то автоморфизмы в точности соответствуют обратимым матрицам $[\alpha_{ji}]$.

г) Если $A = B \oplus C$, то группу Aut B можно рассматривать как подгруппу группы Aut A, отождествив Aut B с множеством всех $\alpha \in \text{Aut } A$, для которых $\alpha \mid C = 1$. [Это отождествление зависит, однако, от выбора C.]

д) Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, то, применяя отождествление, указанное в п. г), каждую группу Aut A_i можно рассматривать как подгруппу группы Aut A. Более того, декартово произведение $\prod_i \text{Aut } A_i$ всех групп Aut A_i является подгруппой группы Aut A: эта подгруппа состоит из всех автоморфизмов $\alpha \in \text{Aut } A$, которые каждую группу A_i отображают на себя. При матричном представлении автоморфизмов α группа $\prod_i \text{Aut } A_i$ — это в точности множество всех диагональных матриц.

е) *Если* $A = \oplus A_i$, *где каждое* A_i — *вполне характеристическая подгруппа группы* A, *то* $\text{Aut}\, A = \prod\limits_i \text{Aut}\, A_i$. Так как $\text{Hom}\,(A_i, A_j) = 0$ при $i \neq j$, то в матричном представлении автоморфизмов $\alpha \in \text{Aut}\, A$ вне диагонали стоят нули [см. теорему 106.1]. В частности, верно следующее утверждение:

ж) *Если* $A = \oplus_p A_p$ — *периодическая группа и* A_p — *ее* p-*компоненты, то группа* $\text{Aut}\, A$ *есть декартово произведение групп* $\text{Aut}\, A_p$, *где* p *пробегает все простые числа.*

Пусть B — подгруппа группы A. *Стабилизатором* цепочки $0 \subseteq B \subseteq A$ называется подгруппа группы $\text{Aut}\, A$, состоящая из всех автоморфизмов $\alpha \in \text{Aut}\, A$, для которых $\alpha b = b$ и $\alpha a - a \in B$ при произвольных $b \in B$ и $a \in A$; другими словами, α индуцирует тождественные отображения как на подгруппе B, так и на факторгруппе A/B.

Лемма 113.1. *Стабилизатор цепочки* $0 \subseteq B \subseteq A$ *изоморфен группе* $\text{Hom}\,(A/B, B)$. *Он является нормальной подгруппой группы* $\text{Aut}\, A$, *если* B — *характеристическая подгруппа группы* A.

Пусть автоморфизмы $\alpha, \beta \in \text{Aut}\, A$ лежат в стабилизаторе Σ цепочки $0 \subseteq B \subseteq A$. Тогда для элемента $a \in A$ при некоторых $b, c \in B$ имеет место $\alpha a = a + b$ и $\beta a = a + c$. Мы получаем $\alpha\beta a = \alpha\,(a + c) = a + b + c$. Заметим, что отображения $\bar{\alpha}$: $a + B \mapsto (\alpha - 1)\, a = b$, $\bar{\beta}$: $a + B \mapsto (\beta - 1)\, a = c$ являются такими гомоморфизмами из A/B в B, что $\overline{\alpha\beta}$: $a + B \mapsto b + c$. Отсюда следует, что сопоставление $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ является гомоморфизмом $\Sigma \to \text{Hom}\,(A/B, B)$, ядро которого тривиально. Легко видеть, что при данном $\eta \in \text{Hom}\,(A/B, B)$ отображение $\alpha{:}a \mapsto a + \eta\,(a + B)$ принадлежит Σ, следовательно, $\Sigma \cong \text{Hom}\,(A/B, B)$.

Второе утверждение проверяется непосредственно. ∎

Напомним, что группа Γ является *полупрямым произведением* нормальной подгруппы Δ и подгруппы Ξ группы Γ, если $\Delta \cap \Xi = 1$ и подгруппы Δ, Ξ порождают Γ.

з) *Пусть* $A = B \oplus C$, *где* B — *вполне характеристическая подгруппа группы* A. *Тогда* $\text{Aut}\, A$ — *полупрямое произведение стабилизатора* $\Sigma \cong \text{Hom}\,(C, B)$ *цепочки* $0 \subseteq B \subseteq A$ *и подгруппы* $\text{Aut}\, B \times \text{Aut}\, C$.

В силу п. а) всякий автоморфизм $\alpha \in \text{Aut}\, A$ индуцирует некоторые автоморфизмы $\alpha_B \in \text{Aut}\, B$ и $\alpha_C \in \text{Aut}\, A/B = \text{Aut}\, C$. Соответствие $\alpha \mapsto (\alpha_B, \alpha_C)$ является гомоморфизмом φ: $\text{Aut}\, A \to \text{Aut}\, B \times \text{Aut}\, C$, ядро которого, очевидно, совпадает с Σ. Поскольку $\Sigma \cap \text{Im}\, \varphi = 1$, мы получаем, что $\text{Aut}\, A$ — полупрямое произведение подгрупп Σ и $\text{Im}\, \varphi$. Указанный изоморфизм имеет место благодаря лемме 113.1.

Мы предоставляем читателю доказать п. з) для частного случая, когда B — делимая, а C — редуцированная группы.

Напомним, что прямые разложения группы выразимы в терминах эндоморфизмов. Существует аналогичный, хоть и не столь эффективный, аппарат обнаружения прямых разложений с помощью такназы-

ваемых *инволюций*, т. е. автоморфизмов ε группы A, для которых $\varepsilon^2 = 1$. Как будет видно, эти автоморфизмы не обеспечивают нас информацией в том же объеме, что и проекции; к тому же во избежание излишних трудностей при использовании этих автоморфизмов необходимо предположить, что умножение на 2 есть автоморфизм группы A. Конечно, в этом нет никакого ограничения общности, если рассматривать p-группы A для $p \geqslant 3$.

В утверждениях и) — н) мы будем предполагать, что отображение $a \mapsto 2a$ есть автоморфизм группы A. Таким образом, для каждого элемента $a \in A$ будет однозначно определен элемент $\frac{1}{2} a \in A$.

и) Прямое разложение

$$A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k, \quad \text{где} \quad C_i \neq 0, \tag{1}$$

дает k коммутирующих инволюций: ε_i определяется как автоморфизм группы A, для которого $\varepsilon_i \mid C_i = -1$ и $\varepsilon_i \mid C_j = 1$ при $i \neq j$. Мы будем говорить, что система $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ *принадлежит* разложению (1).

к) Для инволюции ε группы A положим

$$A_\varepsilon^+ = \{a \in A \mid \varepsilon a = a\} \quad \text{и} \quad A_\varepsilon^- = \{a \in A \mid \varepsilon a = -a\}.$$

Тогда $A = A_\varepsilon^+ \oplus A_\varepsilon^-$; следовательно, инволюции $\varepsilon \neq \pm 1$ дают нетривиальные прямые разложения группы A. Ассоциированные с таким разложением проекции — это отображения $\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$ и $\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$.

л) Две инволюции ε, ζ группы A коммутируют в том и только в том случае, когда выполняется равенство

$$A = (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^+) \oplus (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^-) \oplus (A_\varepsilon^- \cap A_\zeta^+) \oplus (A_\varepsilon^- \cap A_\zeta^-).$$

Если ε и ζ коммутируют, то, очевидно, $A_\varepsilon^+ = (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^+) \oplus (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^-)$ и аналогичное равенство справедливо для A_ε^-. Обратное следует из простого замечания, что ε и ζ коммутируют на всех четырех слагаемых и, значит, на группе A.

м) Коммутирующие инволюции $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ группы A единственным образом определяют такое разложение (1) группы A, что 1) $\zeta_l \mid C_i = \pm 1$ при всех i, l и 2) для данных $i \neq j$ найдется такое ζ_l, что одно из ограничений $\zeta_l \mid C_i$ и $\zeta_l \mid C_j$ есть $+1$, а другое -1. Действительно, применив несколько раз п. л), получим требуемое разложение [после вычеркивания нулевых компонент]. Заметим, что если разложение (1) удовлетворяет условию 1), то $C_i \subseteq A_{\zeta_1}^{\pm} \cap \ldots \cap A_{\zeta_n}^{\pm}$ при подходящем выборе знаков $\pm$, а в силу условия 2) для различных C_i и C_j невозможен один и то же набор знаков.

н) Пусть система инволюций $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ принадлежит прямому разложению (1). *Централизатором* системы $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ назовем множество автоморфизмов

$$\mathfrak{c}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} = \{\alpha \in \operatorname{Aut} A \mid \alpha\varepsilon_i = \varepsilon_i\alpha \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, k\}.$$

Имеет место разложение

$$\mathfrak{c}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} = \operatorname{Aut} C_1 \times \ldots \times \operatorname{Aut} C_k. \qquad (2)$$

Очевидно, что при отождествлении, о котором говорилось в п. г), все группы $\operatorname{Aut} C_i$ лежат в этом централизаторе. Обратно, если автоморфизм α коммутирует с каждым из $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$, то $\alpha C_i = \alpha A_{\varepsilon_i}^- \subseteq A_{\varepsilon_i}^- = C_i$ для всех i, откуда $\alpha C_i = C_i$ и α принадлежит прямому произведению групп $\operatorname{Aut} C_i$.

Следующие два результата были доказаны для p-групп Лептином [4] и Фуксом [20] соответственно.

Предложение 113.2. *Автоморфизм α группы A удовлетворяет условиям*

1) *α индуцирует тождественное отображение на факторгруппе A/nA,*
2) *α оставляет на месте элементы из $A[n]$*

в том и только в том случае, когда $\alpha = 1 - n\eta$ для некоторого эндоморфизма η группы A.

Всякий автоморфизм α вида $\alpha = 1 - n\eta$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Пусть теперь $\alpha \in \operatorname{Aut} A$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Как непосредственно видно, достаточно ограничиться случаем, когда n есть степень простого числа p^k. Положив $\xi = 1 - \alpha \in \mathrm{E}(A)$, имеем $\xi A \subseteq p^k A$ и $\xi A[p^k] = 0$. Пусть $B = \oplus \langle b_i \rangle$ есть p-базисная подгруппа группы A. Для каждого b_i выберем такой элемент $c_i \in A$, что $\xi b_i = p^k c_i$, причем $c_i = b_i$, если $o(b_i) \leqslant p^k$ [и, значит, $\xi b_i = 0$]. Соответствие $b_i \mapsto c_i$ можно расширить до корректно определенного гомоморфизма $\bar{\eta}\colon B \to A$.

С помощью $\bar{\eta}$ следующим образом определим эндоморфизм η: если $a = b + p^k x$, где $b \in B$, $x \in A$, то положим $\eta a = \bar{\eta} b + \xi x$. Заметив, что на подгруппе B выполняется равенство $p^k \bar{\eta} = \xi$, мы можем доказать корректность данного определения. Действительно, если $a = b' + p^k x'$, где $b' \in B$, $x' \in A$, то в силу $p^k(x' - x) = b - b' \in B$ имеем $b - b' = p^k b''$ для некоторого $b'' \in B$. Отсюда вытекает, что $p^k(x' - x - b'') = 0$ и $\xi x' = \xi x + \xi b''$, следовательно, $\bar{\eta} b' + \xi x' = \bar{\eta}(b - p^k b'') + \xi x + \xi b'' = \bar{\eta} b + \xi x$. Таким образом, η — эндоморфизм группы A, удовлетворяющий равенству $p^k \eta = \xi$, откуда $\alpha = 1 - p^k \eta$, что и требовалось. ∎

Предложение 113.3. *Для любой группы A и для произвольного целого числа $n > 0$ всякий автоморфизм группы nA индуцируется некоторым автоморфизмом группы A.*

Ясно, что без потери общности можно ограничиться рассмотрением случая, когда n есть простое число p. Пусть α — автоморфизм группы pA и $\{a_i\}_{i \in I}$ — p-базис группы A. Каждый элемент $a \in A$

имеет вид

$$a = k_1 a_{i_1} + \ldots + k_r a_{i_r} + pb \quad (1 \leqslant k_i \leqslant p-1, \ b \in A),$$

где слагаемые $k_1 a_{i_1}, \ldots, k_r a_{i_r}$ и pb однозначно определяются элементом a. Для каждого a_i порядка $o(a_i) \geqslant p^2$ выберем такой элемент $c_i \in A$, что $pc_i = \alpha(pa_i)$, и положим $c_i = a_i$, если порядок элемента a_i равен p. Записывая элементы $a \in A$, как указано выше, определим отображение $\beta \colon A \to A$ следующим образом:

$$\beta a = k_1 c_{i_1} + \ldots + k_r c_{i_r} + \alpha(pb).$$

Очевидно, что β — корректно определенный эндоморфизм группы A, для которого $\beta \mid pA = \alpha$. Докажем, что β — автоморфизм. Пусть $\beta a = 0$ при некотором $a \in A$. Тогда $\beta(pa) = 0$ и $pa = 0$, следовательно, элемент a можно записать в виде $a = k_1 a_{i_1} + \ldots + k_r a_{i_r} + pb$, где $o(a_{i_1}) = \ldots = o(a_{i_r}) = p$. Мы получаем $\beta a = k_1 a_{i_1} + \ldots + k_r a_{i_r} + \alpha(pb) = 0$, откуда $r = 0$, т. е. $a = pb \in pA$. Далее, $\alpha a = \beta a = 0$ влечет за собой $a = 0$, и β — мономорфизм. Для произвольного данного $x \in A$ возьмем такой элемент $c \in A$, что $\alpha(pc) = px$. Тогда элемент $x - \beta c$ имеет порядок p, так что можно записать $x - \beta c = k_1 a_{i_1} + \ldots + k_r a_{i_r} + pb$, где элементы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ имеют порядок p. Существует такой элемент $d \in A$, что $pd = \alpha(pb)$, и мы получаем, что $y = c + k_1 a_{i_1} + \ldots + k_r a_{i_r} + pd$ переходит в x при отображении β. Мы видим, что β — эпиморфизм и, значит, автоморфизм. ∎

Упражнения

1. Доказать, что всякий автоморфизм группы A может быть продолжен до автоморфизма ее делимой оболочки. Продолжение единственно, если A — группа без кручения.

2. (а) Пусть A — такая группа, что $A^1 = 0$. Всякий автоморфизм группы A можно продолжить единственным образом до автоморфизма Z-адического пополнения $\hat{A}$ группы A.

(б) Всякий автоморфизм редуцированной группы A можно продолжить единственным образом до автоморфизма ее копериодической оболочки $A^{\bullet}$.

3. (Бэр [3]). Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — группа автоморфизмов группы A. Показать, что

(а) если C — характеристическая подгруппа группы A, то $\Delta = \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha c = c \text{ при всех } c \in C\}$ — нормальная подгруппа группы Γ;

(б) если Δ — нормальная подгруппа группы Γ, то $C = \{a \in A \mid \delta a = a \text{ при всех } \delta \in \Delta\}$ — характеристическая подгруппа группы A.

4. Группа автоморфизмов локально циклической группы коммутативна.

5. Пусть A — элементарная p-группа ранга $\mathfrak{m}$. Тогда

$$|\operatorname{Aut} A| = (p^m - 1)(p^m - p) \ldots (p^m - p^{m-1})$$

$$\text{или } |\operatorname{Aut} A| = 2^{\mathfrak{m}}$$

в соответствии с тем, конечно $\mathfrak{m}$ ($= m$) или бесконечно. [*Указание*: посчитать, сколькими способами можно выбрать образ базиса.]

6. а) Пусть A — прямая сумма m групп, изоморфных $Z(p^k)$. Показать, что порядок группы $\operatorname{Aut} A$ делится на p^{mk-1}. [*Указание*: индукция по m; если $A = \langle a \rangle \oplus B$, то в группе $\operatorname{Aut} A$ порядок подгруппы, состоящий из нижних треугольных матриц, делится на p^{mk-1}.]

б) Если A есть p-группа порядка p^n, то порядок группы $\operatorname{Aut} A$ делится на p^{n-1}.

7. Характеристическая подгруппа группы A, выделяющаяся в A прямым слагаемым, должна быть вполне характеристической подгруппой группы A.

8. Доказать следующее утверждение, обратное к утверждению п. е): если $A = \oplus A_i$ и $\operatorname{Aut} A = \prod \operatorname{Aut} A_i$, то каждое A_i — вполне характеристическая подгруппа группы A.

9. Если группа A полна в своей Z-адической топологии и A_p — ее p-адические компоненты, то $\operatorname{Aut} A = \prod\limits_p \operatorname{Aut} A_p$.

10. Пусть ε, ζ — коммутирующие инволюции, как в п. л). Найти четыре проекции, соответствующие прямому разложению, указанному в этом пункте.

11. Произвольный автоморфизм группы A и произвольный автоморфизм группы C индуцируют коммутирующие автоморфизмы на группах $\operatorname{Hom}(C, A)$, $\operatorname{Ext}(C, A)$, $C \otimes A$ и $\operatorname{Tor}(C, A)$.

12. Пусть $\langle a_n \rangle$ — циклическая группа порядка p_n, и пусть $T = \bigoplus\limits_n \langle a_n \rangle$, $A = \prod\limits_n \langle a_n \rangle$, где сумма и произведение взяты по бесконечному множеству различных простых чисел p_n.

(а) Всякий автоморфизм (эндоморфизм) группы T можно единственным образом продолжить до автоморфизма (эндоморфизма) группы A, так что автоморфизмы группы A составляют множество мощности континуума.

(б) Две сервантные подгруппы группы A, содержащие T, изоморфны в том и только в том случае, когда некоторый автоморфизм группы A отображает одну из них на другую.

(в) Доказать, что существует $2^{2^{\aleph_0}}$ неизоморфных сервантных подгрупп группы A с периодической частью, равной T.

(г) Все группы из п. (в) обладают коммутативными группами автоморфизмов.

13 (Мишина [6]). Группа A обладает тем свойством, что произвольный автоморфизм любой ее подгруппы индуцируется некоторым автоморфизмом группы A, в том и только в том случае, когда A является одной из следующих групп: (1) делимая группа; (2) прямая сумма

периодической делимой группы и группы без кручения ранга 1; (3) периодическая группа, p-компоненты которой являются прямыми суммами изоморфных коциклических групп. [*Указание*: рассмотреть подгруппы, являющиеся прямыми суммами циклических групп.]

§ 114*. Нормальные подгруппы в группах автоморфизмов

В настоящее время наши сведения о группах автоморфизмов абелевых групп весьма ограничены, даже в очень частных случаях. Систематическому анализу только положено начало. Какими бы ни оказались результаты такого исследования, ясно, что даже неполная классификация нормальных подгрупп поможет лучше уяснить структуру групп автоморфизмов. Этим оправдывается наша заинтересованность в получении нормальных подгрупп группы $\mathrm{Aut}\, A$.

В наших рассмотрениях мы будем исходить из самой группы A — при таком подходе можно надеяться на получение нормальных подгрупп группы $\mathrm{Aut}\, A$, более тесно связанных с группой A.

Сначала мы изучим так называемые стабилизаторы. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ цепочка подгрупп в группе A, т. е. для любых двух X_i и X_j выполняется либо $X_i \subseteq X_j$, либо $X_j \subseteq X_i$. Говорят, что между X_i и X_j имеется *скачок*, если $X_i \neq X_j$ и если ни одна подгруппа из цепочки, кроме X_i и X_j, не лежит между этими подгруппами. *Стабилизатор* цепочки $\{X_i\}$ состоит по определению из всех таких автоморфизмов $\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$, что для каждого скачка $X_i \supset X_j$ в этой цепочке α переводит в себя смежные классы группы X_i по подгруппе X_j: если $x \in X_i$, то $\alpha x = x + u$ при некотором $u \in X_j$.

Сразу видно, что если группы X_i из цепочки $\{X_i\}$ являются характеристическими подгруппами группы A, то стабилизатор этой цепочки — нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}\, A$.

Пусть $\{X_i\}$ — цепочка характеристических подгрупп группы A и Σ — стабилизатор этой цепочки. Всякий автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$ очевидным образом индуцирует автоморфизм α_i группы X_i/X_j, где $X_i \supset X_j$ — скачок в цепочке. А именно,

$$\alpha_i\colon a + X_j \mapsto \alpha a + X_j \quad (a \in X_i).$$

Таким способом мы получаем гомоморфное отображение $\varphi\colon \alpha \mapsto (\ldots, \alpha_i, \ldots)$ группы $\mathrm{Aut}\, A$ в декартово произведение $\prod \mathrm{Aut}\, X_i/X_j$ групп автоморфизмов факторов, соответствующих скачкам. Очевидно, $\mathrm{Ker}\, \varphi = \Sigma$. В общем случае о гомоморфизме φ можно сказать немногое, так что рассмотрим цепочки специального вида.

Пусть A есть p-группа длины τ. Мы концентрируем наше внимание на стабилизаторе вполне упорядоченной цепочки

$$P = P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_\omega \supset \ldots \supset P_\sigma \supset \ldots \supset P_\tau, \qquad (1)$$

где $P_\sigma = p^\sigma A\,[p]$. В этом случае $P_\sigma/P_{\sigma+1}$ — векторное пространство над простым полем характеристики p, размерность которого есть σ-й инвариант Ульма — Капланского $f_\sigma(A)$ группы A. Отсюда следует, что

$\operatorname{Aut} P_\sigma/P_{\sigma+1}$ — линейная группа $\mathrm{GL}(f_\sigma(A), p) = \Lambda_\sigma$, и мы заключаем, что существует гомоморфизм

$$\varphi\colon \alpha \mapsto (\alpha_0, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots) \quad (\sigma < \tau) \tag{2}$$

группы $\operatorname{Aut} A$ в декартово произведение $\Lambda = \prod_{\sigma<\tau} \Lambda_\sigma$. Очевидно, $\operatorname{Ker} \varphi$ — стабилизатор Δ цепочки (1).

Интересно узнать, для каких групп A отображение φ сюръективно. Приведем по этому поводу два результата. Первый из них касается периодически полных p-групп.

Предложение 114.1. *Для произвольной p-группы A композиция $\operatorname{Aut} A \to \Lambda \to \Lambda_n$ гомоморфизма φ и естественной проекции Λ на Λ_n является эпиморфизмом при всяком неотрицательном целом n. Если A — периодически полная p-группа, то φ — эпиморфизм.*

Мы можем записать $p^nA = U \oplus V$, где $V[p] = P_{n+1}$ и $P_n = U \oplus P_{n+1}$. Всякий элемент $\alpha_n \in \Lambda_n$ действует как автоморфизм на группе U, и существует автоморфизм β на группе p^nA, который совпадает с α_n на U и индуцирует тождественное отображение на V. В силу предложения 113.3 этот автоморфизм может быть продолжен до автоморфизма α группы A. Ясно, что α переводится в α_n указанным отображением.

Пусть A — сепарабельная p-группа и $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ — базисная подгруппа группы A, где $B_n = \oplus Z(p^n)$. По доказанному $\operatorname{Im} \varphi$ — подпрямое произведение групп Λ_n ($n = 0, 1, \ldots$). При данном элементе $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \prod \Lambda_n$, где $\alpha_n \in \Lambda_n$, можно рассматривать α_n как автоморфизм группы p^nB_{n+1}. Из предложения 113.3 следует, что α_n индуцируется автоморфизмом β_n группы B_{n+1}. Очевидно, существует единственный автоморфизм β группы B, для которого $\beta \mid B_{n+1} = \beta_n$ при каждом $n \geqslant 0$. Ввиду теоремы 69.1 можно продолжить β до единственного автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} \overline{B}$. Этот α отображается при φ на $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, если $A = \overline{B}$. ∎

Еще в одном важном частном случае гомоморфизм φ сюръективен.

Теорема 114.2 (Фридман [1], Хилл [23]). *Для тотально проективных p-групп A отображение φ из (2) есть отображение «на».*

Как и в § 84, запишем $p^\sigma A[p] = p^{\sigma+1}A[p] \oplus S_\sigma$ для каждого порядкового числа σ, меньшего длины τ группы A. Пусть для каждого σ задан автоморфизм α_σ группы S_σ. Сюръективность отображения φ означает существование автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} A$, индуцирующего автоморфизмы α_σ на S_σ. Последнее вытекает из теоремы 83.4 и ее доказательства. ∎

Вернемся к рассмотрению группы Δ — стабилизатора цепочки (1). Подмножество Δ^* всех элементов конечного порядка из Δ можно описать достаточно хорошо.

Приведем замечание чисто технического характера.

Лемма 114.3 (Лептин [4]). *Пусть A есть p-группа, где $p \geqslant 5$, и автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut} A$ оставляет на месте смежные классы группы P_0 по подгруппе P_1 и смежные классы группы P_1 по подгруппе P_2. Если $\alpha^p = 1$ и $p^2(1-\alpha) = 0$, то $p(1-\alpha) = 0$.*

Запишем $A = B_1 \oplus B_2 \oplus A_2$, где B_i — максимальная прямая сумма циклических групп порядка p^i $(i = 1, 2)$ в некоторой базисной подгруппе группы A. Положив $\eta = 1 - \alpha$, получим $\eta P_0 \subseteq P_1$, $\eta P_1 \subseteq P_2$ и $\eta P_2 = 0$, откуда $\eta^3 P_0 = 0$. Так как $p\eta A = p\eta B_2 + p\eta A_2 \subseteq P_2$, то $p\eta^2 A = 0$. Следовательно, $\eta^2 A \subseteq P_0$ и $\eta^5 A = 0$. Поскольку $p \geqslant 5$, имеем $\eta^p = 0$. Очевидно, $1 = \alpha^p = 1 - p\eta + \binom{p}{2}\eta^2 + \dots$ $\dots - \eta^p$ влечет за собой $p\eta = -\eta^p = 0$. ■

Теперь мы можем доказать следующий результат:

Теорема 114.4 (Фридман [1], Лептин [4], Хилл [23], Хаузен [4]). *Пусть A — некоторая p-группа, где $p \geqslant 5$. Множество Δ^* элементов конечного порядка из стабилизатора Δ цепочки (1) является p-группой. При $\alpha \in \Delta^*$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\alpha^{p^n} = 1$;
2) $p^n(1-\alpha) = 0$;
3) α *индуцирует тождественное отображение на подгруппе $p^n A$.*

Если A — тотально проективная p-группа или A — сепарабельная p-группа, то Δ^* является [структурным] объединением всех нормальных p-подгрупп группы $\operatorname{Aut} A$.

Пусть $\alpha \in \Delta^*$ — элемент конечного порядка $k > 1$. Допустим, что найдется элемент $a \in P$, для которого $\alpha a = a + b$, где $b \neq 0$. Если $\alpha b = b + c$, то $h^*(a) < h^*(b) < h^*(c)$. Имеем $a = \alpha^k a = a + kb + \beta c$ [при некотором $\beta \in \mathbf{E}(A)$], откуда $kb = 0$. Таким образом, $p \mid k$ и k — степень числа p. Если α оставляет на месте каждый элемент из P, то выберем $a \in A$ — элемент наименьшего порядка, для которого $\alpha a \neq a$. Мы получаем, что $\alpha a = a + b$, где $o(b) = p$, и $\alpha^k a = a + kb$ снова влечет за собой $p \mid k$. Следовательно, порядки элементов из Δ^* являются степенями числа p.

Чтобы доказать эквивалентность указанных условий, заметим, что равенство $p^n(1-\alpha) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha(p^n a) = p^n a$ для всех $a \in A$, так что условия 2) и 3), очевидно, эквивалентны. Покажем теперь, что если $\alpha^p = 1$, то $\alpha \mid pA$ — тождественное отображение. Проведем индукцию по длине τ группы A. Если $\tau = 1$, доказывать нечего. Предположим, что длина группы A равна $\tau + 1$ и для группы $A/p^\tau A$ утверждение верно. Так как α лежит в стабилизаторе цепочки (1), то по индуктивному предположению в группе $A/p^\tau A$ автоморфизм α оставляет на месте смежные классы

группы pA по подгруппе $p^{\tau}A$, т. е. $(1-\alpha)\,pA \subseteq p^{\tau}A$. В силу равенства $p\,(p^{\tau}A)=0$ имеем $p^2\,(1-\alpha)=0$, а из леммы 114.3 следует, что $p\,(1-\alpha)=0$. Если длина τ группы A является предельным порядковым числом, то включение $(1-\alpha)\,pA \subseteq p^{\sigma}A$ выполняется для всех $\sigma<\tau$, откуда снова получаем, что $p\,(1-\alpha)=0$. Пусть теперь $\alpha^{p^n}=1$ при $n>1$. Тогда $\alpha^{p^{n-1}} \mid pA$ — тождественное отображение и, таким образом, можно рассматривать α как автоморфизм группы pA, причем его p^{n-1}-я степень есть тождественное отображение. Используя очевидным образом индукцию, получаем, что $\alpha \mid p^nA$ — тождественное отображение.

Обратно, пусть $\alpha \in \Delta^*$ индуцирует тождественное отображение на группе pA. Тогда для всякого элемента $a \in A$ можно записать $\alpha a = a+b$, где $pb=0$. Так как $\alpha \in \Delta^*$, то $\alpha b = b + c$ для такого $c \in A$, что $h^*(c) > h^*(b)$, откуда $c \in pA$ и $\alpha c = c$. Из равенства $\alpha^k b = b + kc$ следует, что

$$b+\alpha b+\ \ldots\ +\alpha^{p-1}b = pb + c + 2c + \ \ldots\ + (p-1)\,c = \\ = pb + \binom{p}{2} c = 0,$$

значит, $\alpha^p a = a + b + \alpha b + \ \ldots\ + \alpha^{p-1}b = a$ и $\alpha^p = 1$. Простая индукция по n показывает, что если $\alpha \in \Delta^*$ индуцирует тождественное отображение на группе p^nA, то $\alpha^{p^n}=1$.

Используя полученные сведения, нетрудно вывести, что Δ^* — подгруппа группы Δ. Действительно, если $\alpha, \beta \in \Delta^*$, то на некоторой подгруппе p^nA каждый из этих автоморфизмов есть тождественное отображение. Следовательно, $\alpha\beta^{-1} \mid p^nA = 1$, откуда $\alpha\beta^{-1} \in \Delta^*$. Таким образом, Δ^* — максимальная периодическая подгруппа группы Δ и поэтому — нормальная подгруппа группы $\operatorname{Aut} A$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть Θ — нормальная p-подгруппа группы $\operatorname{Aut} A$. Очевидно, что гомоморфизм φ из (2) отображает подгруппы Θ на некоторую нормальную подгруппу группы Λ, если φ — эпиморфизм. Но полные линейные группы Λ_{σ} не содержат нетривиальных нормальных p-подгрупп [см., например, Фридман [1]], откуда следует, что $\varphi(\Theta)$ — тривиальная подгруппа группы Λ и, значит, $\Theta \subseteq \Delta$. Благодаря теореме 114.2. наше утверждение доказано для тотально проективных групп A. Пусть A — сепарабельная p-группа. Тогда по предложению 114.1 компоненты подгруппы $\varphi(\Theta)$ являются нормальными подгруппами в группах Λ_n, так что снова $\varphi(\Theta)=1$ и $\Theta \subseteq \Delta^*$. ∎

В действительности группа Δ^* является p-нильпотентной в следующем обобщенном смысле. Группа N называется *обобщенно p-нильпотентной*, если она обладает вполне упорядоченной убывающей цепочкой нормальных подгрупп

$$N = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \ldots \triangleright N_{\sigma} \triangleright \ldots \triangleright N_{\tau} = 1, \tag{3}$$

причем

1) $N_\sigma/N_{\sigma+1}$ — элементарная абелева p-группа при каждом порядковом числе $\sigma < \tau$;

2) $N_\sigma = \bigcap_{\rho<\sigma} N_\rho$, если σ — предельное порядковое число.

Предложение 114.5. (Лептин [4]). *Группа Δ^* для p-группы A является обобщенно p-нильпотентной.*

Для каждого порядкового числа σ, меньшего длины τ группы A, положим $\Delta_\sigma = \{\alpha \in \Delta^* \mid \alpha$ индуцирует тождественное отображение на группе $P/P_\sigma\}$. Тогда $\Delta_\sigma \lhd \operatorname{Aut} A$ при каждом σ, $\Delta_0 = \Delta^*$ и $\Delta_\sigma = \bigcap_{\rho<\sigma} \Delta_\rho$ для предельных порядковых чисел σ. Пусть $\alpha, \beta \in \Delta_\sigma$; тогда для $a \in P$ имеют место равенства $\alpha a = a + u$ и $\beta a = a + v$ при некоторых $u, v \in P_\sigma$. Далее, $\beta u = u + u'$ и $\alpha v = v + v'$ при $u', v' \in P_{\sigma+1}$. Отсюда

$$\alpha\beta a = a + u + v + v', \quad \beta\alpha a = a + v + u + u' \text{ и } \alpha\beta a - \beta\alpha a \in P_{\sigma+1}.$$

Таким образом, $\Delta_\sigma/\Delta_{\sigma+1}$ — коммутативная группа. Более того, поскольку $\alpha^k a - (a + ku) \in P_{\sigma+1}$, мы получаем, что $\Delta_\sigma/\Delta_{\sigma+1}$ — элементарная p-группа. Очевидно, что $\Delta_\tau = \{\alpha \in \Delta^* \mid \alpha a = a$ при всех $a \in P\}$.

Положим теперь $\Delta_{\tau+n-1} = \{\alpha \in \Delta_\tau \mid \alpha$ индуцирует тождественное отображение на группе $(A[p^n] + pA)/pA\}$ при $n = 1, 2, \ldots$. Эти подгруппы также являются нормальными в группе $\operatorname{Aut} A$. Мы утверждаем, что $\Delta_{\tau+n-1}/\Delta_{\tau+n}$ — элементарная абелева p-группа при каждом n. Пусть $\alpha, \beta \in \Delta_{\tau+n-1}$. Если $\alpha \in \Delta_\tau$, то для $a \in A[p^{n+1}]$ должны выполняться равенства $\alpha a = a + u$, $\beta a = a + v$ при некоторых $u, v \in A[p^n]$. Отсюда следует, что элементы

$$\alpha\beta a = a + u + \alpha v,\ a + u + v \quad \text{и} \quad \beta\alpha a$$

лежат в одном и том же смежном классе по подгруппе pA, а так как $\alpha^p a - a \in pA$, то мы получаем требуемое утверждение.

Далее, $\Delta_{\tau+\omega} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\tau+n-1}$ — нормальная подгруппа группы $\operatorname{Aut} A$, состоящая из всех автоморфизмов $\alpha \in \operatorname{Aut} A$, которые оставляют на месте элементы из P и индуцируют тождественное отображение на группе A/pA. В силу предложения 113.2 имеем $\Delta_{\tau+\omega} = \{1 - p\eta \mid \eta \in \mathsf{E}(A)\}$ [заметим, что для каждого эндоморфизма $\eta \in \mathsf{E}(A) = \mathsf{E}$ эндоморфизм $1 - p\eta$ обладает обратным — это $\sum_{n=0}^{\infty} (p\eta)^n \in \mathsf{E}(A)$]. Ясно, что $\Delta_{\tau+\omega+n-1} = \{1 - p^n\eta \mid \eta \in \mathsf{E}(A)\}$ — нормальные подгруппы группы $\operatorname{Aut} A$. Так как

$$(1 - p^n\eta)(1 - p^n\xi) - (1 - p^n(\eta + \xi)) \in p^{n+1}\mathsf{E},$$

то соответствие $1 - p^n\eta \longmapsto p^n\eta + p^{n+1}\mathsf{E}$ является групповым эпиморфизмом $\Delta_{\tau+\omega+n-1}$ на $p^n\mathsf{E}/p^{n+1}\mathsf{E}$, ядро которого есть $\Delta_{\tau+\omega+n}$. Поскольку

$p^n E/p^{n+1}E$ — элементарная абелева p-группа, группа $\Delta_{\tau+\omega+n-1}/\Delta_{\tau+\omega+n}$ также является элементарной абелевой p-группой при $n=1, 2, \ldots$.

Для завершения доказательства предложения 114.5 остается заметить, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\tau+\omega+n} = 1$, так как $p^{\omega}E = 0$ в силу теоремы 46.1. ∎

Достоин также изучения стабилизатор Ω цепочки

$$A \supset pA \supset \ldots \supset p^{\sigma} A \supset \ldots \supset p^{\tau}A = 0, \tag{4}$$

где A — редуцированная p-группа. Заметим, что если автоморфизм α группы A отображает в себя смежные классы группы $p^{\sigma}A$ по подгруппе $p^{\sigma+1}A$, то он также отображает в себя смежные классы группы $p^{\sigma}A\,[p] = P_{\sigma}$ по подгруппе $p^{\sigma+1}A\,[p] = P_{\sigma+1}$. Другими словами, Ω — подгруппа стабилизатора Δ цепочки (1). Непосредственно проверяется, что подгруппы обобщенно p-нильпотентных групп снова являются обобщенно p-нильпотентными, и в силу предложения 114.5 мы получаем

Следствие 114.6. *Группа элементов конечного порядка в стабилизаторе цепочки* (4) *для p-группы является обобщенно p-нильпотентной.* ∎

Перейдем к другому интересному стабилизатору, связанному с p-группами A; это стабилизатор Σ возрастающей цепочки

$$0 \subset A\,[p] \subset A\,[p^2] \subset \ldots \subset A\,[p^m] \subset \ldots \subset A$$

[эта цепочка является конечной, если A — ограниченная группа]. Положим

$$\Sigma_n = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha a = a \quad \text{при всех} \quad a \in A\,[p^n]\}.$$

Тогда $\Sigma_n \lhd \operatorname{Aut} A$, и мы получаем убывающую цепочку

$$\Sigma = \Sigma_1 \rhd \ldots \rhd \Sigma_n \rhd \ldots \rhd 1 \tag{5}$$

нормальных подгрупп, для которой $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Sigma_n = 1$. Заметим, что $A\,[p^n] \subset A\,[p^{n+1}]$ влечет за собой $\Sigma_n \subset \Sigma_{n+1}$, так как умножение на $1 + p^n$ лежит в Σ_n, но не лежит в Σ_{n+1}. Очевидно, группа Σ_n/Σ_{n+1} изоморфна некоторой подгруппе стабилизатора цепочки $0 \subset A\,[p^n] \subset A\,[p^{n+1}]$. В силу леммы 113.1 этот стабилизатор является элементарной абелевой p-группой. Мы доказали, таким образом,

Предложение 114.7. *Цепочка* (5) *для p-группы A является строго убывающей цепочкой нормальных подгрупп группы* $\operatorname{Aut} A$, *причем ее факторы — элементарные p-группы. Цепочка обрывается на* $\Sigma_n = 1$ *тогда и только тогда, когда* p^n *является максимальным порядком элементов из* A. ∎

До сих пор мы имели дело со стабилизаторами цепочек. Существуют другие способы получения цепочек нормальных подгрупп группы $\operatorname{Aut} A$.

Вернемся к рассмотрению цепочки ( ) и положим

$$\Gamma_\sigma = \{\alpha \in \operatorname{Aut} A \mid \alpha a = a \quad \text{при всех} \quad a \in p^\sigma A\}.$$

Мы получаем вполне упорядоченную возрастающую цепочку нормальных подгрупп группы $\Gamma = \operatorname{Aut} A$:

$$1 = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_\sigma \subseteq \Gamma_{\sigma+1} \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_\tau = \Gamma. \tag{6}$$

Следующий результат дает некоторую информацию об этой цепочке.

Предложение 114.8. *Пусть A — редуцированная p-группа. Если n — натуральное число, $n < \tau$, то $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ и $\Gamma/\Gamma_n \cong \operatorname{Aut} p^n A$.*

Если A — тотально проективная p-группа, то $\Gamma_\sigma \subset \Gamma_{\sigma+1}$ и $\Gamma/\Gamma_\sigma \cong \operatorname{Aut} p^\sigma A$ для каждого порядкового числа $\sigma < \tau$.

Ввиду предложения 113.3 [теоремы 83.4] достаточно установить только строгое включение $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ [$\Gamma_\sigma \subset \Gamma_{\sigma+1}$] при $n = 0$ [$\sigma = 0$]. Группа A обладает циклическим слагаемым $\langle a \rangle$ порядка, скажем, p^k, $A = \langle a \rangle \oplus C$. Тогда автоморфизм группы A, являющийся тождественным на подгруппе C и действующий как умножение на $1 + p^{k-1}$ на подгруппе $\langle a \rangle$, принадлежит Γ_1, но не принадлежит Γ_0, если только $k \geqslant 2$. В оставшемся случае A — элементарная p-группа и $\Gamma_1 = \Gamma$.

Соответствие $\alpha \mapsto \alpha_\sigma = \alpha \mid p^\sigma A$ является гомоморфизмом $\operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} p^\sigma A$ с ядром Γ_σ. Ввиду предложения 113.3 и теоремы 83.4 [или только теоремы 83.4] в обоих указанных случаях этот гомоморфизм сюръективен. ■

Наша основная цель — получить сведения о факторах $\Gamma_{\sigma+1}/\Gamma_\sigma$ цепочки (6). Для этого мы определим две нормальные подгруппы группы Γ между Γ_σ и $\Gamma_{\sigma+1}$. Положим

$$\Gamma_\sigma^* = \{\alpha \in \Gamma_{\sigma+1} \mid \alpha a = a \quad \text{при всех } a \in p^\sigma A[p]\}$$

и

$$\Gamma_\sigma^{**} = \{\alpha \in \Gamma_{\sigma+1} \mid \alpha a - a \in p^{\sigma+1} A \quad \text{при} \quad \text{всех } a \in p^\sigma A[p]\}.$$

Это нормальные подгруппы группы Γ и, очевидно, $\Gamma_\sigma \subseteq \Gamma_\sigma^* \subseteq \Gamma_\sigma^{**} \subseteq \Gamma_{\sigma+1}$. Используя обозначения $f_\sigma(A)$ для σ-х инвариантов Ульма — Капланского группы A и положив $P_\sigma = p^\sigma A[p]$, докажем, что верна

Теорема 114.9 (Фукс [20]). *Факторгруппы $\Gamma_\sigma^*/\Gamma_\sigma$, $\Gamma_\sigma^{**}/\Gamma_\sigma^*$ и $\Gamma_{\sigma+1}/\Gamma_\sigma^{**}$ изоморфны подгруппам следующих групп соответственно: $\prod_\mathfrak{r} P_\sigma$, где $\mathfrak{r} = r(p^{\sigma+1}A/p^{\sigma+2}A)$; $\prod_\mathfrak{r} P_{\sigma+1}$, где $\mathfrak{r} = f_\sigma(A)$; $\operatorname{GL}(f_\sigma(A), p)$.*

Если σ — натуральное число или A — тотально проективная группа, то эти факторгруппы изоморфны самим указанным группам.

Запишем $p^\sigma A = S_\sigma \oplus C$, где $p^{\sigma+1}A$ — существенная подгруппа группы C. Каждый автоморфизм $\alpha \in \Gamma_\sigma^*$ индуцирует некоторый автоморфизм на $p^\sigma A$, а $1 - \alpha$ индуцирует отображение группы $C/p^{\sigma+1}A$ в группу P_σ, а именно χ_α: $c + p^{\sigma+1} A \mapsto (1 - \alpha) c$. Легко проверить,

что соответствие $\alpha \mapsto \chi_\alpha$ является гомоморфизмом $\Gamma_\sigma^* \to \mathrm{Hom}\,(C/p^{\sigma+1}A, P_\sigma)$, ядро которого состоит из всех автоморфизмов α, для которых $(1-\alpha)C=0$, т. е. равно Γ_σ. Поскольку $C/p^{\sigma+1}A \cong p^{\sigma+1}A/p^{\sigma+2}A$, группа $\Gamma_\sigma^*/\Gamma_\sigma$ действительно изоморфна некоторой подгруппе декартова произведения $r\,(p^{\sigma+1}A/p^{\sigma+2}A)$ групп, изоморфных P_σ.

Каждый автоморфизм $\alpha \in \Gamma_\sigma^{**}$ дает отображение ψ_α: $x \mapsto (1-\alpha)\,x$ группы S_σ в группу $P_{\sigma+1}$. Соответствие $\alpha \mapsto \psi_\alpha$ является гомоморфизмом $\Gamma_\sigma^{**} \to \mathrm{Hom}\,(S_\sigma, P_{\sigma+1})$ с ядром Γ_σ^* и второе утверждение теоремы следует из равенства $r\,(S_\sigma) = f_\sigma\,(A)$.

Каждый автоморфизм $\alpha \in \Gamma_{\sigma+1}$ индуцирует автоморфизм $\bar{\alpha}$ на S_σ, заданный равенствами $\alpha s = \bar{\alpha} s + x$, где s, $\bar{\alpha} s \in S_\sigma$, $x \in P_{\sigma+1}$. Отображение $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ является гомоморфизмом $\Gamma_{\sigma+1} \to \mathrm{GL}\,(f_\sigma\,(A), p)$, ядро которого совпадает с Γ_σ^{**}. Отсюда мы сразу получаем третье утверждение.

Последнее утверждение теоремы можно легко доказать, применяя предложение 113.3 и теорему 83.4. Доказательство проводится непосредственным образом и предоставляется читателю. ∎

Упражнения

1. Если A — группа без кручения и G — существенная подгруппа группы A, то стабилизатором цепочки $0 \subset G \subseteq A$ является одноэлементная подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,A$.

2. Для группы без кручения A стабилизатор любой цепочки в A — группа без кручения.

3. Пусть Θ — стабилизатор цепочки $\{X_i\}$ подгрупп группы A. Выяснить, как он связан со стабилизатором ее подцепочки и со стабилизатором цепочки $\{X_i \cap Y\}$, где Y — характеристическая подгруппа группы A.

4. Пользуясь методом доказательства предложения 114.1, показать, что если A — прямая сумма циклических p-групп, то φ из (2) — сюръективное отображение.

5. Показать, что для ограниченной p-группы A [скажем, $p^kA = 0$] Δ^* — разрешимая p-группа. Найти верхнюю грань для класса разрешимости через показатели k. [*Указание*: доказательство предложения 114.5.]

6. Если автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}\,A$ индуцирует тождественное отображение на группе $p^\sigma A/p^{\sigma+1}A$, то он также индуцирует тождественное отображение на группе $p^{\sigma+n}A/p^{\sigma+n+1}A$ при любом $n \geqslant 1$.

7. Показать, что в цепочке (6) объединение $\bigcup_{\rho<\sigma} \Gamma_\rho$ не обязано совпадать с Γ_σ для предельных чисел σ. [*Указание*: рассмотреть неограниченную прямую сумму циклических p-групп.]

8. Известно, что группа $\mathrm{GL}\,(\mathfrak{m}, p)$ является разрешимой тогда и только тогда, когда или (1) $\mathfrak{m} = 1$, или (2) $p = 2, 3$ и $\mathfrak{m} = 2$. Используя этот факт, показать, что для ограниченной p-группы A группа $\mathrm{Aut}\,A$ разрешима тогда и только тогда, когда A — конечная группа

и ее инварианты не превосходят 2 в случае $p = 2, 3$ и не превосходят 1 в случае $p \geqslant 5$.

9 (Хилл [23]). Пусть A — прямая сумма циклических p-групп. Всякий автоморфизм группы $A[p^n]$, который сохраняет высоты [взятые в A], может быть продолжен до автоморфизма группы A. [*Указание*: продолжить его до автоморфизма группы $A[p^{n+1}]$.]

10*. Привести пример, когда φ из (2) не является эпиморфизмом.

11 (Мадер [2]). Пусть A — делимая p-группа и Σ_n — нормальная подгруппа $\operatorname{Aut} A$, состоящая из всех автоморфизмов группы A, которые оставляют на месте элементы из $A[p^n]$. Показать, что $\operatorname{Aut} A/\Sigma_n \cong \operatorname{Aut} A[p^n]$.

§ 115. Группы автоморфизмов периодических групп

Теперь мы можем попытаться ответить на основной вопрос: до какой степени определяются группы своими группами автоморфизмов? Аналог теоремы 108.1 остается верным во всяком случае для p-групп, где $p \geqslant 5$: эти группы должны быть изоморфными, если их группы автоморфизмов изоморфны.

Доказательство этого результата носит более изощренный характер, поскольку мощная техника доказательства теоремы 108.1, использовавшая проекции, теперь не применима. Вместо этого приходится использовать инволюции, менее связанные с прямыми разложениями. Мы удовлетворимся доказательством более слабого результата.

Вначале рассмотрим центр группы автоморфизмов периодической группы. Центр группы Γ будем обозначать через $\mathfrak{z}\Gamma$. В силу п. ж) из § 113 можно без потери общности ограничиться рассмотрением p-групп.

Теорема 115.1 (Бэр [5]). *Центр группы автоморфизмов p-группы A состоит из умножений на p-адические единицы, если A — неограниченная группа, и из умножений на целые числа k, где $(k, p) = 1$, $1 \leqslant k < p^r$, если p^r — наименьшая верхняя грань порядков элементов из A. Имеется, однако, одно исключение: если A является 2-группой вида*

$$A = Z(2^\infty) \oplus Z(2^r) \oplus G, \quad \text{где} \quad 2^{r-1}G = 0,\ r \geqslant 1, \tag{1}$$

то $\mathfrak{z} \operatorname{Aut} A$ — прямое произведение мультипликативной группы диадических единиц и циклической группы порядка 2. Последняя группа может, например, порождаться автоморфизмом δ группы A, который действует тривиально на $Z(2^\infty)$ и G, а всякий образующий b группы $Z(2^r)$ переводит в $b + a_0$, где a_0 — единственный элемент из A, имеющий порядок 2 и бесконечную высоту.

Непосредственно проверяется [и сразу следует из теоремы 108.1], что умножения на p-адические единицы должны содержаться в $\mathfrak{z} \operatorname{Aut} A$. В указанном исключительном случае элемент a_0 остается на месте при всех автоморфизмах, и отсюда сразу следует, что автоморфизм δ,

описанный в формулировке теоремы, коммутирует со всеми автоморфизмами группы A.

Пусть теперь γ — центральный элемент из $\operatorname{Aut} A$, и пусть $A = B \oplus C$, а ε — такая инволюция, что $\varepsilon \mid B = 1_B$ и $\varepsilon \mid C = -1_C$. Для произвольного элемента $b \in B$ мы можем записать $\gamma b = b_0 + c_0$ ($b_0 \in B$, $c_0 \in C$). Тогда $b_0 + c_0 = \gamma\varepsilon b = \varepsilon\gamma b = b_0 - c_0$ влечет за собой $2c_0 = 0$. Это означает, что γ отображает подгруппу $2B$ в [и, значит, на] себя. Следовательно, квазициклические подгруппы и, в случае $p \neq 2$, все прямые слагаемые группы A отображаются при γ на себя.

Если η: $B \to C$ — гомоморфизм, то соответствие

$$\alpha: b \mapsto b + \eta b, \ c \mapsto c \ (b \in B, \ c \in C)$$

является автоморфизмом группы A. Равенство $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ дает $\eta b_0 = \gamma\eta b$, и мы получаем, что γ переводит $\operatorname{Im} \eta$ в себя. Если χ: $C \to B$ — гомоморфизм, то соответствие

$$\beta: b \mapsto b, \ c \mapsto c + \chi c \quad (b \in B, \ c \in C)$$

является автоморфизмом группы A и, поскольку $\beta\gamma = \gamma\beta$, справедливо равенство $\chi c_0 = 0$. Следовательно, элемент c_0 лежит в ядре каждого из гомоморфизмов $C \to B$.

Сначала рассмотрим случай $B = \langle b \rangle$, где порядок группы B равен, скажем, p^n. Тогда $\gamma b = kb + c_0$ для некоторого целого k, причем $1 \leqslant k < p^n$. В силу $\eta kb = \gamma\eta b$ получаем, что γ действует в группе $\operatorname{Im} \eta$ как умножение на k. Поскольку η может быть произвольным гомоморфизмом из B в C, мы видим, что γ действует как умножение на k в группе $C[p^n]$, и, значит, обязательно выполняется $(k, p) = 1$. Если C обладает циклическим слагаемым, порядок которого больше или равен p^n, то мы также можем вывести, что $\gamma b = kb$. Таким образом, γ действует как умножение на k в группе $A[p^n]$. Если в A имеется неограниченная базисная подгруппа, то, как сразу видно, должна существовать такая p-адическая единица ρ, что γ есть умножение на ρ [в каждой из подгрупп $A[p^n]$ и, значит] в группе A.

Теперь рассмотрим случай $B = Z(p^\infty)$. Мы знаем, что γ индуцирует некоторый автоморфизм на группе B, являющийся ввиду примера 3 из § 113 умножением на некоторую p-адическую единицу ρ. Если группа C нередуцированная, то для гомоморфизма η: $B \to C$ имеем $\eta\rho = \gamma\eta$, откуда следует, что γ также является умножением на ρ в группе $\operatorname{Im} \eta$. Мы заключаем, что γ всегда действует как умножение на p-адическую единицу ρ в делимой части группы A.

Остался случай $A = D \oplus E$, где D — делимая, а $E \neq 0$ — ограниченная группы, скажем $p^r E = 0$, но $p^{r-1} E \neq 0$. Если $p \geqslant 3$ или если E обладает по крайней мере двумя независимыми элементами порядка p^r, то так же, как и раньше, мы получаем, что γ переводит каждую циклическую подгруппу группы A в себя и должно быть умножением на некоторую p-адическую единицу ρ или на целое число k, взаимно простое с p, $1 \leqslant k < p^r$, в соответствии с тем, нулевая группа D или нет. Предположим, что $p = 2$ и $E = \langle b \rangle \oplus E'$, где $o(b) = 2^r$

и $2^{r-1}E' = 0$. По доказанному мы можем быть уверены, что γ есть умножение на диадическую единицу ρ на группе D и умножение на целое число, сравнимое с ρ по модулю 2^{r-1}, на группе $\langle 2b\rangle \oplus E'$. Запишем $\gamma b = kb + a_0$, где $a_0 \in D \oplus E'$, $2a_0 = 0$. Если элемент a_0 имеет бесконечную высоту, то существует гомоморфизм χ: $D \oplus E' \to \langle b \rangle$, для которого $\chi a_0 \neq 0$, в противоречие с доказанным выше. Если $0 \neq \neq a_0 \in D_0 \cong Z(2^\infty)$ и $D = D_0 \oplus D_1$, где $D_1 \neq 0$, то применим то же рассуждение к разложению $A = (\langle b \rangle \oplus D_1) \oplus (E' \oplus D_0)$: в силу существования мономорфизма χ: $D_0 \to D_1$ из $a_0 \neq 0$ следует, что $D \cong \cong Z(2^\infty)$ и a_0 — единственный элемент из $A[2]$, имеющий бесконечную высоту. Значит, A — группа вида (1) и γ — либо умножение на диадическую единицу, либо композиция умножения на диадическую единицу и автоморфизма δ. Доказательство завершено. ∎

С помощью примеров 1 и 2 из § 128 мы получаем, что для p-группы A при $p \neq 2$

$$\mathfrak{z}\,\mathrm{Aut}\,A \cong Z(p-1) \times J_p \quad \text{или}$$

$$\mathfrak{z}\,\mathrm{Aut}\,A \cong Z(p-1) \times Z(p^{k-1}). \tag{2}$$

Поскольку группа коммутативна тогда и только тогда, когда она совпадает со своим центром, из предыдущей теоремы легко вывести

Следствие 115.2 (Шатле [1], Бэр [5]). *Группа автоморфизмов p-группы A коммутативна тогда и только тогда, когда A либо является коциклической группой, либо изоморфна группе $Z(2^\infty)+Z(2)$.* ∎

Перед тем как взяться за решение поставленного вопроса об изоморфных группах автоморфизмов, сделаем несколько замечаний. Через A мы будем обозначать p-группу, где $p \geqslant 3$.

а) Из теоремы 115.1 следует, что группа A является ограниченной и p^n является наибольшим из порядков ее элементов тогда и только тогда, когда $\mathfrak{z}\,\mathrm{Aut}\,A \cong Z(p^{n-1}(p-1))$.

б) Пусть ε — инволюция группы A, $\varepsilon \neq \pm 1$. Тогда для разложения $A = A_\varepsilon^+ \oplus A_\varepsilon^-$ легко выяснить, имеет ли место ограниченность одного из слагаемых или обоих, и если да, то каковы точные верхние грани порядков элементов. Действительно, в силу равенства $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\,\{\varepsilon\} = = \mathfrak{z}\,\mathrm{Aut}\,A_\varepsilon^+ \times \mathfrak{z}\,\mathrm{Aut}\,A_\varepsilon^-$ и теоремы 115.1 группа $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\,\{\varepsilon\}$ не содержит подгрупп, изоморфных J_p, или содержит такую подгруппу или прямое произведение двух групп, изоморфных J_p, в соответствии с тем, являются ли обе группы A_ε^+ и A_ε^- неограниченными или ограниченной будет одна из них или обе. С помощью п. а) легко определяются границы порядков элементов для ограниченных компонент.

в) Если $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где $A_i \neq 0$, и $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$—система инволюций, принадлежащая этому разложению, то группа $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\,\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ содержит ровно 2^k инволюций. Это следует из п.н) § 113 и того факта, что группа $\mathfrak{z}\,\mathrm{Aut}\,A_k$ не содержит инволюций, отличных от ± 1.

Инволюция ε называется *экстремальной*, если одна из групп A_ε^+ и A_ε^- отлична от нуля и неразложима. Если ζ — произвольная инволюция, коммутирующая с экстремальной инволюцией ε, то разложение группы A, указанное в п. л) из § 113, может содержать не более трех ненулевых слагаемых. С другой стороны, если инволюция ε не является экстремальной, то легко найти инволюцию ζ, которая коммутирует с ε и в разложении п. л) из § 113 дает четыре ненулевых слагаемых. Таким образом, справедливо утверждение

г) Инволюция ε экстремальна тогда и только тогда, когда в группе $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\,\{\varepsilon, \zeta\}$ содержится не более 8 инволюций при любом $\zeta \in \mathfrak{c}\,\{\varepsilon\}$. Мы получаем, что экстремальные инволюции переходят в экстремальные инволюции при любом изоморфизме между группами автоморфизмов.

Лептин [2] доказал, что *если $p \geqslant 5$ и A, C — некоторые p-группы с изоморфными группами автоморфизмов, то группы A и C изоморфны.* Мы приводим более слабый результат, доказательство которого проще.

Теорема 115.3 (Лептин [2]). *Пусть A, C — это p-группы, где $p \geqslant 3$. Если $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} C$, то группы A и C обладают изоморфными базисными подгруппами и изоморфными делимыми частями.*

Пусть φ: $\operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} C$ — изоморфизм. Пусть $B = \oplus B_n$, где $B_n = \oplus Z(p^n)$ — базисная подгруппа группы A. Запишем $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n^*$, где $A_n^* = p^n A + B_{n+1} + B_{n+2} + \ldots$ [см. теорему 32.4]. Предположим, что B — неограниченная группа. Представив $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ в виде $\bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$, где $o(a_i) \leqslant p^n$, рассмотрим инволюции ε_i, ε, принадлежащие разложению

$$A = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle \oplus A_n^*. \tag{3}$$

Вначале мы установим некоторые свойства системы $\{\varepsilon_i, \varepsilon\}$, которые позволяют доказать, что эта система принадлежит разложению, в котором $\oplus \langle a_i \rangle$ — максимальное p^n-ограниченное слагаемое группы A. Очевидно, $\{\varepsilon_i, \varepsilon\}$ — коммутативная система инволюций, где каждая ε_i — экстремальная инволюция. Если η — экстремальная инволюция из $\mathfrak{c}\,\{\varepsilon_i, \varepsilon\}$, отличная от всех ε_i, и если, скажем, A_η^- — неразложимая группа, то в силу п. л) из § 113 мы получаем, что A_η^- — подгруппа каждой из групп $\bigoplus_{j \neq i} \langle a_j \rangle \oplus A_n^*$. Следовательно, $A_\eta^- \subseteq A_n^*$ и A_η^- — неразложимое слагаемое в A_n^*, $|A_\eta^-| \geqslant p^{n+1}$. Если инволюция ε не является экстремальной, то система $\{\varepsilon_i, \varepsilon, \eta\}$ дает такое продолжение разложения (3), что группа

$$\mathfrak{z}\mathfrak{c}\,\{\varepsilon_i, \varepsilon, \eta\} / \mathfrak{z}\mathfrak{c}\,\{\varepsilon_i, \varepsilon\} \tag{4}$$

изоморфна либо циклической группе порядка $p^k(p-1)$, где $k \geqslant n$, либо группе $Z(p-1) \times J_p$. Очевидно, что если бы группа A_n^* обладала циклическим слагаемым порядка не больше p^n, то мы могли бы

подобрать такое η, для которого группа (4) была бы циклической порядка $p^k (p-1)$, где $k \leqslant n-1$.

Теперь мы переходим к рассмотрению группы $\mathrm{Aut}\, C$ как образа изоморфизма φ. Очевидно, $\varphi(\varepsilon_i)$ — экстремальная инволюция при каждом $i \in I$. Таким образом, $\varphi(\varepsilon_i)$ дает прямое разложение $C = C^+_{\varphi(\varepsilon_i)} \oplus C^-_{\varphi(\varepsilon_i)}$, где одно из слагаемых, скажем, C_i — неразложимая группа, другое слагаемое обозначим через C'_i. Благодаря п. б) мы знаем границы порядков элементов для слагаемых; поскольку мы предположили, что B — неограниченная группа, сразу получаем $C_i \cong \langle a_i \rangle$. Далее по п. м) из § 113 для всякого конечного набора индексов $i_1, \ldots, i_k$ имеет место разложение $C = C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_k} \oplus (C'_{i_1} \cap \ldots \cap C'_{i_k})$. Таким образом, $C' = \sum\limits_i C_i = \bigoplus\limits_i C_i$ — сервантная подгруппа группы C. Она является ограниченной и, значит, служит для C прямым слагаемым. Имеем также $C = C^-_{\varphi(\varepsilon)} \oplus C^+_{\varphi(\varepsilon)}$, где, скажем, первое слагаемое является p^n-ограниченным. Так как $\varphi(\varepsilon_i)$ коммутирует с $\varphi(\varepsilon)$, то в силу п. л) из § 113 каждое из слагаемых C_i содержится в одном из слагаемых последнего разложения. Включение $C_i \subseteq C^+_{\varphi(\varepsilon)}$ невозможно, иначе мы пришли бы к существованию такой инволюции $\eta' \in \mathfrak{c}\, \{\varphi(\varepsilon)\}$, что группа $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\, \{\varphi(\varepsilon), \eta'\}$ не изоморфна никакой из групп $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\, \{\varepsilon, \eta\}$ при всех $\eta \in \mathfrak{c}\, \{\varepsilon\}$. Отсюда следует, что $C' \subseteq C^-_{\varphi(\varepsilon)}$, и C' — слагаемое в группе $C^-_{\varphi(\varepsilon)}$. Если бы C' было собственным слагаемым, то нашлась бы такая инволюция $\eta' \in \mathfrak{c}\mathfrak{z}\, \{\varphi(\varepsilon_i), \varphi(\varepsilon)\}_{i \in I}$, что факторгруппа, соответствующая группе (4), была бы изоморфна группе $Z(p^k (p-1))$, где $k \leqslant n-1$, а это невозможно.

Таким образом, $C = \bigoplus\limits_i C_i \oplus C^+_{\varphi(\varepsilon)}$, где $p^n C_i = 0$ при всех i. Из сказанного в предыдущем абзаце о системе $\{\varepsilon_i, \varepsilon\}$ получаем, что группа $C^+_{\varphi(\varepsilon)}$ не содержит ни одного циклического слагаемого, порядок которого не превосходит p^n. Следовательно, $\oplus C_i$ — максимальное p^n-ограниченное слагаемое группы C.

Заметим, что инволюции ε_i и $\varphi(\varepsilon_i)$ определяют изоморфные неразложимые слагаемые групп A и C соответственно. Отсюда вытекает, что при каждом n максимальные p^n-ограниченные слагаемые групп A и C изоморфны. Пользуясь теоремой 33.2, сразу получаем изоморфизм базисных подгрупп групп A и C.

Если заменить разложение (3) разложением $A = \bigoplus\limits_j D_j \oplus G$, где $D_j \cong Z(p^\infty)$, а G — редуцированная группа, то можно провести аналогичные рассуждения. Легко понять, как в терминах инволюций формулируется отсутствие в группе G квазициклических слагаемых. Тем самым доказательство теоремы 115.3 завершено для групп A с неограниченными базисными подгруппами.

Если группа A обладает ограниченной базисной подгруппой B, скажем $p^m B = 0$, то можно записать $A = \bigoplus\limits_i \langle a_i \rangle \oplus \bigoplus\limits_j D_j$, где $D_j \cong Z(p^\infty)$, и рассмотреть соответствующую систему инволюций $\{\varepsilon_i, \eta_j\}$. Тогда $\{\varphi(\varepsilon_i), \varphi(\eta_j)\}$ будет максимальной коммутативной систе-

мой экстремальных инволюций, для которой соответствующие неразложимые компоненты являются группами $Z(p^\infty)$ или циклическими группами порядка не выше p^m. Мы заключаем, как и выше, что эти неразложимые компоненты порождают сервантную подгруппу C', которая должна быть прямым слагаемым в группе C; следовательно, $C' = C$ и C — прямая сумма коциклических p-групп. Тогда группа $\mathfrak{c}\ \{\varphi(\varepsilon_i),\ \varphi(\eta_j)\}$ является декартовым произведением групп автоморфизмов этих коциклических групп, и изоморфность групп A и C очевидна, если A — конечная прямая сумма коциклических групп. Если группа A не такая, сначала надо установить, что инволюции $\varphi(\eta_i)$ соответствуют квазициклическим слагаемым, а затем использовать разложения (3) при $n = 1, \ldots, m-1$. ∎

Доказательство изоморфности групп A и C, предложенное Лептином, основывается на тонком исследовании стабилизаторов прямых разложений. Основная трудность этого доказательства связана со следующим фактом. Если ε и $\varphi(\varepsilon)$ — инволюции, принадлежащие разложениям $A = A_1 \oplus A_2$ и $C = C_1 \oplus C_2$ соответственно, то стабилизатор цепочки $0 \subset A_1 \subset A$ отображается при φ либо в стабилизатор цепочки $0 \subset C_1 \subset C$, либо в стабилизатор цепочки $0 \subset C_2 \subset C$. Возникает неоднозначность, устранить которую не всегда удается, даже если известно, что A_1, C_1 — ограниченные группы, а A_2, C_2 — неограниченные. Хотелось бы получить более короткое доказательство важной теоремы Лептина, и еще лучше, если бы оно включало случаи $p = 2$ и $p = 3$.

Упражнения

1 (Бэр [5]). (а) Множество элементов, переходящих в себя при всех автоморизмах p-группы A, состоит не из одного нуля тогда и только тогда, когда A является 2-группой, обладающей единственным элементом $g \neq 0$ максимальной высоты.

(б) В указанном случае это множество совпадает с $\langle g \rangle$.

2 (Бэр [5]). (а) Пусть A — сепарабельная p-группа, $p \geqslant 3$, и C — подгруппа группы A. Множество всех элементов группы A, которые остаются на месте при всех автоморфизмах группы A, переводящих в себя все элементы из C, совпадает с C^- — замыканием подгруппы C в p-адической топологии.

(б) При $p = 2$ для случая, указанного в упр. 1, к подгруппе C^- должна быть присоединена подгруппа $\langle g \rangle$ из упр. 1.

3 (Бойер [1], Э. Уокер [4], Кхаббаз [1], Мадер [1], Хилл [4]). (а) Если группа A не является редуцированной, то $|\operatorname{Aut} A| = 2^{|A|}$.

(б) Если A — бесконечная редуцированная группа, то $|\operatorname{Aut} A| = 2^{|B|}$, где B — базисная подгруппа группы A.

4 (Лептин [2]). Пусть ε — инволюция p-группы A, где $p \geqslant 3$. Слагаемые A_ε^+ и A_ε^- обладают изоморфными ненулевыми слагаемыми тогда и только тогда, когда существуют такая система $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ коммутирующих инволюций из $\mathfrak{c}\ \{\varepsilon\}$ и такая инволюция $\eta \in \mathfrak{c}\ \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$,

что $\varepsilon = \varepsilon_3\varepsilon_4$ и $\eta\varepsilon_2 = \varepsilon_3\eta$. [*Указание*: пусть $A_\varepsilon^+ = A_1 \oplus A_2$, $A_\varepsilon^- = A_3 \oplus A_4$; если $A_2 \cong A_3$, выбрать автоморфизм η, меняющий местами A_2 с A_3; для доказательства обратного утверждения воспользоваться матричным представлением.]

5. С помощью второй части доказательства теоремы 115.3 показать, что если A — прямая сумма циклических p-групп и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} C$, где C — некоторая p-группа, то $A \cong C$.

6 (Лептин [2]). Пусть A — некоторая p-группа и C — некоторая q-группа, причем для простых чисел p и q выполняются неравенства $3 \leqslant p < q$. Тогда изоморфизм $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} C$ имеет место в том и только в том случае, когда $A = Z(p^k)$, $C = Z(q)$ и $p^{k-1}(p-1) = q-1$.

7 (Бэр). p-группа A ($p \geqslant 3$) удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда все периодические подгруппы группы $\operatorname{Aut} A$ являются конечными. [*Указание*: если число независимых слагаемых бесконечно, то в централизаторе соответствующей системы инволюций содержится бесконечная периодическая подгруппа; доказательство обратного утверждения свести к случаю делимых групп и рассмотреть матричное представление.]

8 (Хаузен [2]). Группа автоморфизмов группы, удовлетворяющей условию минимальности, остаточно конечна. [*Указание*: нормальные подгруппы, состоящие из всех автоморфизмов, оставляющих на месте все элементы из $A[p^k]$, имеют конечный индекс, и пересечение их тривиально.]

9 (Тарватер [3]). Пусть A — прямая сумма коциклических групп одного и того же порядка. Автоморфизм группы A, отображающий подгруппу $G \subseteq A$ на подгруппу $H \subseteq A$, существует тогда и только тогда, когда

$$G \cong H \quad \text{и} \quad A[p]/G[p] \cong A[p]/H[p]$$

10 (Меджиббен [5]). (а) Пусть $G = A(r_0, \ldots, r_n, \ldots)$ — широкая подгруппа p-группы A и φ — мономорфизм группы G в некоторую p-группу C. Мономорфизм φ может быть продолжен до изоморфизма между A и C в том и только в том случае, когда (1) $f_n(A) = f_n(C)$ при $n \leqslant r_0$; (2) φ сохраняет высоты; (3) $\operatorname{Im} \varphi$ — широкая подгруппа группы C.

(б) Всякий автоморфизм широкой подгруппы p-группы A, который сохраняет высоты в A, может быть продолжен до автоморфизма группы A.

§ 116. Группы автоморфизмов групп без кручения

В то время как p-группы при $p \geqslant 5$ определяются с точностью до изоморфизма своими группами автоморфизмов, группы автоморфизмов групп без кручения дают мало сведений о самих этих группах. Действительно, существуют большие группы без кручения с той же группой автоморфизмов, что и у группы Z, и даже группы ранга 1

не могут быть восстановлены по своим группам автоморфизмов [см. упр. 1]. К тому же в противоположность случаю периодических групп группа автоморфизмов бесконечной группы A не обязана быть бесконечной, если A без кручения.

Только в незначительно более широком случае, чем случай конечных групп, мы имеем подробное представление о группах, являющихся группами автоморфизмов групп без кручения. Мы приводим здесь некоторые результаты, полученные Холлетом и Хиршем [1, 2].

В течение этого параграфа A — группа без кручения и

$$\Gamma = \operatorname{Aut} A.$$

а) *Если Γ — периодическая группа, то кольцо $\mathsf{E}(A)$ не содержит нильпотентных элементов.*

Если для эндоморфизма $\eta \in \mathsf{E}(A)$ выполняется $\eta^2 = 0$, то эндоморфизмы $1 + \eta$ и $1 - \eta$ являются взаимно обратными и, следовательно, лежат в группе Γ. Но $(1 + \eta)^n = 1 + n\eta \neq 1$, иначе $\eta = 0$, так как $\operatorname{End} A$ — группа без кручения.

б) *Если Γ — периодическая группа, то всякая инволюция $\alpha \in \Gamma$ лежит в центре группы Γ.*

При любом эндоморфизме $\beta \in \mathsf{E}(A)$ эндоморфизмы $\varphi = (1 + \alpha)\beta(1 - \alpha)$ и $\psi = (1 - \alpha)\beta(1 + \alpha)$ являются нильпотентными, откуда $\varphi = 0 = \psi$ в силу п. а). Таким образом, $2(\alpha\beta - \beta\alpha) = \varphi - \psi = 0$ и, значит, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

в) *Если Γ — периодическая группа и элемент $\alpha \in \Gamma$ имеет нечетный порядок $n > 1$, то $n = 3$.*

Очевидно, это утверждение достаточно доказать для случая $n = p^k$, где p — простое число, не равное двум. Эндоморфизм $\beta = 1 - \alpha + \alpha^2 - + \ldots + \alpha^{n-3}$ является обратным к эндоморфизму

$$\gamma = \begin{cases} \alpha^2 - \alpha^4 + - \ldots + \alpha^{n+1}, & \text{если } n \equiv 1 \bmod 4, \\ \alpha^3 - \alpha^5 + - \ldots + \alpha^n, & \text{если } n \equiv -1 \bmod 4. \end{cases}$$

Следовательно, $\beta \in \Gamma$. Покажем, что элемент β имеет бесконечный порядок, если $n > 3$. Заметим, что эндоморфизм $\alpha^n - 1$ аннулирует группу A, и, значит, существует минимальный многочлен $g(\alpha)$ с целыми коэффициентами, аннулирующий группу A. Очевидно, $g(x)$ делит $x^{p^k} - 1$, но не делит $x^{p^{k-1}} - 1$. Из неприводимости p^k-го кругового многочлена $\Phi_n(x) = (x^{p^k} - 1)/(x^{p^{k-1}} - 1)$ следует, что $\Phi_n(x) \mid g(x)$. Пусть ζ — некоторый первообразный корень n-й степени из единицы. Мы получаем, что сопоставление $\alpha \mapsto \zeta$ может быть продолжено до кольцевого гомоморфизма $\mathsf{S}(\alpha) \to \mathsf{Q}(\zeta)$, где $\mathsf{S}(\alpha)$ — подкольцо кольца $\mathsf{E}(A)$, порожденное элементом α, а $\mathsf{Q}(\zeta)$ — расширение поля Q, полученное присоединением ζ. Этот гомоморфизм переводит β в комплексное число $1 - \zeta + \zeta^2 - \ldots + \zeta^{n-3} = (1 + \zeta^{n-2})(1 + \zeta)^{-1}$, модуль которого отличен от 1, иначе выполнялось бы

равенство $\zeta^{n-2} = \zeta$ или $\zeta^{n-2} = \bar{\zeta}$, откуда вытекало бы, что $n = 3$. Следовательно, образ элемента β, а значит, и сам элемент β имеет бесконечный порядок при $n > 3$.

г) *Если* Γ — *периодическая группа, то она не содержит элементов порядка* 8.

Действительно, если $\alpha \in \Gamma$ — элемент порядка 8, то в кольце $\mathsf{E}(A)$ эндоморфизмы $\beta = 1 + (1 - \alpha^4)(1 + \alpha - \alpha^3)$ и $\gamma = 1 + (1 - \alpha^4)(1 - \alpha + \alpha^3)$ являются взаимно обратными. Так же как и в п. в), мы можем показать, что подкольцо $\mathsf{S}(\alpha)$ кольца $\mathsf{E}(A)$, порожденное элементом α, обладает гомоморфизмом в поле $\mathsf{Q}(\zeta)$, причем $\alpha \mapsto \zeta$, где $\zeta = (1 + i)/\sqrt{2}$ — первообразный корень 8-й степени из единицы. При этом гомоморфизме элемент β отображается в элемент $3 + 2\sqrt{2} \in \mathsf{Q}(\zeta)$, а последний имеет бесконечный порядок, следовательно, β не может быть элементом конечного порядка.

д) *Если* Γ — *периодическая группа, то не всякая инволюция из* Γ *содержится в циклической подгруппе порядка* 12.

Мы утверждаем, что ни для какого элемента $\alpha \in \Gamma$ порядка 12 не выполняется $\alpha^6 = -1$. В противном случае эндоморфизм $\beta = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4$ является обратным к эндоморфизму $\gamma = 1 - \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4 - \alpha^5$, и остается показать, что тогда элемент β не имеет конечного порядка. Мы снова исследуем многочлен $g(x)$ с целыми коэффициентами, минимальный по отношению к свойству $g(\alpha)A = 0$. Заметим, что $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$ — разложение на неприводимые множители и $(\alpha^2 + 1)A \neq 0$, так как $\alpha^2 = -1$ невозможно. Отсюда следует, что многочлен $\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$ делит многочлен $g(x)$. Как и выше, мы получаем гомоморфизм, переводящий β в $1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 = (1 + \zeta^5)(1 + \zeta)^{-1}$, где ζ — первообразный корень 12-й степени из единицы. Поскольку $|1 + \zeta^5| \neq |1 + \zeta|$, элемент β должен иметь бесконечный порядок.

е) *Если* Γ — *по-прежнему периодическая группа, то силовские* 3-*подгруппы группы* Γ *коммутативны.*

В силу п. в) силовские 3-подгруппы S являются подгруппами экспоненты 3. Таким образом, с помощью известного результата о некоммутативных группах мы получаем, что для любых двух элементов $\alpha, \beta \in S$, а также их коммутатора $\gamma = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = [\alpha, \beta]$ выполняются равенства $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = 1$ и $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, $\beta\gamma = \gamma\beta$. Теперь мы можем применить п. з) из § 106 для эндоморфизмов $1 + \gamma + \gamma^2$, $1 - \gamma$ и целого числа $m = 3$ [заметим, что $(1 + \gamma + \gamma^2) + (2 + \gamma)(1 - \gamma) = 3$]. Имеем $3A \subseteq B \oplus C$, где $B = \operatorname{Ker}(1 + \gamma + \gamma^2)$ и $C = \operatorname{Ker}(1 - \gamma)$ — вполне характеристические подгруппы группы A. Аналогичным образом, получаем $3B \subseteq [\operatorname{Ker}(1 + \alpha + \alpha^2) \cap B] \oplus [\operatorname{Ker}(1 - \alpha) \cap B]$.

В последней прямой сумме групп автоморфизм α, а значит, и автоморфизм γ индуцируют тождественное отображение на втором слагаемом. Следовательно, это слагаемое содержится в группе C, т. е. равно нулю. Мы заключаем, что $(1 + \alpha + \alpha^2)(1 - \gamma) = 0$, т. е. $\gamma + \gamma\alpha +$

$+ \gamma\alpha^2 = 1 + \alpha + \alpha^2$. Двукратное сопряжение с помощью β дает $\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2 = 1 + \gamma\alpha + \gamma^2\alpha^2$ и $\gamma + \alpha + \gamma^2\alpha^2 = 1 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2$ [мы используем $\beta^{-1}\alpha\beta = \gamma\alpha$ и $\gamma^3 = 1$]. После сложения и сокращения получаем $3\gamma = 3$. Отсюда $\gamma = 1$, это и устанавливает коммутативность группы S.

ж) *Пусть $\alpha \in \Gamma$ — инволюция. Группа A обладает такой характеристической подгруппой B, что для гомоморфизма φ: $\Gamma \to \mathrm{Aut}\, B$, ставящего в соответствие элементам из Γ их ограничения на B, φ: $\gamma \mapsto \gamma \mid B$, выполняется $\varphi(\alpha) = -1$ и $|\varphi(\Gamma)|$ делит 24.*

Поскольку $\alpha^2 = 1$, мы можем применить п. з) из § 106 для эндоморфизмов $1 + \alpha$, $1 - \alpha$ и целого числа $m = 2$. Имеем $2A \subseteq B_1 \oplus C_1$, причем α есть -1 на группе $B_1 \neq 0$ и тождественное отображение на группе C_1. Пусть φ_1: $\Gamma \to \mathrm{Aut}\, B_1$ — гомоморфизм, ставящий в соответствие ограничения. Очевидно, к группе $\varphi_1(\Gamma)$ применимы п. в), г) и е). Покажем, что каждый элемент $\beta \in \varphi_1(\Gamma)$ порядка 2 лежит в центре группы $\mathrm{Aut}\, B_1$. Предположим противное, т. е. что для некоторого элемента $\gamma \in \mathrm{Aut}\, B_1$ выполняется $[\beta, \gamma] \neq 1$. Так как $\varphi = (1 + \beta)\gamma(1 - \beta)$ и $\psi = (1 - \beta)\gamma(1 + \beta)$ — нильпотентные эндоморфизмы группы B_1, то с помощью рассуждений п. б) и неравенства $[\beta, \gamma] \neq 1$ мы получаем, что либо $\varphi \neq 0$, либо $\psi \neq 0$, т. е. кольцо $\mathsf{E}(B_1)$ содержит ненулевые нильпотентные элементы. То же верно для кольца $\mathsf{E}(A)$ в противоречие с п. а).

Далее, пусть $\varphi_1(\Gamma)$ содержит кроме $\varphi_1(\alpha)$ еще один элемент β порядка 2. Аналогичным образом получаем, что $2B_1 \subseteq B_2 \oplus C_2$, где $\beta \mid B_2 = -1$, $\beta \mid C_2 = 1$ и B_2, C_2 — характеристические подгруппы [группы B_1 и, значит] группы A. Этот процесс приведет нас в конце концов к такой характеристической подгруппе B_0 группы A, что $\varphi_0(\alpha) = -1$ — единственный элемент порядка 2 в группе $\varphi_0(\Gamma)$. Поскольку конечная 2-группа с единственным элементом порядка 2 является либо циклической, либо обобщенной группой кватернионов, мы заключаем из п. г.), что силовские 2-подгруппы группы $\varphi_0(\Gamma)$ являются циклическими группами порядка 2 или 4 или группами кватернионов.

Следовательно, $|\varphi_0(\Gamma)| = 2^k 3^l$, где $k \leqslant 3$. Если $l > 1$, мы продолжаем действовать, как раньше, и выбираем элемент $\delta \in \varphi_0(\Gamma)$ порядка 3. Применяя п. з) из § 106 для эндоморфизмов $1 + \delta + \delta^2$, $1 - \delta$ и целого числа $m = 3$, получаем $3B_0 \subseteq B' \oplus C'$, где B', C' — такие характеристические подгруппы группы A, что $1 + \delta + \delta^2 \mid B' = 0$ и $\delta \mid C' = 1$. Если ограничение $\varphi_0(\Gamma)$ на группу B' содержит еще один элемент ε порядка 3, для которого $(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) B' \neq 0$, то мы продолжим этот процесс до тех пор, пока не получим такую характеристическую подгруппу B, что $1 + \beta + \beta^2 = 1 + \gamma + \gamma^2 = 0$ на B при любых двух элементах β, $\gamma \neq 1$ некоторой силовской 3-подгруппы группы $\varphi(\Gamma)$. Если $\gamma \neq \beta^{-1}$, то на подгруппе B также выполняется равенство $1 + \beta\gamma + (\beta\gamma)^2 = 0$. Таким образом,

$$-\beta\gamma = 1 + \beta^2\gamma^2 = 1 + (1 + \beta)(1 + \gamma) = 2 + \beta + \gamma + \beta\gamma,$$

а так как

$$(\beta-\gamma)^2=\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2=\beta^2+(2+\beta+\gamma)+\gamma^2=$$
$$=(1+\beta+\beta^2)+(1+\gamma+\gamma^2)=0,$$

то мы получаем $\beta=\gamma$ в силу п. а). Следовательно, силовская 3-подгруппа группы $\varphi(\Gamma)$ имеет порядок 3 и $|\varphi(\Gamma)|$ делит 24. Тем самым доказательство п. ж) завершено.

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему:

Теорема 116.1 (Холлет и Хирш [1]). *Если конечная группа* Γ *является группой автоморфизмов группы без кручения* A, *то группа* Γ *изоморфна некоторой подгруппе конечного прямого произведения групп следующих типов*:

1) *циклические группы порядков* 2, 4 *или* 6;
2) *группа кватернионов* $Q_8=\langle\alpha,\ \beta\mid\alpha^2=\beta^2=(\alpha\beta)^2\rangle$ *порядка* 8;
3) *дициклическая группа* $DC_{12}=\langle\alpha,\beta\mid\alpha^3=\beta^2=(\alpha\beta)^2\rangle$ *порядка* 12;
4) *бинарная группа тетраэдра* $BT_{24}=\langle\alpha,\ \beta\mid\alpha^3=\beta^3=(\alpha\beta)^2\rangle$ *порядка* 24.

Повторное применение процедуры п. ж) дает при некотором целом m включение

$$mA\subseteq C_1\oplus\ldots\oplus C_k,$$

где $C_1,\ldots,C_k$ — такие характеристические подгруппы группы A, что для гомоморфизмов $\varphi_i\colon\Gamma\to\operatorname{Aut}C_i$, ставящих в соответствие ограничения, $|\varphi_i(\Gamma)|$ делит 24 при каждом i. Соответствие $\alpha\mapsto\mapsto(\varphi_1(\alpha),\ldots,\varphi_k(\alpha))$ является гомоморфизмом $\psi\colon\Gamma\to\varphi_1(\Gamma)\times\ldots\times\varphi_k(\Gamma)$, для которого $\psi(\alpha)=1$ только в случае, когда $\varphi_i(\alpha)=1$ при $i=1,\ldots,k$, т. е. когда α является тождественным отображением на группе $C_1\oplus\ldots\oplus C_k$ и, значит, на группе A. Таким образом, ψ — мономорфизм.

Группы, порядки которых делят 24 и которые удовлетворяют условиям п. б) и г), легко поддаются перечислению: это группы типов 1) — 4), а также группы $Z(12)$ и $DC_{24}=\langle\alpha,\ \beta\mid\alpha^6=\beta^2=(\alpha\beta)^2\rangle$. Две последние группы не могут быть группами автоморфизмов, так как они не удовлетворяют условию п. д). Сейчас мы покажем, как исключить эти группы из наших рассмотрений.

Пусть $\alpha\in\Gamma$ — элемент порядка 12. Тогда эндоморфизм $\alpha^{12}-1$ аннулирует группу A, и, так же, как в п. в), мы заключаем, что существует минимальный многочлен $g(\alpha)$ с целыми коэффициентами, аннулирующий группу A. 12-й круговой многочлен $\Phi_{12}(x)=x^4-x^2+1$ не может делить многочлен $g(x)$ по следующей причине. Допустим противное и рассмотрим гомоморфизм $\mathbf{S}(\alpha)\to\mathbf{Q}(\zeta)$ [где $\alpha\mapsto\zeta$] подкольца кольца $\mathbf{E}(A)$, порожденного элементом α, в расширение поля $\mathbf{Q}$, полученное присоединением ζ — первообразного корня 12-й степени из единицы. При этом гомоморфизме обратимый элемент $1+$

$+ \alpha \in \mathrm{E}(A)$ [обратным к нему является $\alpha^2 - \alpha^3$] переходит в комплексное число, по модулю не равное 1. Пришли к противоречию. Ясно, что элемент α может иметь порядок 12 только в том случае, когда подгруппы, аннулируемые эндоморфизмами $\alpha^6 - 1$ и $\alpha^4 - 1$, порождают группу A, т. е. $(\alpha^6 - 1)(\alpha^2 + 1) = 0$. Заметим, что $-(x^6 - 1) + (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1) = 2$. В силу п. з.) из § 106 получаем, что $2A \subseteq B \oplus C$, где $\alpha^6 - 1$ аннулирует группу B и $\alpha^2 + 1$ аннулирует группу C. Если образ группы Γ в группе $\mathrm{Aut}\, B$ или в группе $\mathrm{Aut}\, C$ все еще содержит элементы порядка 12, то продолжим этот процесс до тех пор, пока все элементы порядка 12 не будут устранены из группы $\varphi(\Gamma)$. ∎

Перейдем теперь к обратной задаче и покажем, что все шесть групп, перечисленных в теореме 116.1, действительно являются группами автоморфизмов для подходящих групп без кручения. Поскольку для группы $Z(2)$ утверждение тривиально, рассмотрим остальные пять групп.

П р и м е р 1. *Группа $Z(4)$ как группа автоморфизмов.* Пусть $p_1, \ldots, p_i, \ldots$ — бесконечное множество простых чисел, причем $p_i \equiv 1 \bmod 4$. Тогда -1 является квадратичным вычетом по модулю p_i. Пусть k_i — целые числа, для которых $k_i^2 \equiv -1 \bmod p_i$. Положим

$$A = \langle a,\ b,\ p_i^{-1}(a + k_i b) \text{ при всех } i \rangle.$$

Сопоставления $a \mapsto -b$, $b \mapsto a$ индуцируют автоморфизм β группы A, порядок которого равен 4. Покажем, что не существует других автоморфизмов группы A, кроме степеней автоморфизма β. Действительно, всякий автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$ должен действовать следующим образом:

$$\alpha a = ra + sb, \quad \alpha b = ta + ub, \tag{1}$$

где r, s, t, u — целые числа, удовлетворяющие условию $ru - st = \pm 1$. Далее, элемент $\alpha(a + k_i b) = (r + k_i t) a + (s + k_i u) b$ должен делиться на p_i; следовательно, он является линейной комбинацией элементов $a + k_i b$, $p_i a$ и $p_i b$. Ввиду линейной независимости элементов a и b получаем соотношение $s + k_i u \equiv k_i (r + k_i t) \bmod p_i$, откуда $s + t \equiv k_i (r - u) \bmod p_i$ и, после возведения в квадрат, $(s + t)^2 \equiv -(r - u)^2 \bmod p_i$. При достаточно большом простом числе p_i последнее сравнение можно заменить равенством, из которого следует, что $r = u$ и $t = -s$. Если к тому же учесть условие $ru - st = 1$, то останется лишь четыре возможности: $r = \pm 1$, $s = 0$ и $r = 0$, $s = \pm 1$. Таким образом, $\mathrm{Aut}\, A \cong Z(4)$.

П р и м е р 2. *Группа $Z(6)$ как группа автоморфизмов.* Пусть $q_1, \ldots, q_i, \ldots$ — бесконечное множество простых чисел, причем $q_i \equiv 1 \bmod 6$. Существуют такие целые числа l_i, что $l_i^2 + l_i \equiv -1 \bmod q_i$. Рассмотрим группу

$$A = \langle a,\ b,\ q_i^{-1}(a + l_i b) \text{ при всех } i \rangle.$$

Соответствия $a \mapsto b$, $b \mapsto -a + b$ индуцируют автоморфизм группы A, имеющий порядок 6. Пусть α — произвольный автоморфизм, действующий, как указано в соотношениях (1), при целых числах r, s, t, u, удовлетворяющих тому же условию. Тогда $q_i \mid \alpha(a + l_i b) = (r + l_i t) a + (s + l_i u) b$ влечет за собой $l_i (r + l_i t) \equiv s + l_i u \mod q_i$. Заметив, что $1 \equiv -l_i - l_i^2$, и сокращая на l_i, получаем $r + l_i t \equiv -(1 + l_i) s + u$, т. е. $r + s - u \equiv -l_i (s + t) \mod q_i$. Освободившись от l_i, получаем $(r + s - u)^2 - (r + s - u)(s + t) + (s + t)^2 \equiv 0 \mod q_i$. Снова при достаточно больших простых числах q_i последнее сравнение можно заменить равенством. Уравнение $x^2 - xy + y^2 = 0$ имеет единственное решение в действительных числах, а именно $x = y = 0$, следовательно, $t = -s$ и $u = r + s$. Пользуясь условием $ru - st = \pm 1$, приходим к уравнению $r^2 + rs + s^2 = \pm 1$ с решениями $r = \pm 1$, $s = 0$, $r = 1$, $s = -1$ и еще двумя решениями, где r и s поменялись ролями. Таким образом, группа A обладает не более чем шестью автоморфизмами.

Пример 3. *Группа* Q_8 *как группа автоморфизмов.* Мы будем пользоваться примером 1. Возьмем два непересекающихся бесконечных множества $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ простых чисел, для которых найдутся такие целые числа k_i и l_i, что $k_i^2 \equiv -1 \mod p_i$ и $l_i^2 \equiv -1 \mod q_i$. Искомой группой в данном случае является группа

$$A = \langle a, b, c, d, p_i^{-1}(a + k_i b), p_i^{-1}(d + k_i c), q_i^{-1}(a + l_i c), q_i^{-1}(b + l_i d) \text{ при всех } i \rangle.$$

Для автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} A$ имеют место соотношения $p_i \mid \alpha(a + k_i b)$, $q_i \mid \alpha(a + l_i c)$ и $p_i \mid \alpha(d + k_i c)$. Аналогично тому, как это делалось в примере 1, мы получаем из этих соотношений, что α действует следующим образом:

$$\alpha a = ra + sb + tc + ud, \quad \alpha b = -sa + rb + uc - td,$$
$$\alpha c = -ta - ub + rc + sd, \quad \alpha d = -ua + tb - sc + rd.$$

Здесь r, s, t, u — целые числа, для которых определитель полученной системы, очевидно, равный $(r^2 + s^2 + t^2 + u^2)^2$, является обратимым элементом кольца $\mathbf{Z}$ и, значит, равен 1. Уравнение $r^2 + s^2 + t^2 + u^2 = 1$ имеет ровно восемь решений. Рассмотрим отображения

$$\alpha\colon a \mapsto b, \quad b \mapsto -a, \quad c \mapsto d, \quad d \mapsto -c,$$
$$\beta\colon a \mapsto c, \quad b \mapsto -d, \quad c \mapsto -a, \quad d \mapsto b,$$

отвечающие решениям $s = 1$, $r = t = u = 0$ и $t = 1$, $r = s = u = 0$ соответственно. Легко видеть, что отображения α и β индуцируют такие автоморфизмы группы A, что $\operatorname{Aut} A \cong Q_8$.

Пример 4. *Группа* DC_{12} *как группа автоморфизмов.* Возьмем два бесконечных непересекающихся множества $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ простых чисел, для которых $p_i \equiv 1 \mod 4$ и $q_i \equiv 1 \mod 6$. Выберем целые числа

k_i и l_i, удовлетворяющие условиям $k_i^2 \equiv -1 \bmod p_i$ и $l_i^2 + l_i \equiv \equiv -1 \bmod q_i$. На этот раз мы рассматриваем группу

$$A = \langle a,\ b,\ c,\ d,\ p_i^{-1}(a + k_i b),\ p_i^{-1}(c + k_i d),\ q_i^{-1}(a + l_i c),\ q_i^{-1}(d + l_i b) \text{ при всех } i\rangle.$$

Легко видеть, что соответствия

$$\alpha\colon a \mapsto c,\quad b \mapsto d,\quad c \mapsto -a + c,\quad d \mapsto -b + d,$$
$$\beta\colon a \mapsto d,\quad b \mapsto -c,\quad c \mapsto b,\quad d \mapsto -a$$

индуцируют такие автоморфизмы группы A, что $\alpha^3 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = -1$.

Действуя так же, как и раньше, приходим к следующей системе уравнений:

$$\alpha a = ra + sb + tc + ud, \qquad \alpha b = -sa + rb - uc + td,$$
$$\alpha c = -ta + (u + s) b + (r + t) c - sd, \qquad \alpha d = -(u + s) a - tb + sc + (r + t) d.$$

Определитель матрицы автоморфизма α равен $(r^2 + rt + t^2 + s^2 + su + u^2)^2 = 1$ [как обратимый элемент кольца $\mathbf{Z}$]. Последнее уравнение имеет двенадцать решений: $r = \pm 1$, $s = t = u = 0$; $r = -t = 1$, $s = u = 0$ и решения, получаемые очевидными перестановками переменных.

Пример 5. *Группа* BT_{24} *как группа автоморфизмов.* Пусть числа p_i, q_i, k_i и l_i — те же, что и в примере 4. Положим

$$A = \langle a,\ b,\ c,\ d,\ p_i^{-1}(a + k_i b),\ p_i^{-1}(a - c + k_i d),\ q_i^{-1}(a + l_i d),\ q_i^{-1}(c + l_i b) \text{ при всех } i\rangle.$$

Непосредственно проверяется, что отображения

$$\alpha\colon a \mapsto d,\quad b \mapsto -a + c,\quad c \mapsto -a - b + c + d,\quad d \mapsto -a + d,$$
$$\beta\colon a \mapsto -c,\quad b \mapsto b - d,\quad c \mapsto c - d,\quad d \mapsto b$$

индуцируют автоморфизмы группы A, для которых $\alpha^3 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 = -1$. Таким образом, BT_{24} — подгруппа группы $\operatorname{Aut} A$. Мы предлагаем читателю доказать в виде упражнения, что $|\operatorname{Aut} A| = 24$.

Рассмотренные примеры позволяют нам доказать следующий результат.

Теорема 116.2 (Холлет и Хирш [2]). *Пусть* Γ — *конечное прямое произведение групп, каждая из которых изоморфна одной из групп, перечисленных в теореме* 116.1. *Тогда найдется такая группа без кручения* A, *что* $\operatorname{Aut} A \cong \Gamma$.

Прежде всего заметим, что примеры 1—5 можно легко видоизменить, рассматривая вместо группы A группу $A \otimes R$, где R — рациональная группа типа $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, причем каждое k_n конечно и $k_n = 0$, если n-е простое число встречается среди простых чисел,

используемых в примере. Интерес представляет лишь случай, когда $k_n \neq 0$ для бесконечного множества чисел k_n.

Далее, пусть $\Gamma = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_s$, где каждый из сомножителей Γ_j — группа одного из типов, указанных в теореме 116.1. Для каждой группы Γ_j выберем такую группу без кручения A_j, что $\operatorname{Aut} A_j \cong \Gamma_j$. Ясно, что простые числа, не сравнимые с 1 по модулю 4 или 6, составляют бесконечное множество. Таким образом, мы можем выбрать жесткую систему $R_1, \ldots, R_s$ рациональных групп, имеющих указанные выше типы, для которых $k_n > 0$ только в случае, когда n-е простое число не сравнимо с 1 по модулю 4 или 6. Сразу видно, что группы $B_j = A_j \otimes R_j$ $(j = 1, \ldots, s)$ снова образуют жесткую систему. Имеем

$$\operatorname{Aut}(B_1 \oplus \ldots \oplus B_s) = \operatorname{Aut} B_1 \times \ldots \times \operatorname{Aut} B_s \cong \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_s,$$

что и требовалось. ∎

Более тонким представляется вопрос о выделении тех подгрупп прямых произведений групп из теоремы 116.1, которые действительно могут служить группами автоморфизмов.

Упражнения

1. (а) Пусть A — группа без кручения ранга 1, тип которой равен $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, где все k_n конечны. Показать, что $\operatorname{Aut} A \cong Z(2)$.

(б) Существует жесткая система мощности континуума, состоящая из групп ранга 1 с группами автоморфизмов порядка 2.

2. (а) Доказать, что для каждого кардинального числа $\mathfrak{m}$, меньшего первого сильно недостижимого кардинального числа, существуют группы ранга $\mathfrak{m}$, обладающие лишь двумя автоморфизмами.

(б) Распространить этот результат на жесткие системы.

3. Всякая элементарная 2-группа, мощность которой равна $2^{\mathfrak{m}}$, где кардинальное число $\mathfrak{m}$ меньше первого сильно недостижимого кардинального числа, является группой автоморфизмов некоторой группы без кручения.

4. Доказать, что $Z(p)$, где p — простое нечетное число, не изоморфна группе автоморфизмов никакой абелевой группы.

5 (де Врие и де Миранда [1]). Показать, что группа автоморфизмов группы

$$A = \langle p_1^{-\infty}a_1,\ p_1^{-\infty}b_1,\ p_2^{-\infty}a_2,\ p_2^{-\infty}b_2,\ q_1^{-\infty}(a_1+a_2),$$
$$q_1^{-\infty}(b_1+b_2),\ q_2^{-\infty}(a_1+b_2),\ q_2^{-\infty}(b_1-a_2+b_2)\rangle,$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 — различные простые числа, изоморфна группе $Z(6)$. [*Указание*: автоморфизм α: $a_1 \mapsto b_1$, $b_1 \mapsto -a_1 + b_1$, $a_2 \mapsto b_2$, $b_2 \mapsto -a_2 + b_2$ является образующим.]

6. Доказать, что группа без кручения A с группой автоморфизмов, изоморфной одной из шести групп, перечисленных в теореме 116.1, обязательно является неразложимой. [*Указание*: обратить внимание на центр группы $\operatorname{Aut} A$.]

7. Пользуясь техникой примеров 1—4, показать, что в примере 5 $|\operatorname{Aut} A| = 24$.

8 (Холлет и Хирш [2]). Пусть A — группа без кручения, для которой $\operatorname{Aut} A \cong Q_8 = \langle\alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2\rangle$.

а) Для всякого ненулевого элемента $a \in A$ элементы a, αa, βa и $\alpha\beta a$ линейно независимы.

б) Если ранг $r(A)$ конечен, то он кратен четырем.

9 (Холлет и Хирш [2]). Пусть A — группа без кручения конечного ранга. Если $\operatorname{Aut} A \cong DC_{12}$, то ранг $r(A)$ — четное число, а если $\operatorname{Aut} A \cong BT_{24}$, то ранг $r(A)$ делится на 4.

10. Показать, что группы в примерах 1—5 можно выбрать таким образом, чтобы их ранг был бесконечен.

11 (Холлет и Хирш [2]). Конечная абелева группа Γ изоморфна группе $\operatorname{Aut} A$ для некоторой группы без кручения A в том и только в том случае, когда

(1) $|\Gamma|$ — четное число;

(2) $\alpha^{12} = 1$ для всех $\alpha \in \Gamma$;

(3) не всякий элемент $\alpha \in \Gamma$ порядка 2 содержится в циклической группе порядка 12.

Замечания

Группы автоморфизмов конечных групп были предметом многочисленных исследований, но хорошего описания до сих пор не было получено. Случай абелевых групп не является исключением: к настоящему времени наши сведения о группах автоморфизмов абелевых групп весьма ограничены. Известно несколько примеров групп, которые никогда не могут быть группами автоморфизмов, и трудно, по-видимому, найти условие, при котором группа служит группой автоморфизмов. [Эта ситуация носит довольно таинственный характер, особенно в сравнении с некоторыми другими алгебраическими структурами: например, для коммутативных колец всякая группа может быть группой автоморфизмов, как было показано Шиклером.]

Ввиду того что в примарных группах автоморфизмов очень много, можно надеяться в этом случае на получение более подробных сведений. Для бесконечных p-групп A структура нормальных подгрупп группы $\operatorname{Aut} A$ впервые была изучена Бэром [3]. Бэр исследовал соответствие между характеристическими подгруппами группы A и нормальными подгруппами группы $\operatorname{Aut} A$. Не удивительно, что в его результатах число 2 заняло особое место среди простых чисел. За последние десять лет или около того изучение структуры нормальных подгрупп группы $\operatorname{Aut} A$ значительно продвинулось вперед [см. Фридман [1], Фукс [20], Лептин [4], Мадер [1, 2], Хилл [23]]. Но, несмотря на все усилия, о группе $\operatorname{Aut} A$ известно на самом деле очень немногое. Мы даже не знаем, как по группе $\operatorname{Aut} A$ определить длину группы A, не говоря уж об ее инвариантах Ульма — Капланского. Интуитивно кажется ясным, что свойства группы $\operatorname{Aut} A$ тесно связаны со свойствами p-группы A; и действительно, это было подтверждено Лептином [2]: p-группы при $p \geqslant 5$ определяются своими группами автоморфизмов, и, следовательно, все свойства группы A должны восстанавливаться по группе $\operatorname{Aut} A$. Существо проблемы заключается, видимо, в том, что связь между группами A и $\operatorname{Aut} A$ исследовалась до сих пор практически односторонним образом.

Для более подробного ознакомления с результатами, касающимися групп автоморфизмов примарных групп, см. также Хаузен [2, 3] и Фолтингс [1].

Группы автоморфизмов групп без кручения A ведут себя иначе: с одной стороны, группа $\operatorname{Aut} A$ уже не определяет группы A, а с другой стороны, должны, очевидно, существовать более строгие ограничения на саму группу $\operatorname{Aut} A$,

как показывают результаты Холлетта и Хирша [1, 2]. Проблема описания счетных групп Aut A для счетных редуцированных групп без кручения A ввиду теоремы 110.1 эквивалентна проблеме описания групп обратимых элементов счетных редуцированных колец без кручения. Даже в случае групп ранга 2 возникают большие трудности, см. Круль [2]. Об автоморфизмах неразложимых групп см. де Гроот и де Врие [1].

Группы автоморфизмов бесконечно порожденных смешанных групп до сих пор не исследовались.

Проблема 88. Охарактеризовать группы Aut A для [сепарабельных] p-групп A.

Проблема 89. Дать простое доказательство теоремы Лептина: p-группы ($p \geqslant 5$) изоморфны, если их группы автоморфизмов изоморфны. Выяснить ситуацию для случаев $p = 2$ и $p = 3$. Все ли изоморфизмы между группами автоморфизмов индуцируются изоморфизмами самих групп?

Проблема 90. Исследовать группы автоморфизмов групп без кручения конечного ранга.

Проблема 91. Подгруппы B и C группы A назовем эквивалентными, если существуют автоморфизм $\alpha \in$ Aut A, отображающий B на C. Исследовать классы эквивалентности подгрупп в указанном смысле.

О базисных подгруппах счетных p-групп см. Хилл [20]. См. также Хилл [28] и Тарвотер и Уокер [1].

Проблема 92. Много ли можно узнать о p-группе A из структуры нормальных подгрупп группы Aut A? Определяются ли этой структурой инварианты Ульма — Капланского группы A?

Глава XVII

АДДИТИВНЫЕ ГРУППЫ КОЛЕЦ

Мы собираемся исследовать взаимоотношения структуры кольца со структурой его аддитивной группы. Основные проблемы этого исследования формулируются без труда:

1. Для данной группы A найти все кольца $\mathbf{R}$, аддитивные группы которых изоморфны группе A.
2. Для данного класса колец найти необходимые и достаточные условия на группу A, при которых существует такое кольцо $\mathbf{R}$ из этого класса, что его аддитивная группа изоморфна группе A.

На первый из поставленных вопросов до сих пор не было дано никакого удовлетворительного ответа. Кольца на группе A [не обязательно ассоциативные] ассоциированы с билинейными функциями μ: $A \times A \rightarrow A$, которые образуют аддитивную группу Mult A. Изучение этой группы дает определенные сведения о кольцах на группе A, но один из основных вопросов — когда два кольца на группе A изоморфны? — за исключением очень немногих частных случаев, остается нерешенным.

Отличительной чертой периодических групп является то, что кольцевые структуры на них полностью определяются умножениями элементов некоторого p-базиса. Ввиду этого факта случай периодических групп лучше всего поддается исследованию, в частности, можно получить полное описание групп, допускающих лишь конечное число неизоморфных кольцевых структур.

Что касается второй сформулированной проблемы, то в основном мы будем иметь дело с классами колец, аддитивные группы которых не слишком разнообразны,— это артиновы и (обобщенно) регулярные кольца. Можно полностью охарактеризовать группы, являющиеся аддитивными группами артиновых колец.

§ 117. Подгруппы, всегда являющиеся идеалами

Этот параграф содержит начальные сведения об отношениях, существующих между кольцом и его аддитивной группой. Мы исследуем некоторые элементарные свойства кольцевой структуры и опишем подгруппы группы A, обязательно являющиеся идеалами в каждом кольце, для которого A служит аддитивной группой.

Прежде всего сделаем замечание терминологического характера. Под *кольцом* будет подразумеваться не обязательно ассоциативное или коммутативное кольцо [но умножение всегда будет считаться дистрибутивным с двух сторон относительно сложения]. Если это не вызывает недоразумений, мы будем приписывать кольцу свойства его аддитивной группы. Таким образом, термины: p-кольцо, периодическое кольцо или кольцо без кручения, делимое или редуцированное кольцо, сервантный идеал и т. п.— будут иметь вполне определенный смысл, без дальнейших пояснений.

Если потребуется, мы будем различать кольцо R и его аддитивную группу R^+; здесь бывает необходима осторожность — особенно при рассмотрении прямых разложений. Кольцо R, аддитивная группа которого есть A [или изоморфна группе A], называется *кольцом на группе A*.

Нам часто представится возможность использовать простые факты, собранные в следующей лемме.

Лемма 117.1. *Для произвольных элементов $a, c \in$ R имеют место следующие утверждения:*

а) $m \mid a$ и $n \mid c$ *влечет за собой* $mn \mid ac$;

б) *если* $ma = 0$ *и* $nc = 0$, *то* $(m, n)\, ac = 0$;

в) *если* $m \mid a$ *и* $mc = 0$, *то* $ac = 0$.

Доказательство элементарно и проводится аналогично доказательству леммы 59.2. ∎

Стоит отметить несколько следствий, вытекающих из этой леммы; доказательство каждого из них заключается в непосредственном применении леммы 117.1.

А) В каждом кольце R имеются следующие идеалы: nR и R $[n]$ для всякого n, периодическая часть T (R) и ее p-компоненты, цоколь, максимальная делимая подгруппа, ульмовские подгруппы R^σ и подгруппы p^σR для всякого порядкового числа σ. Более общо, для произвольного левого [правого] идеала L кольца R подгруппы nL, L $[n]$ и т. д. являются левыми [правыми] идеалами кольца R.

Б) Если R — периодическое кольцо, то для каждого простого числа p имеют место неравенства

$$h_p(ac) \geqslant h_p(a) + h_p(c) \text{ для всех } a, c \in \mathrm{R}.$$

Далее, $ac = 0$, если $h_p(a) \geqslant k$ и $p^k c = 0$. Таким образом R^1 — аннулятор кольца R, а p-компонента R_p аннулирует q-компоненту R_q при различных простых числах p и q. Следовательно, для периодического кольца R разложение

$$\mathrm{R} = \bigoplus_p \mathrm{R}_p$$

является прямым разложением также и в теоретико-кольцевом смысле.

В) Для кольца без кручения R имеют место неравенства

$$\chi(ac) \geqslant \chi(a)\, \chi(c) \text{ при всех } a, c \in \mathrm{R}.$$

Таким образом, для всякого левого идеала L кольца R и для всякого типа **t** как L (**t**), так и L* (**t**) — левые идеалы.

При любом данном кольце R левые и правые умножения

$$x \mapsto ax \quad \text{и} \quad x \mapsto xa \quad (x \in \mathrm{R}),$$

где a — произвольный фиксированный элемент, являются эндоморфизмами группы R^+. Отсюда сразу следует, что *вполне характеристические подгруппы группы R^+ обязательно являются идеалами в кольце*

R независимо от того, каким образом в R определено умножение. В связи с этим возникает проблема описания таких подгрупп группы A, которые являются идеалами в каждом кольце R на группе A.

При решении этой проблемы нам пригодится некоторый идеал кольца эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ группы A. Положим

$$\mathsf{I}(A) = \langle \varphi A \mid \varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathsf{E}(A)) \rangle.$$

Иначе говоря, $\mathsf{I}(A)$ — подгруппа группы $\mathsf{E}(A)$, порожденная всеми гомоморфными образами группы A в группе $\mathsf{E}(A)$. Покажем, что $\mathsf{I}(A)$ — идеал. Заметим, что для каждого $\eta \in \mathsf{E}(A)$ отображения $a \mapsto \eta(\varphi a)$ и $a \mapsto (\varphi a)\eta$ являются гомоморфизмами $A \to \mathsf{E}(A)$. Это сразу видно из равенств $\eta(\varphi(a+b)) = \eta(\varphi a + \varphi b) = \eta(\varphi a) + \eta(\varphi b)$ и им аналогичных. Таким образом, среди образующих группы $\mathsf{I}(A)$ имеются $\eta(\varphi a)$ и $(\varphi a)\eta$ при всех $a \in A$, т. е. $\mathsf{I}(A)$ — идеал кольца $\mathsf{E}(A)$.

Теорема 117.2 (Фрид [1]). *Подгруппа C группы A служит идеалом в каждом кольце на группе A тогда и только тогда, когда C является $\mathsf{I}(A)$-допустимой подгруппой, т. е. $\mathsf{I}(A)\, C \subseteq C$.*

Пусть R — кольцо на группе A. Мы связываем с элементом $a \in A$ левое умножение λ_a: $x \mapsto ax$. Соответствие φ: $a \mapsto \lambda_a$ является гомоморфизмом группы A в группу $\mathsf{E}(A)$ и, значит, в группу $\mathsf{I}(A)$. Подгруппа C является левым идеалом в R в том и только в том случае, когда каждый гомоморфизм λ_a переводит C в себя; то же рассуждение применимо к правому умножению. Мы заключаем, что если $\mathsf{I}(A)\, C \subseteq C$, то C — идеал в каждом кольце R на группе A.

Обратно, всякий гомоморфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathsf{E}(A))$ дает некоторое кольцевое умножение, если произведение элементов $a, c \in A$ положить равным $ac = (\varphi a)\, c$. Таким образом, если C — идеал в каждом кольце на A, то $(\varphi a)\, c \in C$ при $c \in C$, т. е. $\mathsf{I}(A)\, C \subseteq C$. ∎

Для редуцированных периодических групп A нетрудно охарактеризовать подгруппу $\mathsf{I}(A) \subseteq \mathsf{E}(A)$.

Предложение 117.3. *Если A — редуцированная периодическая группа, то $\mathsf{I}(A)$ — периодическая часть группы $\mathsf{E}(A)$.*

Либо редуцированная p-группа A обладает циклическими слагаемыми порядка $n \geqslant p^k$ для сколь угодно больших k, либо в A найдется циклическое слагаемое максимального порядка и A — ограниченная группа. В обоих случаях образы ее циклических слагаемых в группе $\mathsf{E}(A)$ порождают периодическую часть группы $\mathsf{E}(A)$, значит, последняя должна совпадать с $\mathsf{I}(A)$. ∎

Упражнения

1. В кольце без кручения R с единицей 1 для всех $a \in \mathsf{R}$ выполняется неравенство $\chi(1) \leqslant \chi(a)$.
2. Доказать неравенство из п. B) для высотных матриц в смешанных группах.

3. В каждом кольце на группе A две непересекающиеся вполне характеристические подгруппы группы A аннулируют друг друга.

4. (Штейнфильд). Если двусторонний аннулятор каждого ненулевого элемента из $\mathbf{R}$ равен нулю, то либо $p\mathbf{R} = 0$ при некотором простом числе p, либо $\mathbf{R}$ — кольцо без кручения, причем типы его ненулевых элементов образуют множество, направленное вверх.

5. Пусть M — некоторый $\mathbf{R}$-модуль [под модулем, как и раньше, мы подразумеваем унитарный левый модуль над ассоциативным кольцом с единицей].

(а) Доказать аналог леммы 117.1 для $a \in \mathbf{R}$, $c \in M$.

(б) Доказать, что nM, $M[n]$ и т. д. [как в п. А)] — подмодули модуля M.

(в) $\mathbf{R}^1$ аннулирует периодическую часть группы M.

6. Если $C \subseteq A$ — левый идеал в каждом кольце на группе A, то C является двусторонним идеалом.

7 (Фрид [1]). Для $C \subseteq A$ положим

$$C^0 = \langle a \in A \mid \psi a \in C \text{ при всех } \psi \in \mathsf{I}(A) \rangle$$

и

$$C_0 = \langle \psi C \mid \text{ при всех } \psi \in \mathsf{I}(A) \rangle.$$

Доказать, что

(а) C^0 и C_0 — вполне характеристические подгруппы группы A;

(б) $(C^0)_0 \subseteq C \subseteq (C_0)^0$;

(в) $B \subseteq C$ влечет $B^0 \subseteq C^0$ и $B_0 \subseteq C_0$.

8 (Фрид [1]). 0^0 является пересечением аннуляторов всех колец на группе A.

9 (Фрид [1]). В обозначениях упр. 7 доказать эквивалентность следующих условий на $C \subseteq A$:

(1) C — идеал в каждом кольце на A;

(2) $C_0 \subseteq C$;

(3) $G \subseteq C \subseteq G^0$ для некоторой вполне характеристической подгруппы G группы A;

(4) $H_0 \subseteq C \subseteq H$ для некоторой вполне характеристической подгруппы $H \subseteq A$;

(5) $C \subseteq C^0$.

10 (Фрид [1]). Группа A обладает тем свойством, что только вполне характеристические ее подгруппы являются идеалами в каждом кольце на A, в том и только в том случае, когда для всякого элемента $a \in A$ группа $\mathbf{E}(A)$ порождается единицей и подгруппами $\mathsf{I}(A)$ и $\{\eta \in \mathbf{E}(A) \mid \eta a = 0\}$.

11. При данном кольце $\mathbf{R}$ *универсальным* $\mathbf{R}$-*модулем* на группе A называется такой $\mathbf{R}$-модуль U вместе с групповым гомоморфизмом $\varphi\colon A \to U$, что для всякого группового гомоморфизма $\alpha\colon A \to M$, где M — некоторый $\mathbf{R}$-модуль, должен существовать единственный $\mathbf{R}$-гомоморфизм $\psi\colon U \to M$, удовлетворяющий равенству $\psi\varphi = \alpha$. Показать, что на произвольной группе A существует и единствен с точ-

ностью до изоморфизма универсальный $\mathbf{R}$-модуль [*Указание*: $U = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} A$ и $\varphi: a \mapsto 1 \otimes a$.]

12. При данных кольце $\mathbf{R}$ и группе A группа A допускает единственную $\mathbf{R}$-модульную структуру тогда и только тогда, когда 1_A пропускается через гомоморфизм φ из упр. 11.

§ 118. Умножения на группе

Всякая группа A может быть тривиальным образом снабжена кольцевой структурой, если все произведения положить равными 0. Такое кольцо называется *нуль-кольцом*. Однако в общем случае это не единственное кольцо на группе A, и мы хотим, таким образом, получить общий метод нахождения всех кольцевых структур на группе A.

Следующее понятие весьма существенно для решения рассматриваемой проблемы. Функцию $\mu: A \times A \to A$ назовем *умножением на группе* A, если для всех элементов $a, b, c \in A$ выполняются равенства

$$\mu(a, b + c) = \mu(a, b) + \mu(a, c),$$
$$\mu(b + c, a) = \mu(b, a) + \mu(c, a).$$

Очевидно, всякое кольцо $\mathbf{R}$ на группе A задает некоторое умножение μ, а именно $\mu(a, b) = ab$, и это соответствие между кольцевыми структурами и умножениями на группе A биективно. Таким образом, кольцо $\mathbf{R}$ мы можем представлять себе как пару (A, μ).

Заметим, что $\mu(na, b) = n\mu(a, b) = \mu(a, nb)$ при всех $a, b \in A$ и $n \in \mathbf{Z}$ — это сразу следует из определения.

Если μ и ν — умножения на группе A, то их *сумма* $\mu + \nu$ определяется по следующему правилу:

$$(\mu + \nu)(a, b) = \mu(a, b) + \nu(a, b) \text{ для всех } a, b \in A,$$

это снова умножение на A. Относительно введенной операции сложения умножения на группе A образуют абелеву группу, так называемую *группу умножений на* A, $\operatorname{Mult} A$. Нуль группы $\operatorname{Mult} A$ — это умножение, соответствующее нуль-кольцу на группе A.

Именно из-за группы $\operatorname{Mult} A$ приходится включать в наше исследование неассоциативные кольца. В действительности, если б мы хотели совершенно исключить из рассмотрения неассоциативные кольца, мы не смогли бы даже ввести эту группу $\operatorname{Mult} A$, поскольку ассоциативные умножения образуют группу лишь в немногих исключительных случаях [см. Харди [1]].

Чтобы получить как можно больше сведений о кольцах на группе A, исследуем группу $\operatorname{Mult} A$.

Теорема 118.1. (Фукс [16]). *Имеют место следующие изоморфизмы*:

$$\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Hom}(A \otimes A, A), \tag{1}$$
$$\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Hom}(A, \operatorname{End} A). \tag{2}$$

Так как μ — билинейная функция $A \times A \to A$, то в силу теоремы 59.1 существует единственный гомоморфизм φ: $A \otimes A \to A$, для которого $\varphi(a \otimes b) = \mu(a, b)$. Мы получаем, таким образом, отображение $\mu \mapsto \varphi$, являющееся, очевидно, гомоморфизмом группы Mult A в группу Hom $(A \otimes A, A)$. Более того, нетрудно вывести, что это изоморфизм. Второй изоморфизм следует из первого, если сослаться на п. К) из § 59. ∎

Как будет видно в дальнейшем, полезно зафиксировать в качестве изоморфизмов (1) и (2) естественные изоморфизмы:

$$\mu \mapsto \varphi, \quad \text{если} \quad \varphi(a \otimes b) = \mu(a, b)$$

и

$$\mu \mapsto \psi, \text{ если } (\psi a)\, b = \mu(a, b).$$

Полученная теорема имеет многочисленные применения. Приведем некоторые следствия из нее.

А) Если A — циклическая группа, то Mult $A \cong A$. Это следует из существования естественных изоморфизмов $A \otimes A \cong A \cong \operatorname{End} A$, очевидных для циклической группы A.

Б) $mA = 0$ влечет за собой m Mult $A = 0$.

В) Если $pA = A$, то группа Mult A не содержит элементов порядка p. Это следует из п. А) § 59 и п. Д) § 43. В частности, Mult A — группа без кручения, если A — делимая группа.

Г) Если группа A не содержит элементов порядка p, то их не содержит и группа Mult A. Применяя п. Б) из § 43, сразу получаем требуемое утверждение. Таким образом, для групп без кручения A группа Mult A — группа без кручения.

Д) Если A — делимая группа без кручения, то такой же является и группа Mult A. Это вытекает из п. Г) § 43.

Е) Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где все A_i — вполне характеристические подгруппы группы A, то

$$\text{Mult } A = \prod_{i \in I} \text{Mult } A_i.$$

В силу теорем 59.1 и 43.1 группа Mult A является произведением всех групп Hom $(A_i \otimes A_j, A)$ при $i, j \in I$. Для гомоморфизма $\varphi \in \operatorname{Hom}(A_i \otimes A_j, A)$ и фиксированного элемента $a_j \in A_j$ сопоставление $a_i \mapsto \varphi(a_i \otimes a_j)$ является гомоморфизмом группы A_i в группу A. Образ его содержится в группе A_i, так как A_i — вполне характеристическая подгруппа группы A. Из соображений симметрии этот образ содержится также в A_j, следовательно, группа Hom $(A_i \otimes A_j, A)$ равна нулю при $i \neq j$ и совпадает с группой Hom $(A_i \otimes A_i, A_i)$, если $i = j$.

Ж) Если A — периодическая группа и A_p — ее p-компоненты, то Mult $A = \prod_p$ Mult A_p.

З) Mult $J_p = J_p$. Это следует из примера 5 § 43 и изоморфизма (2).

Естественно рассматривать два кольца на группе A как одинаковые кольца, если они изоморфны. Легко видеть, что умножения μ и ν определяют изоморфные кольца на группе A тогда и только тогда, когда существует автоморфизм α группы A, сохраняющий произведения, т. е.

$$\mu(a, b) = \alpha^{-1}\nu(\alpha a, \alpha b) \text{ при всех } a, b \in A.$$

Совсем не легкая проблема — решить, определяют ли данные два умножения изоморфные кольца.

Умножения ν, являющиеся коммутативными в том очевидном смысле, что $\nu(a, b) = \nu(b, a)$ при всех $a, b \in A$, образуют подгруппу $\mathrm{Mult}_c\, A$ группы $\mathrm{Mult}\, A$. При изоморфизме (1) гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A \otimes A, A)$ соответствует коммутативному умножению в точности тогда, когда $\varphi(a \otimes b) = \varphi(b \otimes a)$ при всех $a, b \in A$. Другими словами, это означает, что φ аннулирует «коммутаторную подгруппу» $C = \langle a \otimes b - b \otimes a \mid$ для всех $a, b \in A \rangle$ группы $A \otimes A$. Сразу видно, что

$$\mathrm{Mult}_c\, A \cong \mathrm{Hom}(A \otimes A/C, A).$$

Гораздо труднее выделить в группе $\mathrm{Mult}\, A$ ассоциативные умножения. При несколько ином подходе к вопросу ясно, что умножение $\mu: A \times A \to A$ ассоциативно тогда и только тогда, когда соответствующий гомоморфизм $\varphi: A \otimes A \to A$ индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & A \otimes A \\ {\scriptstyle \varphi \otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A \otimes A & \xrightarrow{\varphi} & A. \end{array}$$

Немногое известно о том, как расположены в группе $\mathrm{Mult}\, A$ ассоциативные умножения. Изоморфизм (2) может дать нам некоторую информацию. Этот изоморфизм связывает с умножением $\mu \in \mathrm{Mult}\, A$ гомоморфизм $\psi: a \mapsto \lambda_a \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{End}\, A)$, для которого $\mu(a, b) = \lambda_a b$ при всех $a, b \in A$. Таким образом, ассоциативность $\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c)$ эквивалентна равенству $\lambda_a \lambda_b c = \lambda_{\mu(a, b)} c$ или просто $\lambda_a \lambda_b = \lambda_{\mu(a, b)}$. Следовательно, *умножение* μ *ассоциативно тогда и только тогда, когда соответствующий ему групповой гомоморфизм* $\psi: A \to \mathrm{End}\, A$ *является кольцевым гомоморфизмом кольца* (A, μ) *в кольцо* $\mathbf{E}(A)$.

Проиллюстрируем теперь, как можно использовать группу $\mathrm{Mult}\, A$. Заметим, что умножение $\mu \in \mathrm{Mult}\, A$ полностью определяется своими значениями $\mu(a, b)$ для элементов a и b из системы образующих группы A.

Пример 1. Пусть $A = \langle g \rangle$ — циклическая группа. Из п. A) мы знаем, что $\mathrm{Mult}\, A \cong A$, и тривиально проверяется, что $\mathrm{Mult}\, A = \langle \lambda \rangle$, где $\lambda(g, g) = g$. Значит, все умножения на A имеют вид $\mu = k\lambda$, где $k = 0, 1, \ldots, m-1$, если $o(g) = m < \infty$, и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ в противном случае. Все эти умножения ассоциативны и коммутативны. [Об их изоморфизме см. упр. 5 и 6.]

Пример 2. Пусть $A = \bigotimes_{i \in I} \langle g_i \rangle$ — прямая сумма неразложимых циклических групп. Тогда $A \otimes A = \bigoplus_{i,j} (\langle g_i \rangle \otimes \langle g_j \rangle)$, где в скобках стоит циклическая

группа порядка $(o(g_i), o(g_j))$, порожденная элементом $g_i \otimes g_j$ [положим $(m, \infty) = m$ и $(\infty, \infty) = \infty$]. Умножение μ на группе A полностью определяется элементами $\varphi(g_i \otimes g_j) \in A$, которые могут быть выбраны произвольно при единственном условии, чтобы порядок элемента $\varphi(g_i \otimes g_j)$ был делителем порядка элемента $g_i \otimes g_j$. [Более подробное описание, в котором особое внимание уделено ассоциативному случаю, см. в работах Бьюмонта [2] и Тоски [1].]

Пример 3. Пусть A — группа без кручения, не изоморфная группе Z, причем $\mathbf{E}(A) \cong \mathbf{Z}$. Нетрудно вывести, что группа $A \otimes A$ не может иметь бесконечного циклического прямого слагаемого. Отсюда в силу (2) имеем $\mathrm{Mult}\, A = 0$.

Упражнения

1. Дать прямое доказательство существования изоморфизма (2).

2. Показать, что для всякой группы A группа $\mathrm{Mult}\, A$ естественным образом является $\mathbf{E}(A)$-модулем.

3. Привести пример, показывающий, что ассоциативные умножения не обязаны образовывать подгруппу в группе $\mathrm{Mult}\, A$ [*Указание*: $Z(n) \oplus Z(n)$.]

4. Если $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — эндоморфизмы группы A, то $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$: $\mu(a, b) \mapsto \theta_1\mu(\theta_2 a, \theta_3 b)$ — эндоморфизм группы $\mathrm{Mult}\, A$. Доказать, что эндоморфизмы $(\theta_1, 1, 1)$, $(1, \theta_2, 1)$ и $(1, 1, \theta_3)$ попарно перестановочны.

5. а) Два умножения μ, ν на группе Z определяют изоморфные кольца тогда и только тогда, когда $\mu = \pm\nu$.

б) Существует бесконечно много неизоморфных колец на группе Z, и каждое из них изоморфно либо $n\mathbf{Z}$ $(n > 0)$, либо нуль-кольцу на Z.

6. а) Два умножения μ, ν определяют изоморфные кольца на группе $Z(m)$ тогда и только тогда, когда $\mu = k\nu$ при некотором k, для которого $(k, m) = 1$.

б) Каждое кольцо на группе $Z(p^n)$ изоморфно одному из колец $p^k\mathbf{Z}/p^{n+k}\mathbf{Z}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

7. Всякое кольцо на группе J_p изоморфно одному из колец $p^k\mathbf{Q}_p^*$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ или нуль-кольцу на группе J_p.

8. Пусть α: $A \to B$ — гомоморфизм абелевых групп. Тогда α осуществляет соответствие между кольцевыми структурами, отвечающими φ: $A \otimes A \to A$ и ψ: $B \otimes B \to B$, в том и только в том случае, когда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ {\scriptstyle \alpha\otimes\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B \otimes B & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

9 (Бьюмонт [2]). Пусть $A = \oplus \langle a_i \rangle$, где $o(a_i) = n_i$ — натуральное число или символ ∞. Показать, что $\mu(a_i, a_j) = \sum_k t_{ijk} a_k$, причем целые числа t_{ijk} определяют ассоциативное кольцо на группе A тогда и только тогда, когда

(1) для каждой пары фиксированных индексов i, j почти все t_{ijk} равны нулю;

(2) $t_{ijk} \equiv 0 \bmod n_k (n_i, n_j, n_k)^{-1}$ при всех i, j, k;

(3) $\sum_k t_{ijk} t_{klm} = \sum_k t_{ikm} t_{jlk}$ при всех i, j, l, m.

§ 119. Продолжения частичных умножений

Теперь мы рассмотрим проблему, являющуюся непосредственным обобщением вопроса, поднятого в предыдущем параграфе. Пусть C — подгруппа группы A, и пусть задано *частичное умножение*, т. е. билинейная функция ν: $C \times C \to A$. Проблема заключается в продолжении функции ν до билинейной функции μ: $A \times A \to A$. С подобной ситуацией можно столкнуться, если, например, какую-нибудь кольцевую структуру на подгруппе пытаться распространить на всю группу.

Прежде всего естественно задаться вопросом, можно ли продолжить кольцевую структуру на группе A до соответствующей структуры делимой оболочки D группы A. Из теоремы 118.1 сразу следует, что на делимой периодической группе не существует иного умножения, кроме тривиального [см. также теорему 120.3], таким образом, действительно интересным представляется случай групп без кручения.

Теорема 119.1. *Всякое кольцо без кручения* **R** *может быть вложено как подкольцо в минимальное делимое кольцо без кручения* **D**, *единственное с точностью до изоморфизма.*

Кольцо **D** будет определено на делимой оболочке D группы $\mathbf{R}^+$. Нетрудно убедиться в том, что существует лишь один способ продолжения умножения ν на **R** на группу D. А именно, если $x, y \in D$, а m, n — такие отличные от нуля целые числа, что $mx, ny \in \mathbf{R}$, то продолжение должно иметь вид

$$\mu(x, y) = (mn)^{-1} \nu(mx, ny).$$

Это определение не зависит от выбора чисел m, n и превращает группу D в кольцо **D**, которое ассоциативно [коммутативно] тогда и только тогда, когда кольцо **R** ассоциативно [коммутативно]. С помощью обычных рассуждений читатель может убедиться в том, что всякое делимое кольцо без кручения, которое содержит подкольцо, изоморфное кольцу **R**, содержит также подкольцо, изоморфное кольцу **D**. ∎

Имеется еще два очень важных расширения групп, а именно алгебраически компактные и копериодические расширения. Перед тем как заняться исследованием, при каких условиях и сколькими способами может быть продолжена кольцевая структура в этих случаях, докажем простую лемму. [Напомним, что плотность подгруппы C в группе A означает делимость группы A/C.]

Лемма 119.2. *Пусть C — сервантная и плотная подгруппа редуцированной группы A. Тогда частичное умножение ν: $C \times C \to A$ может быть продолжено до умножения μ: $A \times A \to A$ не более чем одним способом.*

Из сервантно точной последовательности $0 \to C \to A \to A/C \to 0$ с помощью двукратного применения теоремы 60.4 получим точные последовательности

$$0 \to C \otimes C \to A \otimes C \to (A/C) \otimes C \to 0$$

и

$$0 \to A \otimes C \to A \otimes A \to A \otimes (A/C) \to 0.$$

Ввиду п. A) из § 59 как $(A/C) \otimes C$, так и $A \otimes (A/C)$ — делимые группы, что дает нам точную последовательность

$$0 \to C \otimes C \to A \otimes A \to [(A/C) \otimes C] \oplus [A \otimes (A/C)] \to 0.$$

В силу теоремы 44.4 и редуцированности группы A последовательность $0 \to \operatorname{Hom}(A \otimes A, A) \to \operatorname{Hom}(C \otimes C, A)$, очевидно, точна. Это означает, что любое ν: $C \times C \to A$ может иметь не более одного продолжения μ: $A \times A \to A$. ∎

Другими словами, лемма утверждает, что всякое умножение на редуцированной группе полностью определяется своим ограничением на любой сервантной и плотной подгруппе.

Теперь мы в состоянии исследовать вложения в алгебраически компактные и копериодические группы [см. § 41 и 58]. Наша основная задача — показать, что кольцевые структуры на группах всегда могут быть продолжены до кольцевых структур на сервантно инъективных и копериодических оболочках этих групп, а в некоторых случаях такие продолжения единственны.

Теорема 119.3. *Пусть G — сервантно инъективная оболочка группы A. Всякое частичное умножение ν: $A \times A \to G$ может быть продолжено до умножения μ: $G \times G \to G$. Если G — редуцированная группа, то это продолжение единственно.*

Тем же способом, что и в доказательстве леммы 119.2, получим из сервантно точной последовательности $0 \to A \to G \to G/A \to 0$ сервантно точную последовательность $0 \to A \otimes A \to G \otimes G$. Так как G — сервантно инъективная группа, то всякий гомоморфизм $A \otimes A \to G$ может быть продолжен до некоторого гомоморфизма $G \otimes G \to G$. Второе утверждение теоремы следует из леммы 119.2. ∎

Из доказанной теоремы видно, что рассматриваемая ситуация представляет особенный интерес, если сервантно инъективная оболочка редуцированна. Более того, в этом случае мы можем слегка улучшить полученный результат и доказать

Следствие 119.4. *Пусть R — такое кольцо, что $\mathsf{R}^1 = 0$. Тогда существует одна и только одна кольцевая структура на Z-ади-*

ческом пополнении $\hat{\mathbf{R}}$ *кольца* $\mathbf{R}$, *продолжающая кольцевую структуру на* $\mathbf{R}$, *при этом сохраняются полиномиальные тождества* [*в частности, ассоциативность, коммутативность*], *верные в* $\mathbf{R}$. *Кроме того, кольцо* $\hat{\mathbf{R}}$ *превращается в* $\hat{\mathbf{Z}}$-*алгебру.*

Если первая ульмовская подгруппа $\mathbf{R}^1$ кольца $\mathbf{R}$ равна нулю, то можно считать группу $\mathbf{R}^+$ канонически вложенной в группу $\hat{\mathbf{R}} = \varprojlim {}_n\mathbf{R}/n\mathbf{R}$, как описано в теореме 39.5. Так как $\mathbf{R}$ — кольцо и $n\mathbf{R}$ — идеал в $\mathbf{R}$, то естественное отображение $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/n\mathbf{R}$ обеспечивает группу $\mathbf{R}/n\mathbf{R}$ кольцевой структурой. Теперь ясно, что отображения $\mathbf{R}/nm\mathbf{R} \to \mathbf{R}/n\mathbf{R}$ в рассматриваемой обратной системе являются кольцевыми гомоморфизмами, так что обратный предел снова будет кольцом $\hat{\mathbf{R}}$, содержащим $\mathbf{R}$ в качестве сервантного и плотного подкольца. Единственность полученной кольцевой структуры на $\hat{\mathbf{R}}$ как продолжения кольцевой структуры на $\mathbf{R}$ следует из леммы 119.2. Сохранение же полиномиальных тождеств очевидно, поскольку они сохраняются при гомоморфизмах и при взятии обратных пределов. Последнее утверждение следствия сразу вытекает из примера 7 § 106. ∎

В случае копериодических расширений имеем точный аналог теоремы 119.3.

Теорема 119.5. *Всякое частичное умножение* ν: $A \times A \to G$, *где* G — *копериодическая оболочка группы* A, *может быть продолжено до умножения* μ: $G \times G \to G$. *Это* μ *единственно, если* G — *редуцированная группа.*

Заметим, что G/A — делимая группа без кручения в силу теоремы 58.1. Такими же будут и группы $(G/A) \otimes A$ и $G \otimes (G/A)$, и мы получаем точную последовательность

$$0 \to A \otimes A \to G \otimes G \to [(G/A) \otimes A] \oplus [G \otimes (G/A)] \to 0.$$

Существование требуемого продолжения следует из теоремы 58.2. ∎

Упражнения

1. Найти делимую оболочку кольца целых чисел в конечном алгебраическом расширении поля $\mathbf{Q}$.

2. Пусть $\mathbf{R}$ и $\mathbf{D}$ — те же, что и в теореме 119.1.

(а) Установить взаимно однозначное соответствие между сервантными левыми идеалами в $\mathbf{R}$ и сервантными левыми идеалами в $\mathbf{D}$.

(б) Показать, что при этом соответствии простые идеалы переходят в простые.

(в) Кольцо $\mathbf{D}$ может обладать единицей, даже если кольцо $\mathbf{R}$ единицей не обладает.

(г) Если $\mathbf{D}$ — кольцо с единицей, то всякий левый идеал в $\mathbf{D}$ сервантен.

3. Пусть опять $\mathbf{R}$ и $\mathbf{D}$ — те же, что в теореме 119.1. Кольцо $\mathbf{D}$ содержит ненулевой нильпотентный левый идеал тогда и только тогда, когда этим свойством обладает кольцо $\mathbf{R}$.

4. Кольцо без кручения $\mathbf{R}$ является идеалом в своей делимой оболочке $\mathbf{D}$ тогда и только тогда, когда квадрат $\mathbf{R}^2$ кольца $\mathbf{R}$ содержится в максимальном делимом идеале кольца $\mathbf{R}$.

5. Применить лемму 119.2 к редуцированной периодической группе A и ее базисной подгруппе C.

6. Если A — периодическая группа и $A^1 = 0$, то существует естественный изоморфизм $\operatorname{Mult} \hat{A} \cong \operatorname{Mult} A$.

7 (Фукс [23]). Если A — редуцированная периодическая группа и $A^{\bullet}$ — ее копериодическая оболочка, то существует естественный изоморфизм $\operatorname{Mult} A^{\bullet} \cong \operatorname{Mult} A$.

§ 120. Периодические кольца

Теория периодических колец без труда сводится к теории p-колец. Действительно, в силу п. Б) из § 117 примарные компоненты $\mathbf{R}_p$ периодического кольца $\mathbf{R}$ являются идеалами, а кольцо $\mathbf{R}$ — их прямой суммой: $\mathbf{R} = \bigoplus\limits_p \mathbf{R}_p$.

В исследовании периодических колец поразительным результатом является следующая теорема. Она выявляет тесную связь между кольцевыми структурами и базисными подгруппами и дает удобный метод построения p-колец.

Теорема 120.1. *Умножение μ на p-группе A полностью определяется своими значениями $\mu(a_i, a_j)$, где каждый из элементов a_i, a_j пробегает p-базис группы A.*

Более того, для любого выбора значений $\mu(a_i, a_j) \in A$, где элементы a_i, a_j берутся из некоторого p-базиса группы A, при единственном условии, чтобы всегда выполнялось неравенство $o(\mu(a_i, a_j)) \leqslant \min(o(a_i), o(a_j))$, существует умножение на группе A, являющееся продолжением сопоставления $(a_i, a_j) \mapsto \mu(a_i, a_j)$.

Имеется несколько доказательств этого факта; мы предлагаем наиболее прямое и элементарное из них. Если значения $\mu(a_i, a_j)$ известны для всех элементов a_i, a_j из некоторого p-базиса группы A, то в силу дистрибутивности элементы $\mu(b, c)$ однозначно определяются этими значениями для всех элементов b, c из базисной подгруппы B, порожденной данным p-базисом $\{a_i\}$. Для данных элементов $g, h \in A$, где $o(h) = p^k$, запишем $g = b + p^k x$ при некоторых $b \in B$ и $x \in A$ и получим

$$\mu(g, h) = \mu(b, h) + \mu(p^k x, h) = \\ = \mu(b, h) + \mu(x, p^k h) = \mu(b, h).$$

Аналогично, $\mu(b, h) = \mu(b, c)$ для некоторого $c \in B$. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Заметим, что всякий элемент $b \in B$ единственным образом представим в виде линейной комбинации данных элементов a_i и для умножения $\mu(b, c)$ $(b, c \in B)$ без труда проверяются аксиомы кольца. Если продолжить μ на всю группу A [указанным выше способом], то для завершения доказательства останется лишь непосредственно проверить, что аксиомы кольца выполняются и в этом случае. ∎

Перед тем как продолжить исследование p-колец, сделаем несколько замечаний о полученной теореме и ее доказательстве.

Равенство $\mu(g, h) = \mu(b, c)$, встречающееся в этом доказательстве, показывает, что *умножение* μ *ассоциативно* [*коммутативно*] *в том и только в том случае, когда оно ассоциативно* [*коммутативно*] *на некотором р-базисе группы* A. *Мы видим также, что подгруппа* L *некоторого р-кольца* $\mathbf{R}$ *является левым идеалом в* $\mathbf{R}$ *тогда и только тогда, когда* $a_iL \subseteq L$ *для всех элементов* a_i *из некоторого р-базиса группы* $\mathbf{R}^+$. В частности, подкольцо $\mathbf{B}$, порожденное некоторой базисной подгруппой группы $\mathbf{R}^+$, всегда является идеалом в $\mathbf{R}$, причем $\mathbf{R}^2 \subseteq \mathbf{B}$.

Пример 1. Пусть A — некоторая p-группа и $B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ — базисная подгруппа группы A. В соответствии с теоремой 120.1 умножение μ на группе A будет однозначно определено, если положить

$$\mu(a_i, a_j) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ a_i, & \text{если} \quad i = j. \end{cases}$$

Получающееся кольцо (A, μ) ассоциативно и коммутативно, его квадрат — это прямая сумма колец $\mathbf{Z}/(o(a_i))$ на группах $\langle a_i \rangle$.

Пример 2. Можно получать и другие ассоциативные и коммутативные кольца, если изменить вторую часть определения в примере 1 и полагать $\mu(a_i, a_i) = a_i$ или $\mu(a_i, a_i) = 0$ по произвольному выбору.

Из теоремы 61.1 мы заключаем, что существует естественный изоморфизм $B \otimes B \cong A \otimes A$, где B — некоторая p-базисная подгруппа группы A. В соединении с теоремой 118.1 отсюда следует

Предложение 120.2 (Фукс [16]). *Для р-группы* A *и ее базисной подгруппы* B *существует изоморфизм* $\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Hom}(B \otimes B, A)$. ∎

Таким образом, если A — периодическая группа, то группа $\operatorname{Mult} A$ всегда является алгебраически компактной [см. теорему 46.1]. Инварианты группы $\operatorname{Mult} A$ легко определяются с помощью теоремы 61.3 и следствия 43.3.

Сразу обращает на себя внимание частный случай, когда $B = 0$. В этом случае группа A допускает лишь тривиальное умножение. Произвольную группу A назовем *нильгруппой*, если на группе A не существует никакого кольца, отличного от нуль-кольца, т. е. если $\operatorname{Mult} A = 0$. Если же группа A допускает лишь конечное число неизоморфных колец, то мы назовем ее *квазинильгруппой*. В случае периодических групп как нильгруппы, так и квазинильгруппы легко могут

быть описаны. Более того, немногим труднее решается проблема описания смешанных нильгрупп [в то время как для ознакомления с нильгруппами без кручения мы отсылаем читателя к теореме 121.2 и к работе Фукса [9]].

Теорема 120.3 (Селе [3]). *Периодическая группа является нильгруппой в том и только в том случае, когда она делима. Смешанных нильгрупп не существует.*

Прямое слагаемое в нильгруппе также является нильгруппой, а так как группы $Z(p^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не являются нильгруппами, то периодическая часть нильгруппы обязана быть делимой. С другой стороны, для делимой группы A имеем $A \otimes A = 0$ и, значит, A — нильгруппа.

Если A — смешанная группа с ненулевой делимой периодической частью T, то существует нетривиальный гомоморфизм группы $A \otimes A \neq \neq 0$ в группу T, и, таким образом, группа $\operatorname{Mult} A$ не может равняться нулю. ∎

Теорема 120.4 (Фукс [9]). *Периодическая группа A является квазинильгруппой тогда и только тогда, когда $A = B \oplus D$, где B — конечная группа, а D — делимая группа.*

Базисная подгруппа B квазинильгруппы A должна быть конечной. Иначе на группе A можно определить бесконечное число таких колец $\mathbf{R}$, что кольца $\mathbf{R}^2$ конечны и имеют различные порядки [см. пример 2 выше]. Таким образом, группа A имеет указанный вид.

Чтобы доказать обратное, достаточно рассмотреть p-группы $A = B \oplus D$ с конечными базисными подгруппами B. Пусть $p^nB = 0$ и $r = r(B)$. Тогда группа $B \otimes B$ имеет ранг r^2 и для нее выполняется равенство $p^n(B \otimes B) = 0$. Мы можем считать, что всякий автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}(B \otimes B, B \oplus D)$ отображает группу $B \otimes B$ в группу $B \oplus D_\varphi[p^n]$, где D_φ — некоторая делимая подгруппа группы D, имеющая ранг $s \leqslant r^2$. Несмотря на то что группа D_φ зависит от φ, ее можно выбрать однозначно с точностью до автоморфизмов группы D. Таким образом, если искать неизоморфные кольца на группе A, то следует рассматривать лишь одну группу D_φ, а именно имеющую ранг $\min(r^2, r(D))$. Далее, группа $B \otimes B$ обладает лишь конечным числом гомоморфизмов в группу $B \oplus D_\varphi[p^n]$, и, значит, A — квазинильгруппа. ∎

Цель следующих рассмотрений — указать на некоторые интересные связи, существующие между периодическими кольцами и их аддитивными группами. Мы не упустим из виду ассоциативные кольца, но этот случай будет разобран в конце параграфа.

Аннулятором кольца $\mathbf{R}$ называется множество всех элементов $a \in \mathbf{R}$, для которых $a\mathbf{R} = \mathbf{R}a = 0$. Если $\mathbf{R}$ — периодическое кольцо, то из п. Б) § 117 следует, что первая ульмовская подгруппа $\mathbf{R}^1$ кольца $\mathbf{R}$ должна содержаться в его аннуляторе. Однако от бо́льших подгрупп этого требовать уже нельзя.

Теорема 120.5. (Фукс [6]). *Аннулятор всякого кольца на периодической группе A содержит A^1. Существует ассоциативное и коммутативное кольцо на группе A, аннулятор которого в точности равен A^1.*

Для построения кольца (A, μ), аннулятор которого совпадает с A^1, мы отсылаем читателя к примеру 1. Пусть a — элемент конечной высоты и порядка p^k. Если $B = \oplus B_n$ — стандартное разложение базисной подгруппы $B = \bigoplus_n \langle a_i \rangle$ группы A, то в соответствии с теоремой 32.4 существует разложение

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus A_n, \quad \text{где} \quad A_n = \langle B_{n+1} \oplus \dots, p^n A \rangle.$$

Число n выберем здесь таким образом, чтобы $n \geqslant k + l$, где l является индексом первой ненулевой координаты элемента a в данном разложении группы A. Мы получаем $a = b_l + \dots + b_n + g_n$ $(b_l \neq 0)$, обозначения здесь очевидны. Если $b_l = n_1 a_{j_1} + \dots + n_s a_{j_s}$, где каждое слагаемое ненулевое, то $\mu(a, a_{j_1}) \neq 0$, так как $\mu(b_l, a_{j_1}) = n_1 a_{j_1} \neq 0$, в то время как $\mu(b_{l+1}, a_{j_1}) = \dots = \mu(b_n, a_{j_1}) = \mu(g_n, a_{j_1}) = 0$, где последнее равенство справедливо в силу того, что $h(g_n) \geqslant n - k \geqslant l$ и $o(a_{j_1}) \leqslant p^l$. Мы видим, что никакой элемент конечной высоты не лежит в аннуляторе кольца (A, μ) из примера 1. ∎

Некоторые элементы p-группы A порождают нильпотентные идеалы в каждом кольце на A. В самом деле, для данного элемента $a \in A$ порядка p^k всякий элемент из идеала (pa), порожденного элементом pa, делится на p в группе A и имеет порядок, не превосходящий p^{k-1}. Мы получаем отсюда, что произведение произвольных k элементов из идеала (pa) равно нулю, т. е. k-я степень идеала (pa) равна нулю. [Это верно даже для неассоциативных умножений, так как произведение k элементов из (pa) всегда равно нулю независимо от расстановки скобок.] Точным результатом о нильпотентных элементах является следующая

Теорема 120.6 (Фукс [6]). *Пусть A — периодическая группа и $F = \bigcap_p pA$ — подгруппа Фраттини группы A. Всякий элемент из F порождает нильпотентный идеал в каждом кольце на A. Существует такое ассоциативное и коммутативное кольцо на группе A, что любой его нильпотентный элемент содержится в F.*

При доказательстве второго утверждения мы можем ограничиться случаем p-групп A. Рассмотрим снова кольцо (A, μ) из примера 1. Поскольку всякий элемент из pA является нильпотентным, достаточно доказать, что соответствующее факторкольцо на группе $A/pA \cong B/pB$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Однако это кольцо является прямой суммой колец $\langle a_i \rangle / \langle pa_i \rangle \cong \mathbf{Z}/(p)$ в теоретико-кольцевом смысле, а в прямой сумме полей не существует ненулевых нильпотентных элементов. ∎

Ограничив рассмотрение случаем ассоциативных колец, мы можем задаться вопросом: какова наибольшая подгруппа данной периодической группы A, обязательно содержащаяся в радикале Джекобсона данного кольца на группе A? Предыдущая теорема и ее доказательство сразу же дают решение этой проблемы. Так как нильпотентные идеалы должны содержаться в радикале Джекобсона и так как прямая сумма полей имеет нулевой радикал, то справедливо

Следствие 120.7. *Подгруппа Фраттини F периодической группы A содержится в радикале Джекобсона всякого ассоциативного кольца на группе A. Существует ассоциативное и коммутативное кольцо на группе A, радикал которого совпадает с F.* ∎

Заключительный результат этого параграфа — не более чем простое замечание. Он показывает, что существование единичного элемента в периодических кольцах является удивительно сильным ограничением.

Предложение 120.8. *На периодической группе A существует кольцо с [левым] единичным элементом тогда и только тогда, когда A — ограниченная группа.*

Если n — порядок левой единицы e, то $na = nea = 0$ при всех $a \in A$ и, значит, A — ограниченная группа. Обратно, пусть n — наименьшее натуральное число, для которого $nA = 0$. Тогда группа A обладает циклическим слагаемым $\langle e \rangle$ порядка n, скажем $A = \langle e \rangle \oplus \oplus C$. Можно построить кольцо с элементом e в качестве единицы, положив умножение на C тривиальным и определив действие элемента e как умножение на 1. ∎

Упражнения

1. Построить такое p-кольцо, которое не является нильпотентным, но каждый из его элементов порождает нильпотентный идеал.

2. Для p-группы A определить инварианты алгебраически компактной группы Mult A.

3. Для p-группы A группа Mult A является конечной и отлична от нуля тогда и только тогда, когда A — конечно копорожденная группа.

4. Показать, что на счетной элементарной p-группе существует семейство мощности континуума неизоморфных ассоциативных колец. [*Указание*: прямые суммы конечных полей.]

5 (Фукс [9]). Если на периодической группе A не существует более, чем счетного, семейства неизоморфных колец, то A обязательно является квазинильгруппой. [*Указание*: базисная подгруппа ограниченна и имеет конечный ранг.]

6. Всякий простой идеал и всякий максимальный идеал p-кольца R содержат $p\mathsf{R}$.

7. а) На периодической группе A существует полупростое кольцо [т. е. кольцо с нулевым радикалом Джекобсона] в том и только в том случае, когда A — элементарная группа.

б) На периодической группе существует кольцо с нулевым аннулятором тогда и только тогда, когда $A^1 = 0$.

8. Пусть R — некоторое p-кольцо. Если каждый элемент из некоторой базисной подгруппы B группы R^+ является нильпотентным, то и каждый элемент из R нильпотентен. [*Указание*: для элемента $a \in R^+$ в смежном классе $a + B$ по подгруппе B взять элемент $o(a) \cdot a'$ и показать, что $a'^2 = b^2$ для некоторого $b \in B$.]

9. Радикал Джекобсона произвольного кольца на смешанной группе обязательно содержит подгруппу Фраттини ее периодической части.

§ 121. Кольца без кручения

В этом параграфе мы рассматриваем вопросы, касающиеся колец, аддитивные группы которых — группы без кручения. К сожалению, ограниченность наших сведений о структуре групп без кручения не дает нам возможности построить удовлетворительную теорию колец без кручения.

Класс делимых колец без кручения описывается без труда. Приступим к построению колец на делимой группе без кручения D. Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — максимальная независимая система элементов из D. Положим

$$\mu(a_i, a_j) = \sum_k t_{ijk} a_k \quad (i, j, k \in I),$$

где t_{ijk} — произвольные рациональные числа [для каждой пары фиксированных индексов i, j почти все t_{ijk} равны нулю]. Значения $\mu(a_i, a_j)$ дают некоторое умножение μ на группе D, и (D, μ) становится кольцом на D. Всякое кольцо на D можно получить указанным способом. Нетрудно сформулировать условие, необходимое и достаточное для ассоциативности умножения μ: при всяком наборе фиксированных индексов i, j, l, m должно выполняться следующее равенство:

$$\sum_k t_{ijk} t_{klm} = \sum_k t_{ikm} t_{jlk}.$$

Как мы видим, делимые кольца без кручения образуют весьма большой класс, и не удивительно, что в общем случае о них немногое можно сказать.

Ситуация сразу меняется, если опустить условие делимости. Тогда мы не можем уже выбирать числа t_{ijk} произвольно: они должны быть выбраны таким образом, чтобы произведения $\mu(x, y)$ при любых элементах x, y из данной группы снова лежали в этой группе. Это можно сделать, если мы обладаем соответствующими сведениями о данной группе.

В очень частном случае, когда ранг группы без кручения равен 1, возможно дать полный обзор колец на этой группе. Опуская случай нуль-кольца, будем считать, что R — кольцо без кручения ранга 1, в котором $ab \neq 0$ для некоторых элементов $a, b \in R$. Здесь b — рацио-

нальное кратное элемента a, следовательно, и $a^2 \neq 0$. Для ненулевых элементов $c, d \in \mathsf{R}$ найдутся такие отличные от нуля рациональные числа r, s, что $c = ra$, $d = sa$, откуда $cd = (rs)\,a^2$. Мы заключаем, что элемент a^2 полностью определяет умножение в R, и R обязательно является коммутативным и ассоциативным кольцом, не имеющим делителей нуля.

Выясним, когда на группе без кручения A ранга 1 существует кольцо, отличное от нуль-кольца. Записав $\mathbf{t} = \mathbf{t}(A)$, из предложений 85.3 и 85.4 получаем, что группа $\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Hom}(A \otimes A, A)$ отлична от нуля в том и только в том случае, когда $\mathbf{t}^2 \leqslant \mathbf{t}$, или, что то же самое, $\mathbf{t}$ — идемпотентный тип. Таким образом, группа A является нильгруппой тогда и только тогда, когда тип $\mathbf{t}$ не идемпотентен.

Перечислим теперь все кольца на группе A в предположении, что тип $\mathbf{t}$ идемпотентен. Выберем в A такой элемент $a \neq 0$, что характеристика $\chi(a)$ состоит лишь из нулей и символов ∞. Если R — кольцо на группе A, не являющееся нуль-кольцом, то $a^2 = ma$ для некоторого рационального числа $m \neq 0$. Без потери общности можно считать, что m — положительное целое число, не делящееся ни на какое простое число q, для которого на соответствующем месте в $\chi(a)$ стоит ∞; иначе элемент a можно было бы заменить на некоторое его рациональное кратное с той же характеристикой и нужным свойством. Пусть $\{q_j\}_{j \in J}$ — множество таких простых чисел, что на соответствующих им местах в характеристике $\chi(a)$ стоит ∞ [т. е. $q_jA = A$], и пусть $\mathbf{Z}(q_j^{-1}, j \in J)$ — подкольцо поля $\mathbf{Q}$, порожденное всеми числами q_j^{-1}. Тогда существует кольцевой изоморфизм $\mathsf{R} \cong m\mathbf{Z}(q_j^{-1}, j \in J)$. Действительно, сразу видно, что отображение $ra \mapsto mr$, где $r \in \mathbf{Z}(q_j^{-1}, j \in J)$, биективно и сохраняет как сложение, так и умножение. Тем самым мы доказали следующую теорему:

Теорема 121.1 (Редей и Селе [1], Бьюмонт и Цукерман [1]). *Кольцо без кручения ранга* 1 *либо является нуль-кольцом, либо изоморфно некоторому подкольцу поля рациональных чисел, имеющему вид*

$$m\mathbf{Z}(q_j^{-1},\ j \in J), \quad \text{где} \quad (m, q_j) = 1. \tag{1}$$

Группа без кручения ранга 1 *не является нильгруппой тогда и только тогда, когда ее тип идемпотентен.* ∎

Проблема изоморфизма для колец на группах без кручения A ранга 1 легко может быть решена. Действительно, *два кольца вида* (1) *изоморфны тогда и только тогда, когда множество* $\{q_j\}_{j\in J}$ *простых чисел и целое число* $m > 0$ — *одни и те же для обоих колец.* Чтобы доказать это, достаточно заметить, что числа q_j определяются одной лишь группой A [а именно, условием $q_jA = A$], в то время как число m можно определить как натуральное число, взаимно простое со всеми числами q_j, для которого $\mathsf{R}^2 = m\mathsf{R}$.

Если в классе периодических групп нильгруппы могут быть охарактеризованы явным образом, то в классе групп без кручения описание нильгрупп — весьма трудная проблема. Предыдущая теорема рас-

пространяется на случай вполне разложимых групп [см. упр. 6], но снова недостаточность наших сведений о структуре групп без кручения в общем случае делает, по-видимому, невозможной удовлетворительную классификацию нильгрупп.

Все жесткие группы ранга $r \geqslant 2$ являются нильгруппами. Кольца эндоморфизмов этих групп являются подкольцами поля $\mathbf{Q}$, так что наше утверждение сразу вытекает из следующего предложения:

Предложение 121.2. *Пусть A — такая группа без кручения, что все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами и A как $\mathbf{E}(A)$-модуль содержит хотя бы два независимых элемента. Тогда A — нильгруппа.*

Пусть элементы $a, b \in A$ независимы над кольцом $\mathbf{E}(A)$, т. е. равенство $\alpha a = \beta b$ при $\alpha, \beta \in \mathbf{E}(A)$ всегда влечет за собой $\alpha = 0 = \beta$. В произвольном кольце на группе A левое умножение λ_a на элемент a и правое умножение ρ_b на элемент b являются такими эндоморфизмами группы A, что $\rho_b a = \lambda_a b$, откуда по условию $\lambda_a = 0 = \rho_b$. Мы заключаем, что $0 = \lambda_a c = ac = \rho_c a$ для всех элементов $c \in A$; таким образом, ρ_c не является мономорфизмом и, значит, $\rho_c = 0$ при всех $c \in A$. Другими словами, A — нильгруппа. ∎

Обращаясь к вопросам, касающимся идеалов, приведем два простых примера.

Предложение 121.3. *Для произвольного максимального* [*левого*] *идеала $\mathbf{M}$ кольца без кручения $\mathbf{R}$ либо $(\mathbf{R}/\mathbf{M})^+$ — делимая группа без кручения, либо при некотором простом числе p идеал $\mathbf{M}$ содержит $p\mathbf{R}$.*

Пусть $\mathbf{M}$ — такой максимальный [левый] идеал кольца $\mathbf{R}$, что ни для какого простого числа p не выполняется включение $p\mathbf{R} \subseteq \mathbf{M}$. Тогда при всяком простом числе p справедливо равенство $p\mathbf{R} + \mathbf{M} = \mathbf{R}$, т. е. $(\mathbf{R}/\mathbf{M})^+$ — делимая группа. Группа $(\mathbf{R}/\mathbf{M})^+$ обязана быть группой без кручения, так как иначе для некоторого простого числа p имеет место строгое включение $\mathbf{M} \subset p^{-1}\mathbf{M}$. ∎

Предложение 121.4. *Объединение $\mathbf{N}$ всех нильпотентных левых идеалов* [*или левых нильидеалов*] *кольца без кручения $\mathbf{R}$ является сервантным в $\mathbf{R}$.*

Если $\mathbf{L}$ — нильпотентный левый идеал в $\mathbf{R}$, то сервантная подгруппа $\mathbf{L}_*$, порожденная $\mathbf{L}$, снова является нильпотентным идеалом в $\mathbf{R}$. Поскольку всякий элемент $a \in \mathbf{N}$ порождает нильпотентный левый идеал, первое утверждение справедливо. Для левых нильидеалов доказательство еще проще. ∎

Можно получить более содержательные результаты, если рассматривать кольца конечного ранга. Оставшаяся часть параграфа посвящена случаю колец конечного ранга. Кроме того, мы будем везде предполагать ассоциативность.

Из теоремы 119.1 непосредственно вытекает, что кольцо без кручения $\mathbf{R}$ конечного ранга является подкольцом некоторой однозначно

определенной конечномерной $\mathbf{Q}$-алгебры A того же ранга, что и $\mathbf{R}$. О подкольцах же самого кольца $\mathbf{R}$ можно доказать

Предложение 121.5 (Бьюмонт и Пирс [3]). *Кольцо без кручения* $\mathbf{R}$ *конечного ранга содержит подкольцо* $\mathbf{B}$, *аддитивная группа которого свободна и имеет тот же ранг, что и* $\mathbf{R}$. *Если* $\mathbf{R}$ *обладает единицей* e, *то подкольцо* $\mathbf{B}$ *можно выбрать таким образом, чтобы оно содержало* e.

Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — максимальная независимая система элементов в $\mathbf{R}$, и пусть $a_i a_j = \sum_k t_{ijk} a_k$, где $t_{ijk} \in \mathbf{Q}$. Если n — такое натуральное число, что nt_{ijk} — целые числа при всех i, j, k, то легко видеть, что подгруппа $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, где $b_i = na_i$, замкнута относительно умножения и является, таким образом, аддитивной группой некоторого подкольца $\mathbf{B}$. Если $e \in \mathbf{R}$, то элементы подкольца $\mathbf{B}_0$, порожденного подкольцом $\mathbf{B}$ и единицей e, имеют вид $ke + b$ при $k \in \mathbf{Z}$ и $b \in \mathbf{B}$. Мы получаем, что $\mathbf{B}^+$, $\mathbf{B}_0^+$ — конечно порожденные группы. ∎

Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо без кручения конечного ранга. Из теоремы 119.1 мы заключаем, что $\mathbf{R}^+$ — существенная подгруппа в некоторой конечномерной $\mathbf{Q}$-алгебре $\mathbf{D}$. В силу хорошо известной основной теоремы Веддербёрна о сепарабельных конечномерных алгебрах существует разложение $\mathbf{D} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{N}$ векторного пространства $\mathbf{D}$ в прямую сумму векторных пространств. Здесь $\mathbf{S}$ — полупростая подалгебра [и не обязательно идеал] в алгебре $\mathbf{D}$, а $\mathbf{N}$ — радикал алгебры $\mathbf{D}$, обязательно нильпотентный. Ввиду структурной теоремы Веддербёрна подалгебру $\mathbf{S}$ можно разложить в прямую сумму конечного числа простых алгебр, каждая из которых является полным кольцом матриц над некоторым [в общем случае некоммутативным] телом. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $\mathbf{N} = 0$, т. е. $\mathbf{D}$ — полупростая алгебра. Для ознакомления с общим случаем [требующим более изощренных рассуждений] см. работу Бьюмонта и Пирса [3].

Следуя Бьюмонту и Пирсу [3], будем говорить, что кольцо без кручения $\mathbf{R}$ является *кольцом типа простой* [*полупростой*] *алгебры*, если его делимая оболочка $\mathbf{D}$ — простая [полупростая] $\mathbf{Q}$-алгебра. Аналогично, $\mathbf{R}$ — *кольцо типа тела*, если $\mathbf{D}$ — [необязательно коммутативное] тело.

Лемма 121.6. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *кольцо без кручения типа простой алгебры. Тогда* $\mathbf{R}^+$ — *однородная группа идемпотентного типа и ненулевые идеалы кольца* $\mathbf{R}$ *имеют в* $\mathbf{R}$ *конечный индекс.*

Для всякого элемента $a \neq 0$ из $\mathbf{R}$ элементы идеала $\mathbf{A}$, порожденного элементом a, имеют типы, большие или равные типу $\mathbf{t}(a)$. В силу того, что $\mathbf{D}$ — простая алгебра, существует целое число $m > 0$, для которого $me \in \mathbf{A}$, где e — единица алгебры $\mathbf{D}$. Таким образом, $\mathbf{t}(me) \geqslant \mathbf{t}(a)$, а так как обратное неравенство очевидно, мы получаем, что $\mathbf{R}^+$ — однородная группа без кручения. Ее тип идемпотентен, поскольку элементы $(me)^2$ и me имеют один и тот же тип в $\mathbf{R}$. Из нашего рас-

суждения следует, что $m\mathsf{R} \subseteq \mathsf{A}$, а раз факторкольцо $\mathsf{R}/m\mathsf{R}$ конечно при всех $m \neq 0$, то всякий [главный] идеал имеет конечный индекс в R. ∎

Теперь мы докажем основной результат этого параграфа.

Теорема 121.7 (Бьюмонт и Пирс [3]). *Пусть* R — *кольцо без кручения конечного ранга типа полупростой алгебры. Тогда оно содержит такое подкольцо* S *конечного индекса, что*

$$\mathsf{S} = \mathsf{S}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{S}_n \quad (\textit{прямая сумма в теоретико-кольцевом смысле}),$$

где каждое из S_i — *полное кольцо матриц над некоторым кольцом* F_i *типа тела.*

Можно считать без потери общности, что единица e соответствующей полупростой алгебры D принадлежит кольцу R, так как R имеет конечный индекс в подкольце алгебры D, порожденном кольцом R и единицей e. Запишем $\mathsf{D} = \mathsf{D}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{D}_n$, где D_i — простые алгебры. Пусть $e = e_1 + \ldots + e_n$, где $e_i \in \mathsf{D}_i$ — ортогональные идемпотенты. Если целое число $m > 0$ выбрано таким образом, что $me_i \in \mathsf{R}$ при всех i, и если $a = a_1 + \ldots + a_n$ ($a_i \in \mathsf{D}_i$), то $ma_i = me_ia_i = (me_i)\, a \in \mathsf{R}$. Отсюда следует, что подкольцо $\mathsf{R}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{R}_n$, где $\mathsf{R}_i = \mathsf{D}_i \cap \mathsf{R}$, имеет конечный индекс в R. Тем самым мы свели доказательство к случаю $n = 1$.

Итак, пусть R — кольцо типа простой алгебры, т. е. D — полное кольцо матриц над некоторым телом K [содержащим $\mathsf{Q}e$]. Пусть e_{jk} ($j, k = 1, \ldots, s$) — матричные единицы в D. Тогда $\overline{\mathsf{K}} = e_{11}\mathsf{D}e_{11}$ — алгебра, изоморфная телу K, и $\mathsf{R} \cap \overline{\mathsf{K}}$ — подкольцо кольца R, причем $\overline{\mathsf{K}}$ — его делимая оболочка. Пусть $m > 0$ — такое целое число, что $me_{jk} \in \mathsf{R}$ при всех i, k; положим $\mathsf{K}_{jk} = (me_{1j})\, \mathsf{R}\, (me_{k1})$ — это подкольца алгебры $\overline{\mathsf{K}}$, и определим $\mathsf{F} = \bigcap_{j,k} \mathsf{K}_{jk}$. Для всякого элемента $a \in \overline{\mathsf{K}} \cap \mathsf{R}$ из того, что $m^4a = (me_{1j})\,(me_{j1})\, a\, (me_{1k})\,(me_{k1}) \in \mathsf{K}_{jk}$, следует, что F имеет конечный индекс в $\overline{\mathsf{K}} \cap \mathsf{R}$, значит, F — кольцо типа тела. Для данной матрицы $[x_{jk}]$ порядка s над кольцом F мы можем записать $x_{jk} = (me_{1j})\, a_{jk}\, (me_{k1})$ при некоторых $a_{jk} \in \mathsf{R}$ и, значит, $e_{j1}x_{jk}e_{1k} = (me_{jj})\, a_{jk}\, (me_{kk}) \in \mathsf{R}$. Соответствие $[x_{jk}] \mapsto \sum_{j,k} e_{j1}x_{jk}e_{1k}$ является изоморфизмом между полным кольцом $\mathsf{F}(s)$ матриц порядка s над кольцом F и подкольцом S кольца R. Для произвольного элемента $a \in \mathsf{R}$ получаем $m^6a = m^6 \sum_{j,k} e_{jj}ae_{kk} = \sum e_{j1}\, [m^4\, (me_{1j})\, a\, (me_{k1})]\, e_{1k} \in \mathsf{S}$, таким образом, S имеет конечный индекс в R. ∎

Упражнения

1. Пусть F — свободная группа и G — подгруппа группы F. Существует такое кольцо R на группе F, что аддитивная группа кольца R^2 совпадает с G.

2. а) Свободная группа конечного ранга допускает счетное число попарно неизоморфных [ассоциативных] колец.

б) На свободной группе бесконечного ранга $\mathfrak{n}$ существует $2^{\mathfrak{n}}$ неизоморфных колец. [*Указание*: упр. 1.]

3. В кольцах без кручения левые аннуляторы элементов являются левыми идеалами.

4. Привести пример кольца без кручения конечного ранга, в котором радикал Джекобсона не является сервантным. Может ли радикал Джекобсона иметь в кольце без кручения конечный индекс?

5. Описать строение колец на вполне разложимых однородных группах идемпотентных типов.

6 (Ри и Уиснер [1]). (а) Пусть R, S, T — рациональные группы, содержащие целые числа. Положим $(R, S, T) = \{q \in Q \mid qRS \subseteq T\}$. Показать, что (R, S, T) — подгруппа группы Q.

(б) Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} R_i$, причем R_i — такие рациональные группы, что $(R_i, R_j, R_k) = 0$ при любом выборе индексов $i, j, k \in I$. Тогда A — нильгруппа.

7. Существуют нильгруппы без кручения произвольного ранга.

8. Если A, C — нильгруппы, то группа $A \oplus C$ не обязана быть нильгруппой.

9 (Селе [3]). Если группа A обладает эндоморфным образом, не являющимся нильгруппой, то и сама группа A не является нильгруппой.

10 (Корнер). (а) Показать, что группа из упр. 8 § 88 является нильгруппой.

(б) Существуют однородные нильгруппы без кручения типа $(0, \ldots, 0, \ldots)$.

11 (Селе [7]). (а) Для заданного натурального числа n построить группу A со следующим свойством: на группе A существует ассоциативное кольцо $\mathbf{R}$, такое, что $\mathbf{R}^n \neq 0$, но никакое кольцо $\mathbf{R}$, для которого $\mathbf{R}^{n+1} \neq 0$, не может быть на ней определено. [*Указание*: $A = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, где R_i — рациональная группа типа $(i, \ldots, i, \ldots)$.]

(б) Если $n > 1$, то периодических групп с указанным свойством не существует.

(в) Если $n = 1$, то группа A не может быть смешанной.

§ 122. Аддитивные группы артиновых колец

Мы переходим к изучению аддитивных структур колец некоторых важных типов. Наше исследование начинается с рассмотрения иллюстративного класса [левых] артиновых колец, т. е. ассоциативных колец, в которых левые идеалы удовлетворяют условию минимальности. [В действительности нам нигде не потребуется ассоциативность, кроме как при доказательстве теоремы 122.7.] Основной результат — необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная группа была аддитивной группой некоторого артинова кольца.

Для начала рассмотрим нильпотентные артиновы кольца R, т. е. такие, что $R^k = 0$ при некотором целом $k > 0$. Аддитивная структура этих колец легко может быть охарактеризована.

Предложение 122.1 (Селе [15]). *Группа A является аддитивной группой некоторого нильпотентного артинова кольца тогда и только тогда, когда в ней выполняется условие минимальности для подгрупп.*

Пусть R — нильпотентное артиново кольцо и $R^k = 0$. Всякая подгруппа группы R^+, содержащая R^{i+1} и содержащаяся в R^i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$), является идеалом в R. Таким образом, условие минимальности для подгрупп выполнено в группах R^i/R^{i+1} ($i = 1, \ldots, k-1$) и, значит, в группе R^+, так как это условие сохраняется при расширениях.

Обратно, если группа A удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то нуль-кольцо на группе A нильпотентно и артиново. ■

Отказавшись от условия нильпотентности, перейдем к изучению артиновых колец в общем случае. Сначала докажем две предварительные леммы.

Лемма 122.2. *Произвольная ненулевая делимая группа без кручения является аддитивной группой некоторого поля.*

Аддитивная группа поля алгебраических расширений степени n рационального поля Q — это делимая группа без кручения ранга n. Если $\mathfrak{n}$ — бесконечное кардинальное число, то с помощью «полевого» присоединения $\mathfrak{n}$ переменных к полю Q получим поле, аддитивная группа которого без кручения, делима и имеет ранг $\mathfrak{n}$. ■

Лемма 122.3. *Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число и A — прямая сумма $\mathfrak{m}$ групп, изоморфных $Z(p^k)$. Тогда на группе A существует ассоциативное и коммутативное кольцо R с единицей, единственные идеалы которого — это R, pR, ..., p^kR = 0.*

Допустим, что уже существует кольцо R с указанными свойствами, и покажем, как построить большее кольцо S с теми же свойствами. Пусть S — кольцо R [[x]] всех формальных рядов Лорана с переменной x и коэффициентами из R. Другими словами, кольцо S состоит из элементов, имеющих вид

$$f(x) = a_{-m}x^{-m} + \ldots + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$
$$(a_n \in R).$$

Таким образом, аддитивная группа кольца S — это группа

$$S^+ = \bigoplus_{n=-1}^{-\infty} R^+ \oplus \prod_{n=0}^{\infty} R^+.$$

Значит, снова S^+ — прямая сумма групп, изоморфных $Z(p^k)$. Покажем, что всякий главный идеал $L = (f(x))$ кольца S равен одному из

идеалов S, pS, ..., $p^k S = 0$; тогда то же самое будет верно и для произвольного идеала.

Сгруппировав члены ряда, коэффициенты которых делятся на одну и ту же степень простого числа p, запишем образующий идеала $L \neq 0$ в виде

$$f(x) = p^{k-1} f_{k-1}(x) + \ldots + p^s f_s(x) \quad (0 \leqslant s \leqslant k-1, \ f_s(x) \neq 0); \quad (1)$$

здесь $f_i(x)$ — ряд Лорана, коэффициенты которого не делятся на p. Тогда L содержит $p^{k-s-1} f(x) = p^{k-1} f_s(x) \neq 0$. Непосредственное вычисление [или ссылка на то, что S/pS — поле формальных рядов Лорана над полем R/pR] дает такие элементы $g_s(x)$, $h_s(x) \in S$, что $f_s(x) g_s(x) = 1 + p h_s(x)$. Отсюда $p^{k-1} f_s(x) g_s(x) = p^{k-1}$ лежит в L, т. е. $p^{k-1} S \subseteq L$. Если $s \leqslant k-2$, то $p^{k-1} f_{s+1}(x) + p^{k-2} f_s(x) = p^{k-s-2} f(x) \in L$ и в силу уже доказанного $p^{k-2} f_s(x) \in L$, откуда $p^{k-2} S \subseteq L$. Продолжая этот процесс, получаем, что $p^s S \subseteq L$. Так как $f(x) \in p^s S$, то справедливо требуемое равенство $L = p^s S$.

Чтобы доказать лемму 122.3, рассмотрим сначала общий случай $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$. Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$ — множество коммутирующих переменных, причем $|I| = \mathfrak{m}$. Положим $R_0 = Z/(p^k)$ и определим R как объединение [или прямой предел] колец формальных рядов Лорана $R_0[[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]]$, взятое по всем конечным подмножествам $\{i_1, \ldots, i_n\}$ множества I. Тогда $R^+ = \underset{\mathfrak{m}}{\oplus} Z(p^k)$ и в силу полученного в первой части доказательства всякий ряд $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ порождает один из идеалов R, pR, ..., $p^k R = 0$.

Восполним пробел и докажем наше утверждение для случая $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. В кольце $R_0[[x]] = S$ выберем подкольцо S_0, содержащее единицу и имеющее мощность $\mathfrak{m}$. Пусть S_1 — подкольцо кольца S, порожденное элементами $f_{k-1}(x)$, ..., $f_s(x)$, встречающимися в разложении (1), а также соответствующими элементами $g_s(x)$, $h_s(x)$ для всех $f(x) \in S_0$. Повторяя этот процесс с заменой S_0 на S_1, получаем кольцо S_2, содержащее S_1, и т. д. Положим $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Это кольцо имеет мощность $\mathfrak{m}$ и сервантно в кольце S [если $p^l g(x) \in S_n$, то $g(x) \in S_{n+1}$], так что оно обладает требуемой аддитивной структурой. Кольцо R, как показано выше, не имеет идеалов, кроме R, pR, ..., $p^k R = 0$. ∎

Теперь мы можем доказать результат, о котором говорили в начале этого параграфа,— точную структурную теорему для аддитивных групп артиновых колец.

Теорема 122.4 (Селе и Фукс [1]). *Для того чтобы группа A была аддитивной группой некоторого артинова кольца, необходимо и доста-*

точно, чтобы она имела вид

$$A = \bigoplus_{\mathfrak{m}} Q \oplus \bigoplus_{\substack{\text{конечное} \\ \text{число}}} Z(p_i^\infty) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p_j^{k_j}), \text{ где } p_j^{k_j} \mid m, \qquad (2)$$

причем $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — *произвольные кардинальные числа, а* m — *фиксированное целое число.*

Пусть R — артиново кольцо. Ввиду условия минимальности семейство идеалов $n\mathsf{R}$ ($n = 1, 2, \ldots$) содержит минимальный идеал, скажем, $m\mathsf{R} = \mathsf{L}$. Для этого идеала при всех простых числах p выполняется равенство $p\mathsf{L} = \mathsf{L}$, т. е. L — делимый идеал. Будучи таковым, L — прямое слагаемое в R в групповом смысле, $\mathsf{R}^+ = \mathsf{L}^+ \oplus T$, где T — некоторая подгруппа в R. Из равенств $\mathsf{L}^+ = m\mathsf{R}^+ = m\mathsf{L}^+ \oplus mT$ заключаем, что $mT = 0$, и, значит, R^+ — прямая сумма делимой группы L^+ и ограниченной группы T. Для завершения доказательства необходимости нам осталось лишь показать, что периодическая часть группы L^+ имеет конечный ранг. Доказательство последнего утверждения основывается на простом факте, достаточно интересном, чтобы выделить его в отдельную лемму.

Лемма 122.5. *Квазициклические подгруппы артинова кольца лежат в аннуляторе кольца.*

В произвольном кольце элементы конечного порядка, безусловно, аннулируются элементами из максимальной делимой подгруппы. Если R — артиново кольцо, то в силу полученного в доказательстве теоремы 122.4 мы видим, что периодическая часть группы L^+ аннулируется как подгруппой L^+, так и подгруппой T. ∎

Вернемся к доказательству теоремы 122.4. Из леммы 122.5 следует, что подгруппы периодической части группы L^+ — идеалы в R. Таким образом, для них выполняется условие минимальности и, значит, периодическая часть группы L^+ должна иметь конечный ранг. Итак, группа R^+ имеет вид (2).

Докажем достаточность. Пусть A — группа вида (2). Соберем вместе изоморфные слагаемые и запишем $A = D \oplus C \oplus A_1 \oplus \ldots \ldots \oplus A_k$, где D — делимая группа без кручения, C — периодическая делимая группа, а каждое из A_i — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка, равного степени простого числа. Если $D \neq 0$, то, как показано в лемме 122.2, существует поле D на группе D. Нуль-кольцо C над C является артиновым и по лемме 122.3 каждая группа A_i допускает кольцевую структуру A_i с лишь конечным числом левых идеалов. Прямая сумма $\mathsf{R} = \mathsf{D} \oplus \mathsf{C} \oplus \mathsf{A}_1 \oplus \ldots \ldots \oplus \mathsf{A}_k$ полученных колец является артиновым кольцом, что и требовалось. [Более того, мы видим, что на группе A вида (2) существует даже коммутативное артиново кольцо.] ∎

Первая часть приведенного доказательства останется верной, если кольцо R заменить на какой-либо его левый идеал. Чтобы подчеркнуть этот факт и в дальнейшем на него ссылаться, запишем его как

Следствие 122.6. *Аддитивная группа произвольного левого идеала артинова кольца имеет вид* (2). ■

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству некоторого теоретико-кольцевого результата. Не только его доказательство, но и сама формулировка связаны с аддитивными группами.

Напомним просто формулируемый результат, сыгравший большую роль в развитии теории артиновых колец и по-разному доказывавшийся многими авторами. *Артиново кольцо* R *обладает левым единичным элементом*. Приведем вкратце доказательство этого факта. В силу предложения 122.1 кольцо R не является нильпотентным; следовательно, в кольце R существует такой идемпотент $e \neq 0$, что $e + \mathsf{N}$ — единичный элемент полупростого артинова кольца $\mathsf{R/N}$, где N — объединение всех нильпотентных левых идеалов кольца R. Для произвольного элемента $a \in \mathsf{R}$ левый идеал, порожденный элементом $a' = a - ea$, делим, так что $\frac{1}{2}a' = na' + ba'$ при некоторых $n \in \mathsf{Z}$, $b \in \mathsf{R}$. Отсюда $(2n-1)a' = -ba'$ и $a' = ca'$, где $c = -(2n-1)^{-1} b \in \mathsf{R}$. Так как $a' = ca'$, то $eca' = ea' = 0$, и, значит, $a' = (c - ec)a' = \ldots = (c - ec)^m a'$ при всяком $m \geqslant 1$. Поскольку $c - ec \in \mathsf{N}$, получаем $a - ea = a' = 0$.

Теорема 122.7 (Селе и Фукс [1], Сас [2]). *Всякое артиново кольцо* R *является теоретико-кольцевой прямой суммой некоторого артинова кольца без кручения* S *и конечного числа артиновых* p*-колец* T_{p_i}, *соответствующих различным простым числам* p_i:

$$\mathsf{R} = \mathsf{S} \oplus \mathsf{T}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathsf{T}_{p_k}.$$

Периодическая часть T кольца R является идеалом в R. Она разлагается в прямую сумму своих p-компонент T_p, и ввиду теоремы 122.4 лишь конечное число этих компонент отлично от нуля. Снова по теореме 122.4 мы можем записать $\mathsf{R}^+ = D \oplus \mathsf{T}^+$, где D — некоторая делимая подгруппа без кручения группы R^+. Факторкольцо $\mathsf{R/T}$ является артиновым кольцом без кручения. Пусть $e + \mathsf{T}$ — левая единица в $\mathsf{R/T}$, можно считать при этом, что $e \in D$. Положим $\mathsf{S} = e\mathsf{R}$. Заметим, что так как $e + \mathsf{T}$ — левая единица в $\mathsf{R/T}$, то произвольный элемент $a \in \mathsf{R}$ имеет вид $a = ea + (a - ea)$, где $ea \in \mathsf{S}$, $a - ea \in \mathsf{T}$. Далее, $ea \in \mathsf{T}$ возможно лишь в случае $a \in \mathsf{T}$, а тогда $ea = 0$, поскольку всякий элемент из делимой группы D аннулирует периодическую часть T. Следовательно, $\mathsf{R} = \mathsf{S} \oplus \mathsf{T}$, и остается лишь показать, что S — левый идеал. Но последнее сразу вытекает из равенств $\mathsf{TS} = \mathsf{T}e\mathsf{R} = 0$. ■

Из теоремы 122.7 видно, что структурная теория артиновых колец может быть сведена к случаям артиновых колец без кручения и артиновых p-колец. Квазициклические подгруппы слабо влияют на структуру артиновых колец; таким образом, среди артиновых p-колец только ограниченные кольца представляют действительный интерес.

Упражнения

1 (Селе [15]). Описать строение всех нильпотентных артиновых колец.

2. Квазициклические подгруппы не обязаны лежать в аннуляторе кольца, если кольцо не является артиновым.

3. Показать, что утверждения 122.4—122.6 дословно переносятся на случай колец с условием минимальности для двусторонних идеалов.

4. Пусть M — [не обязательно унитарный] левый модуль над кольцом R, причем подмодули модуля M удовлетворяют условию минимальности. Тогда M как абелева группа является прямой суммой групп, изоморфных Q, $Z(p^\infty)$ и $Z(p^k)$, где p^k — делитель фиксированного числа m.

5 (Сас [2]). (а) Группа A является аддитивной группой некоторого кольца с условием минимальности для главных [левых] идеалов тогда и только тогда, когда A — прямая сумма делимой группы и периодической группы.

(б) Лемма 122.5 останется верной, если потребовать от кольца условия минимальности для главных [левых] идеалов.

6. Для артиновых колец, не содержащих квазициклических подгрупп, доказать теорему 122.7, убедившись, что R как кольцо является прямой суммой своей периодической части и максимального делимого идеала кольца R.

7. Доказать следующее обобщение теоремы 122.7. Пусть R — такое кольцо, что факторкольцо R/T, где T — периодическая часть кольца R, является делимым кольцом с односторонним единичным элементом, и пусть T как подгруппа выделяется в R прямым слагаемым. Тогда $\mathsf{R} = \mathsf{S} \oplus \mathsf{T}$ для некоторого идеала S кольца R.

§ 123. Артиновы кольца без квазициклических подгрупп

В этом параграфе мы предполагаем рассмотреть два теоретико-кольцевых вопроса, касающихся артиновых колец: *когда артиново кольцо* R *может быть вложено в некоторое артиново кольцо с единицей?* И второй: *когда левые идеалы кольца* R *удовлетворяют также и условию максимальности?* Естественно, мы далеки от того, чтобы браться в этой книге за анализ теоретико-кольцевых проблем. Но рассмотрение сформулированных вопросов оправдано тем фактом, что полные их решения опираются на свойства аддитивной структуры кольца R.

Как известно, всякое кольцо может быть вложено в качестве идеала в некоторое кольцо с единицей. Стандартная процедура [присоединение целых чисел], примененная к артинову кольцу, не приводит снова к артинову кольцу. На самом деле не всякое кольцо R можно вложить в некоторое артиново кольцо с единицей. Необходимое условие без труда извлекается из леммы 122.5. Артиновы кольца с единицей не имеют ненулевых аннуляторов, значит, не содержат

квазициклических подгрупп, что доказывает необходимость условий следующей теоремы.

Теорема 123.1 (Селе и Фукс [1]). *Артиново кольцо* R *может быть вложено* [*в качестве идеала*] *в некоторое артиново кольцо с единицей тогда и только тогда, когда* R *не содержит квазициклических подгрупп.*

Докажем достаточность. Пусть R — артиново кольцо, не содержащее квазициклических подгрупп. Из теоремы 122.7 следует, что R как кольцо является прямой суммой артинова кольца без кручения S и конечного числа артиновых p-колец T_p. Таким образом, достаточно доказать, что каждое из колец S и T_p может быть вложено как идеал в некоторое артиново кольцо с единицей.

Чтобы избежать повторения рассуждений, мы выделяем часть доказательства в виде леммы, на которую впоследствии будем не раз ссылаться.

Лемма 123.2. *Пусть* A — *ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей* ε *и* R — *ассоциативное кольцо, являющееся в то же время унитарной* A-*алгеброй. Множество пар* (α, a) $(\alpha \in \mathsf{A},\ a \in \mathsf{R})$ *образует ассоциативное кольцо* R_A *с единицей* $(\varepsilon, 0)$ *относительно операций:*

$$(\alpha, a) + (\beta, b) = (\alpha + \beta,\ a + b),$$
$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta,\ \alpha b + \beta a + ab)$$

при произвольных $\alpha, \beta \in \mathsf{A}$, $a, b \in \mathsf{R}$. *С помощью вложения* $\mapsto a\ (0,a)$ *кольцо* R *можно отождествить с идеалом в* R_A. *Факторкольцо кольца* R_A *по этому идеалу изоморфно* A.

Доказательство состоит в непосредственной проверке аксиом кольца и похоже на обычное присоединение единицы в случае $\mathsf{A} = \mathsf{Z}$. ∎

Перед тем как продолжить доказательство теоремы, заметим, что R_A может быть артиновым кольцом, только если A артиново, поскольку свойство артиновости сохраняется при эпиморфизмах. Мы будем руководствоваться этим замечанием при выборе подходящего A в доказательстве теоремы 123.1.

Артиново кольцо без кручения S делимо в силу теоремы 122.4, таким образом, его можно рассматривать как алгебру над полем Q. Благодаря лемме 123.2 остается показать, что кольцо S_Q, получаемое с помощью этой леммы, также является артиновым. Но это действительно так, поскольку идеал S кольца S_Q и факторкольцо $\mathsf{S}_\mathsf{Q}/\mathsf{S} \cong \mathsf{Q}$ — артиновы кольца.

По теореме 122.4 из того, что в кольце R отсутствуют подгруппы, изоморфные $Z(p^\infty)$, вытекает, что p-компоненты T_p ограниченны, скажем, $p^k\mathsf{T}_p = 0$. Тогда T_p — алгебра над кольцом $\mathsf{A} = \mathsf{Z}/(p^k)$ и, значит, применима лемма 123.2. Получаемое кольцо является артиновым как расширение артинова кольца с помощью конечного кольца. ∎

Перейдем ко второму вопросу, поставленному в начале параграфа. Следующая теорема дает на него ответ.

Теорема 123.3 (Селе и Фукс [1], Фукс [13]). *Левые идеалы артинова кольца удовлетворяют условию максимальности в том и только в том случае, когда это кольцо не содержит квазициклических подгрупп.*

Всякая квазициклическая подгруппа артинова кольца R содержится в аннуляторе N кольца R, а всякая подгруппа аннулятора является идеалом. Квазициклические подгруппы нарушают условие максимальности для подгрупп; следовательно, кольцо R не может содержать квазициклических подгрупп, если его левые идеалы удовлетворяют условию максимальности.

Обратно, пусть R — артиново кольцо, которое не содержит подгрупп, изоморфных $Z(p^\infty)$. Прежде всего заметим, что никакое фактор-кольцо R/L, где L — идеал в R, не может содержать ни одной группы типа p^∞. Действительно, рассмотрим разложение кольца R, указанное в теореме 122.7. Идеал L является прямой суммой своих пересечений со слагаемыми из этого разложения, и следствие 122.6 убеждает нас в том, что кольцо R/L не имеет подгрупп типа p^∞.

Левые идеалы произвольного кольца R удовлетворяют как условию минимальности, так и условию максимальности тогда и только тогда, когда R как левый [не обязательно унитарный] R-модуль имеет конечную длину,— это элементарный результат. Итак, мы будем стремиться к тому, чтобы найти конечный композиционный ряд левых идеалов кольца R.

Из условия минимальности в кольце R вытекает, что при некотором k выполняется равенство $\mathsf{N}^k = 0$, где N — радикал [Джекобсона] кольца R. Мы можем считать, что $\mathsf{N}^{k-1} \neq 0$. Если $\mathsf{N} = \mathsf{R}$, то в силу предложения 122.1 и отсутствия подгрупп типа p^∞ кольцо R обязательно является конечным. Мы получаем, таким образом, право перейти к рассмотрению случая, когда

$$\mathsf{R} = \mathsf{N}^0 \supset \mathsf{N} \supset \mathsf{N}^2 \supset \ldots \supset \mathsf{N}^{k-1} \supset \mathsf{N}^k = 0$$

— строго убывающая цепочка идеалов. Факторы $M_i = \mathsf{N}^{i-1}/\mathsf{N}^i$ ($i = 1, \ldots, k$) аннулируются радикалом N, их можно рассматривать как левые модули над полупростым артиновым кольцом $\mathsf{R}/\mathsf{N} = \mathsf{R}_0$. Давно известно, что [не обязательно унитарный] модуль над полупростым артиновым кольцом R_0 разлагается в прямую сумму простых [унитарных] R_0-модулей и подмодуля, аннулируемого кольцом R_0. В настоящем случае эта прямая сумма конечна, $M_i = S_{i1} \oplus \ldots \oplus S_{il_i} \oplus U_i$. Здесь S_{ij} — простые R_0-модули и $\mathsf{R}_0 U_i = 0$ при всех i. В силу условия минимальности для подмодулей модуля M_i то же условие выполняется для подгрупп в U_i. Как отмечалось выше, модуль $U_i \subseteq \mathsf{R}/\mathsf{N}^i$ не содержит квазициклических подгрупп, следовательно, он должен быть конечным. В результате модуль M_i обладает конечным композиционным рядом. Эти ряды можно соединить и получить композиционный ряд для R. ∎

Как ни странно, отсутствие подгрупп типа p^∞ эквивалентно простому условию чисто кольцевой природы: *артиново кольцо не содержит*

квазициклических подгрупп тогда и только тогда, когда его аннулятор конечен. Это сразу видно из леммы 122.5 и условия минимальности для подгрупп в аннуляторе.

Воспользуемся отмеченным фактом и переформулируем теорему 123.3 в терминах теории колец.

Следствие 123.4. *В ассоциативном кольце условие минимальности для левых идеалов влечет за собой условие максимальности для левых идеалов тогда и только тогда, когда аннулятор этого кольца конечен.* ∎

Следующий, часто используемый результат Хопкинса тривиально вытекает из предыдущих рассмотрений: артиново кольцо с односторонней единицей нётерово [Hopkins C., *Ann. of Math.*, **40** (1939), 712—736]. Несмотря на то что в следствии 123.4 не указывается явным образом связь с аддитивными структурами, никакого чисто теоретико-кольцевого доказательства этого факта до сих пор найдено не было.

Упражнения

1. Нильпотентное артиново кольцо R может быть вложено в некоторое артиново кольцо с единицей тогда и только тогда, когда кольцо R конечно.

2. (а) Для того чтобы артиново кольцо R было унитарной алгеброй над некоторым коммутативным артиновым кольцом A, необходимо и достаточно, чтобы кольцо R не содержало ни одной подгруппы типа p^{∞}.

(б) То же верно для произвольного кольца R, аддитивная группа которого имеет вид (2) из § 122.

3. Пусть P — такое кольцевое свойство, что если идеал кольца L обладает этим свойством, то кольца R и R/L одновременно либо обладают, либо не обладают свойством P. Доказать, что если R — кольцо со свойством P и в то же время — унитарная алгебра над некоторым коммутативным кольцом A с единицей, которое также обладает свойством P, то R может быть вложено в качестве идеала в некоторое кольцо с единицей с сохранением свойства P.

4. В формулировке следствия 123.4 «аннулятор» можно заменить на «правый аннулятор».

5. Пусть M — [не обязательно унитарный] модуль над некоторым полупростым артиновым кольцом и подмодули модуля M удовлетворяют условию минимальности. В модуле M выполнено условие максимальности для подмодулей тогда и только тогда, когда он не содержит квазициклических подгрупп.

§ 124. Аддитивные группы регулярных и π-регулярных колец

Цель настоящего параграфа — изучить аддитивные структуры регулярных и обобщенно регулярных колец. До сих пор не известно никакой полной характеризации групп, которые служат аддитивными группами регулярных колец, однако значительное количество сведе-

ний по этому поводу может быть получено. [В этом параграфе мы не используем ассоциативность.]

Пусть R — регулярное кольцо [в смысле фон Неймана, определение см. в § 112]. Объединение всех квазициклических подгрупп кольца R является идеалом в R, умножение в нем тривиально. Следовательно, для элемента a из этого идеала элемент $x \in \mathsf{R}$, при котором $axa = a$, существует лишь в случае $a = 0$. Таким образом, R не содержит квазициклических подгрупп. Далее, если $p^k \mid a$, то $p^{2k} \mid axa = a$, откуда видно, что элемент $a \in \mathsf{R}$ либо не делится на простое число p, либо делится на все степени числа p. Мы получаем, что регулярные кольца без кручения делимы, а p-компоненты T_p произвольного регулярного кольца R являются элементарными p-группами. Будучи элементарной, p-компонента выделяется в R прямым слагаемым,

$$\mathsf{R} = \mathsf{T}_p \oplus \mathsf{R}_p. \tag{1}$$

Более того, (1) — это разложение R как кольца, так как R_p является p-делимым: для произвольного элемента $b \in \mathsf{R}_p$ элемент pb делится на p^2, а раз R_p не содержит элементов порядка p, то и сам элемент b должен делиться на p.

Заметим, что если q — простое число, отличное от p, то компонента T_q содержится в R_p, и повторное применение разложения (1) дает прямую сумму колец

$$\mathsf{R} = \mathsf{T}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathsf{T}_{p_k} \oplus \mathsf{R}_0. \tag{2}$$

Здесь $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, и умножения на них являются автоморфизмами кольца R_0.

Рассмотрим теперь $\mathsf{D} = \bigcap_p \mathsf{R}_p$, очевидно, что это идеал без кручения. Тем же способом, что и в доказательстве предложения 112.4, можно получить делимость идеала D. Запишем $\mathsf{R}^+ = \mathsf{D}^+ \oplus C$, где C — редуцированная группа, содержащая $\mathsf{T} = \bigoplus_p \mathsf{T}_p$. Для любого простого числа p разложение (1) дает проекцию ε_p: $\mathsf{R} \to \mathsf{T}_p$, причем $\bigcap_p \operatorname{Ker} \varepsilon_p = \bigcap_p \mathsf{R}_p = \mathsf{D}$. В результате мы получаем, что R/D как кольцо изоморфно прямой сумме колец $\operatorname{Im} \varepsilon_p = \mathsf{T}_p$. Наконец, R/T — делимое кольцо как регулярное кольцо без кручения, и, значит, его сервантная подгруппа C/T^+ также делима. Таким образом, доказана

Теорема 124.1 (Фукс [6]). *Аддитивная группа регулярного кольца является прямой суммой некоторой делимой группы без кручения и такой редуцированной группы C, что*

$$\mathsf{T} = \bigoplus_p \mathsf{T}_p \subseteq C \subseteq \prod_p \mathsf{T}_p,$$

где T_p — элементарные p-группы, а C/T — делимая группа без кручения. ∎

Неизвестно, какие из групп с указанной аддитивной структурой допускают структуру регулярного кольца. Для групп $C = \bigoplus_p T_p$ или $C = \prod_p T_p$ ответ

положительный: надо взять поля на каждой из групп T_p и на делимой части [являющейся группой без кручения].

Резко отличаясь от аддитивных групп регулярных колец, аддитивные группы m-регулярных ($m \geqslant 2$) или π-регулярных [слева или справа] колец могут быть произвольными, поскольку нуль-кольца обладают нужными свойствами. Ситуация, однако, существенно изменится, если предположить в m-регулярных и т. п. кольцах существование единичного элемента или даже существование левых идеалов с единицей.

Теорема 124.2 (Фукс и Рангасвами [1]). *Пусть* S — [*левый*] *идеал в* π-*регулярном кольце* R *с единицей* 1. *Тогда*

1) *для любого простого числа* p *примарная компонента* S_p *кольца* S *ограниченна и* S *как кольцо разлагается в прямую сумму* $\mathsf{S} = \mathsf{S}_p \oplus p^m\mathsf{S}$ при некотором $m > 0$;

2) *если* T — *периодическая часть кольца* S, *то кольцо* S/T *делимо.*

В силу π-регулярности кольца R имеем $(p\cdot 1)^m x (p\cdot 1)^m = (p\cdot 1)^m$, т. е. $p^{2m}x = p^m \cdot 1$ при некоторых $x \in \mathsf{R}$ и целом числе $m > 0$. Следовательно, для любого элемента $a \in \mathsf{S}$ выполняется $p^{2m}xa = p^m a$ и, значит, элемент $p^m a$ делится на p^{2m} в левом идеале, порожденном элементом a. Мы заключаем, что $p^{m+1}\mathsf{S} = p^m\mathsf{S}$, таким образом, кольцо $p^m\mathsf{S}$ p-делимо. В частности, если элемент $a \in \mathsf{S}_p$ имеет порядок p^k, то при некотором $y \in \mathsf{R}$ выполняется $p^m a = p^k(ya) = y(p^k a) = 0$, откуда $p^m\mathsf{S}_p = 0$. Получаем $\mathsf{S}^+ = \mathsf{S}_p^+ \oplus C$, где C — некоторая подгруппа кольца S. Заметим, что группа $p^m\mathsf{S}^+ = p^m C$ является p-делимой и деление на p в группе C однозначно. Таким образом, $C = p^m C$ и $\mathsf{S} = \mathsf{S}_p \oplus p^m\mathsf{S}$ — прямая сумма в теоретико-кольцевом смысле. Условие 1) доказано. Для доказательства условия 2) надо лишь заметить, что кольцо S/T является эпиморфным образом любого из p-делимых колец $p^m\mathsf{S}$. ∎

В следующем параграфе мы докажем теорему, из которой будет видно, что утверждение, обратное к теореме 124.2, также верно.

Теорема 124.2 останется верной, если вместо π-регулярности рассмотреть какой-либо другой вид обобщенной регулярности. [См. упр. 4.]

Необходимость условий следующего результата доказывается с помощью рассуждений, весьма похожих на доказательство теоремы 124.1, надо также использовать здесь теорему 124.2. Достаточность условий можно получить из теоремы 125.4.

Следствие 124.3. *Группа A служит аддитивной группой некоторого π-регулярного кольца, являющегося* [*левым*] *идеалом в некотором π-регулярном кольце с единицей, тогда и только тогда, когда A — прямая сумма некоторой делимой группы без кручения и некоторой редуцированной группы C, для которой* $T = \bigoplus_p T_p \subseteq C \subseteq \prod_p T_p$, *где* T_p — *ограниченные группы, а* C/T — *делимая группа без кручения.*

Предвосхищая теорему 125.4, заметим, что указанную группу достаточно снабдить тривиальным умножением. ∎

Упражнения

1. Группа A служит аддитивной группой некоторого булева кольца [т. е. кольца, каждый элемент которого идемпотентен] тогда и только тогда, когда A является элементарной 2-группой.

2. (а) Группа A изоморфна аддитивной группе некоторого нётерова слева регулярного кольца тогда и только тогда, когда она является прямой суммой конечного числа элементарных p-групп и некоторой делимой группы без кручения.

(б) Получить аналогичный результат для нётеровых слева π-регулярных колец.

3. Если группа A служит аддитивной группой некоторого регулярного кольца, то на группе A существует регулярное кольцо, разлагающееся как кольцо в прямую сумму некоторого делимого кольца и некоторого редуцированного регулярного кольца.

4. (а) Показать, что теорема 124.2 дословно переносится на случай левого или правого π-регулярного кольца R с единицей.

(б) Если R есть m-регулярное [слева, справа] кольцо из теоремы 124.2, то условие 1) выполняется как раз для этого m.

5. Доказать, что условия теоремы 124.2 выполняются в π-регулярном кольце R для левого идеала S, порожденного элементом a, как только существует такой идемпотент $e \in \mathsf{R}$, что $ea = a$.

6. Аддитивная группа идеала некоторого m-регулярного кольца с единицей не обязана быть аддитивной группой произвольного π-регулярного кольца с единицей.

7. Как выглядит следствие 124.3, сформулированное для m-регулярных колец?

8. Периодическая часть бэровского кольца [см. § 112, упр. 13] является элементарной группой.

§ 125. Вложения в регулярные и π-регулярные кольца с единицей

С помощью полученных сведений об аддитивных структурах регулярных и обобщенно регулярных колец мы сможем решить проблему вложения кольца в кольцо с единицей с сохранением регулярности или π-регулярности. В предлагаемом решении проблемы существенную роль играет лемма 123.2, при этом мы будем использовать идею, ясно выраженную в упр. 3 из § 123. В течение этого параграфа кольца будут считаться ассоциативными.

Сначала исследуем случай регулярных колец. Мы уделяем им особое внимание частично из-за их исключительной важности, частично потому, что эти кольца можно будет рассмотреть без дополнительных предположений. Прежде всего построим коммутативное регулярное кольцо M с единицей. Поступим следующим образом. Для каждого простого числа p возьмем простое поле F_p характеристики p; пусть

ε_p — единица поля F_p. Образуем $\mathsf{F} = \prod_p \mathsf{F}_p$ — коммутативное регулярное кольцо с единицей $\varepsilon = (\ldots, \varepsilon_p, \ldots)$. Факторкольцо $\mathsf{F}/\bigoplus_p \mathsf{F}_p$ является делимым кольцом без кручения. Сервантная подгруппа этого кольца, порожденная смежным классом, содержащим ε,— это некоторое кольцо $\mathsf{M}/\bigoplus_p \mathsf{F}_p$, изоморфное полю Q. Таким образом, мы получили подкольцо M кольца F, содержащее ε, а также содержащее все F_p. Кольцо M регулярно: оно содержит регулярное кольцо $\bigoplus_p \mathsf{F}_p$ в качестве идеала, факторкольцо по которому регулярно.

Теорема 125.1 (Фукс и Гальперин [1]). *Всякое регулярное кольцо является унитарной M-алгеброй.*

Пусть R — регулярное кольцо. Определим произведение μa элементов $\mu \in \mathsf{M}$ и $a \in \mathsf{R}$. Для этого запишем $\mu = (\ldots, \mu_p, \ldots)$, где $\mu_p \in \mathsf{F}_p$, и заметим, что по построению кольца M существует рациональное число mn^{-1} (m, n — целые числа, $n \neq 0$), для которого $n\mu_p \equiv m \bmod p$ при почти всех простых числах p. Выберем конечное множество $\{p_1, \ldots, p_k\}$ простых чисел, которое содержит все простые делители чисел m и n и к тому же простые числа p, для которых $n\mu_p \not\equiv m \bmod p$. Для выбранного множества простых чисел мы получаем следующее разложение M как кольца в прямую сумму колец:

$$\mathsf{M} = \mathsf{F}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathsf{F}_{p_k} \oplus \mathsf{M}_0. \tag{1}$$

Здесь M_0 — такой идеал кольца M, что умножение на простое число p_i ($i = 1, \ldots, k$) является автоморфизмом в кольце M_0. Таким образом, $\mu = \mu_{p_1} + \ldots + \mu_{p_k} + \mu_0$, где $\mu_{p_i} \in \mathsf{F}_{p_i}$, $\mu_0 \in \mathsf{M}_0$. В соответствии с разложением (1) кольцо R имеет разложение (2) из § 124 и мы можем записать $a = a_{p_1} + \ldots + a_{p_k} + a_0$, где $a_{p_i} \in \mathsf{T}_{p_i}$, $a_0 \in \mathsf{R}_0$.

Теперь можно определить произведение

$$\mu a = \mu_{p_1} a_{p_1} + \ldots + \mu_{p_k} a_{p_k} + mn^{-1} a_0. \tag{2}$$

Так как T_{p_i} — векторное пространство над полем F_{p_i}, то произведение $\mu_{p_i} a_{p_i}$ имеет смысл. Поскольку умножение на n является автоморфизмом в кольце R_0, имеет смысл и произведение $mn^{-1}a_0$. Естественно, мы должны убедиться в том, что произведение μa, определенное формулой (2), не изменится, если выбрать большее множество простых чисел или записать mn^{-1} в другой форме. Но это сразу же следует из того, как мы выбираем простые числа — каждое из μ_p при $p \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$ должно действовать на F_p как умножение на mn^{-1}. Мы предоставляем читателю проверить аксиомы алгебры: $\mu a \in \mathsf{R}$, $\mu(a + b) = \mu a + \mu b$, $(\mu + \nu) a = \mu a + \nu a$, $(\mu\nu) a = \mu(\nu a)$, $\mu(ab) = (\mu a) b = a(\mu b)$ и $\varepsilon a = a$ для произвольных $\mu, \nu \in \mathsf{M}$ и $a, b \in \mathsf{R}$. ∎

Теперь легко доказать следующую теорему.

Теорема 125.2 (Фукс и Гальперин [1]). *Всякое регулярное кольцо может быть вложено в качестве идеала в некоторое регулярное кольцо с единицей.*

Пусть дано регулярное кольцо R. Из теоремы 125.1 мы знаем, что это унитарная M-алгебра, где M — коммутативное регулярное кольцо, определенное выше. Лемма 123.2 дает вложение кольца R в качестве идеала в кольцо $\mathsf{R_M}$. Поскольку оба кольца R и $\mathsf{R_M}/\mathsf{R} \cong \mathsf{M}$ регулярны, кольцо $\mathsf{R_M}$ также является регулярным. ∎

Перейдем к рассмотрению π-регулярных колец. Ключевым моментом в доказательстве теоремы вложения здесь также является доказательство существования коммутативного π-регулярного кольца с единицей, такого, что данное кольцо является унитарной алгеброй над ним. В общем случае такое кольцо не обязано существовать. На самом деле условия 1) и 2) из теоремы 124.2 необходимы и достаточны для существования такого кольца. С другой стороны, эти условия позволяют нам доказать аналог теоремы 125.1.

Теорема 125.3 (Фукс и Рангасвами [1]). *Пусть* R — *такое π-регулярное кольцо, что его p-компоненты* T_p *ограниченны, а факторкольцо* R/T (*где* $\mathsf{T} = \bigoplus_p \mathsf{T}_p$) *делимо. Тогда существует такое коммутативное π-регулярное кольцо* N *с единицей, что* R *является унитарной* N-*алгеброй.*

Теперь нам уже не удастся построить универсальное π-регулярное кольцо N [как кольцо M из теоремы 125.1], кольцо N зависит от R. Если R имеет лишь конечное число ненулевых p-компонент T_p, то в силу их ограниченности мы получаем $\mathsf{R} = \mathsf{T}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathsf{T}_{p_k} \oplus \mathsf{R}_0$, где R_0 — делимое кольцо без кручения. Очевидно, кольцо $\mathsf{N} = \mathsf{Z}/(p_1^{l_1}) \oplus \ldots \oplus \mathsf{Z}/(p_k^{l_k}) \oplus \mathsf{Q}$ будет искомым, если выбрать такие показатели степени l_i, чтобы выполнялось $p_i^{l_i}\mathsf{T}_{p_i} = 0$. [Можно опустить Q, если $\mathsf{R}_0 = 0$.]

Если R обладает бесконечным числом ненулевых p-компонент T_p, то определим кольцо N следующим образом. Выбрав целые числа l_i так, чтобы $p_i^{l_i}\mathsf{T}_{p_i} = 0$, образуем прямое произведение N' колец $\mathsf{Z}/(p_i^{l_i})$, единицы которых обозначим через ε_{p_i}. Определим теперь N как подкольцо кольца N', которое содержит прямую сумму колец $\mathsf{Z}/(p_i^{l_i})$ и при факторизации по этой прямой сумме отображается на сервантное подкольцо, изоморфное кольцу Q и порожденное смежным классом, содержащим единицу $\varepsilon = (\ldots, \varepsilon_{p_i}, \ldots)$. Из того что N — коммутативное кольцо, а кольца $\bigoplus \mathsf{Z}/(p_i^{l_i})$ и Q π-регулярны, сразу следует, что N действительно является π-регулярным кольцом. Произведение νa для элементов $\nu \in \mathsf{N}$ и $a \in \mathsf{R}$ может быть определено тем же способом, что и в формуле (2). При этом используется разложение кольца N, аналогичное разложению (1), и соответствующее разложе-

ние кольца R [мы выделяем все те p_i-компоненты, которые по тем или иным причинам являются исключительными]. Следует добавить, что благодаря нашим условиям мы можем не только записать $\mathsf{R} = \mathsf{T}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathsf{T}_{p_k} \oplus \mathsf{R}_0$ для всякого конечного множества $\{p_1, \ldots, p_k\}$ простых чисел, но и утверждать, что кольцо R_0 является p_i-делимым при $i = 1, \ldots, k$. ∎

Следующая теорема дает полное решение проблемы вложения для π-регулярных колец.

Теорема 125.4 (Фукс и Рангасвами [1]). *π-регулярное кольцо R может быть вложено в качестве идеала в некоторое π-регулярное кольцо с единицей в том и только в том случае, когда*

1) *для каждого простого числа p примарная компонента T_p кольца R ограниченна;*

2) *для периодической части $\mathsf{T} = \bigoplus_p \mathsf{T}_p$ кольца R факторкольцо R/T делимо.*

Необходимость условий 1) и 2) следует из теоремы 124.2. Докажем достаточность. Пусть R — это π-регулярное кольцо, удовлетворяющее условиям 1) и 2). Для начала построим кольцо N, как описано в доказательстве теоремы 125.3, и образуем кольцо R_N в соответствии с леммой 123.2. Это кольцо R_N содержит кольцо [изоморфное кольцу] R в качестве идеала, причем $\mathsf{R}_\mathsf{N}/\mathsf{R} \cong \mathsf{N}$. Доказательство теоремы будет завершено, как только мы установим π-регулярность кольца R_N. Для этого нам потребуются дополнительные рассуждения.

Мы утверждаем, что достаточно доказать, что для любого элемента $u \in \mathsf{R}_\mathsf{N}$ существуют целое число m и элемент $v \in \mathsf{R}_\mathsf{N}$, при которых $u^m v = v u^m$ и $u^m v u^m - u^m \in \mathsf{R}$. Действительно, в силу π-регулярности кольца R мы сможем тогда найти целое число $n > 0$ и элемент $x \in \mathsf{R}$, для которых

$$(u^m v u^m - u^m)^n x (u^m v u^m - u^m)^n = (u^m v u^m - u^m)^n,$$

откуда получим $u^{mn} w u^{mn} (v u^m - 1)^n = u^{mn} (v u^m - 1)^n$ при некотором $w \in \mathsf{R}_\mathsf{N}$. Умножим последнее равенство справа на элемент $[(vu^m)^{n-1} + (vu^m)^{n-2} + \ldots + vu^m + 1]^n$. Правая часть станет равной $u^{mn} [(vu^m)^n - 1]^n$. Раскрыв скобки, видим, что теперь в правой части каждое слагаемое, за исключением последнего, хотя бы дважды содержит множителем элемент u^{mn}. Таким образом, для некоторого $y \in \mathsf{R}_\mathsf{N}$ мы получаем равенство $u^{mn} y u^{mn} = u^{mn}$.

Элементы из R_N имеют вид $u = (\nu, a)$, где $\nu \in \mathsf{N}$ и $a \in \mathsf{R}$. В силу π-регулярности кольца N мы можем найти такое число $m > 0$ и такой элемент $\mu \in \mathsf{N}$, что $\nu^m \mu \nu^m = \nu^m$. Выбрав $v = (\mu, 0)$, имеем $uv = vu$ и $u^m v u^m - u^m \in \mathsf{R}$. По доказанному выше отсюда следует π-регулярность кольца R_N. ∎

Упражнения

1. Показать, что выбор кольца **M** из теоремы 125.1 является наилучшим в следующем смысле. Если $\mathbf{M}^*$ — какое-нибудь коммутативное регулярное кольцо с единицей, над которым всякое регулярное кольцо **R** является унитарной $\mathbf{M}^*$-алгеброй, то существует такой сохраняющий единицу эпиморфизм φ: $\mathbf{M}^* \to \mathbf{M}$, что $\mu^* a = \varphi(\mu^*) a$ при любых $\mu^* \in \mathbf{M}^*$ и $a \in \mathbf{R}$.

2. Пусть $\mathbf{M}^*$ — регулярное кольцо с единицей, обладающее сохраняющим единицу эпиморфизмом на всякое простое поле, но никакое собственное регулярное подкольцо кольца $\mathbf{M}^*$, содержащее единицу, этим свойством не обладает. Тогда существует указанный эпиморфизм кольца $\mathbf{M}^*$ на кольцо **M**.

3. Кольцо **N** из теоремы 125.3 выбрать для данного кольца **R** наилучшим образом в смысле упр. 1.

4. (а) Проверить, что условия 1) и 2) из теоремы 125.4 для регулярных колец **R** выполняются автоматически.

(б) Показать, что артиново кольцо удовлетворяет условиям 1) и 2) из теоремы 125.4 в том и только в том случае, когда не содержит квазициклических подгрупп.

5. Пусть **R** — некоторое m-регулярное кольцо, причем $p^n \mathbf{T}_p = 0$ для всех простых чисел p, где n не зависит от p, а $\mathbf{R}/\mathbf{T}$ — делимое кольцо.

(а) Кольцо **N** из теоремы 125.3 может быть выбрано n-регулярным.

(б) Кольцо **R** может быть вложено в качестве идеала в некоторое mn-регулярное кольцо с единицей.

(в) Привести пример, показывающий, что не всякое m-регулярное кольцо **R**, удовлетворяющее условиям 1) и 2), может быть вложено в качестве идеала в некоторое m-регулярное кольцо с единицей.

6. Всякое делимое m-регулярное кольцо без кручения является идеалом в некотором m-регулярном кольце с единицей.

7. Показать, что теоремы 125.3 и 125.4 справедливы для случая левой [и правой] π-регулярности.

§ 126. Аддитивные группы нётеровых колец и кольца с ограниченным условием минимальности

Напомним, что кольцо называется *нётеровым* [*слева*], если его левые идеалы удовлетворяют условию максимальности. Мы получим некоторые сведения об аддитивных группах нётеровых колец; полное описание будет дано с точностью до случая групп без кручения.

Рассмотрим сначала нильпотентные кольца. Следующий результат двойствен предложению 122.1.

Предложение 126.1 (Селе [15]). *Группа A является аддитивной группой некоторого нильпотентного нётерова кольца тогда и только тогда, когда A — конечно порожденная группа.*

Пусть R — такое нётерово кольцо, что $\mathsf{R}^k = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$. Подгруппы, лежащие между R^{i+1} и R^i ($i = 1, \ldots, k-1$), являются идеалами в кольце R, таким образом, они удовлетворяют условию максимальности, или, что то же самое, аддитивные группы колец $\mathsf{R}^i/\mathsf{R}^{i+1}$ являются конечно порожденными. Следовательно, и R^+ — конечно порожденная группа.

Обратно, нуль-кольцо на конечно порожденной группе является нётеровым. ∎

Возвращаясь к общему случаю, сконцентрируем наше внимание на периодической части T нётерова кольца R. Мы знаем, что $\mathsf{R}[n]$ — идеалы в R при всех $n > 0$. Таким образом, среди них найдется максимальный, скажем, $\mathsf{R}[m]$. Тогда обязательно $\mathsf{T} = \mathsf{R}[m]$, $m\mathsf{T} = 0$ и, значит, $\mathsf{R}^+ = \mathsf{T}^+ \oplus C$, где C — некоторая подгруппа без кручения группы R^+. Группа C изоморфна аддитивной группе нётерова кольца R/T, таким образом, мы получаем следующий результат:

Предложение 126.2. *Группа A является аддитивной группой некоторого нётерова кольца в том и только в том случае, когда $A = T \oplus C$, где T — ограниченная группа, а C — группа без кручения, допускающая некоторую структуру нётерова кольца.*

На ограниченной группе всегда существует нётерово кольцо — это сразу следует из леммы 122.3. ∎

Ввиду предложения 126.2 при изучении аддитивных групп нётеровых колец можно ограничиться случаем групп без кручения. Дальнейшее сведе́ние к случаю редуцированных групп без кручения тривиально, надо лишь заметить, что на произвольной делимой группе без кручения существует нётерово кольцо [а именно поле].

К настоящему времени наши сведения о нётеровых кольцах R на группах без кручения A не выходят за пределы нескольких элементарных замечаний.

А) Для всякого левого идеала L кольца R имеет место вложение $n\mathsf{L}_* \subseteq \mathsf{L}$ при некотором $n > 0$. Здесь L_*^+ — сервантная подгруппа, порожденная подгруппой L^+.

Это сразу следует из того факта, что в L_*/L должно выполняться условие обрыва возрастающих цепей R-подмодулей, значит, $(\mathsf{L}_*/\mathsf{L})^+$ — ограниченная группа. ∎

Б) Типы элементов из A удовлетворяют условию минимальности.

Действительно, убывающей цепочке $\mathbf{t}_1 > \ldots > \mathbf{t}_n > \ldots$ типов элементов из A соответствует возрастающая цепочка $A(\mathbf{t}_1) \subset \ldots \ldots \subset A(\mathbf{t}_n) \subset \ldots$ идеалов в R.

В) Минимальные типы элементов из A являются идемпотентными.

Пусть $a \in A$ — элемент минимального типа $\mathbf{t}$. Исключив тривиальный случай, будем считать, что $\mathbf{t} \neq (0, \ldots, 0, \ldots)$. В силу п. А) для левого идеала L, порожденного элементом a, подгруппа $\mathsf{L} \cap \langle a \rangle_*$ имеет конечный индекс в группе $\langle a \rangle_*$. Следовательно, $\mathsf{L} \neq$

$\neq \langle a \rangle$ и элемент a не лежит в правом аннуляторе кольца R. Таким образом, для некоторого $r \in$ R выполняется $0 \neq ra \in \langle a \rangle_*$. Мы получаем $\mathbf{t} = \mathbf{t}(ra) \geqslant \mathbf{t}(r)$, откуда $\mathbf{t}(r) = \mathbf{t}$ и $\mathbf{t}(r\,a) \geqslant \mathbf{t}^2$.

В теории коммутативных идеалов наряду с другими условиями используется так называемое ограниченное условие минимальности для характеризации дедекиндовых областей целостности. Кольца с этим условием будут предметом дальнейших рассмотрений в нашем исследовании аддитивных групп.

Напомним, что кольцо R удовлетворяет *ограниченному условию минимальности*, если обычное условие минимальности выполняется во всяком факторкольце кольца R по ненулевому идеалу. Мы хотим получить некоторые сведения об аддитивных группах таких колец.

Если кольцо R содержит элементы конечного порядка, то для некоторого простого числа p в нем имеется ненулевой идеал R $[p]$ и, значит, R/R $[p]$ — артиново кольцо. Из теоремы 122.4 видно, что для некоторого целого числа m кольцо mR делимо. Таким образом, аддитивная группа кольца R должна быть группой вида (2) из § 122. Тем самым установлена справедливость первой части следующей теоремы:

Теорема 126.3 (Фукс [16]). *Группа A, обладающая элементами конечного порядка, является аддитивной группой некоторого кольца с ограниченным условием минимальности тогда и только тогда, когда она имеет вид* (2) *из* § 122.

Аддитивная группа кольца без кручения с ограниченным условием минимальности является однородной группой идемпотентного типа.

Пусть R — кольцо без кручения с ограниченным условием минимальности. Если максимальный делимый идеал кольца R отличен от нуля, то в силу теоремы 122.4 факторкольцо кольца R по этому идеалу является делимым, следовательно, и само кольцо R делимо. Пусть R редуцированно. Рассмотрим идеалы вида $\mathsf{L} = \bigcap p_i^{k_i}\mathsf{R}$, где $p_i^{k_i}$ пробегает некоторое бесконечное множество степеней простых чисел. Либо L = 0, либо R/L — артиново кольцо. Тем самым исключается возможность существования в R элементов с характеристиками $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, где бесконечное число k_n — натуральные числа. Другими словами, типы всех элементов из R являются идемпотентными. Более того, если некоторый ненулевой элемент $a \in$ R делится на все степени простого числа p, то этим же свойством обладают и остальные элементы из R, так как иначе мы получили бы строго убывающую цепочку идеалов $\mathsf{R} \supset p\mathsf{R} \supset \ldots \supset p^k\mathsf{R}$ с ненулевым пересечением. Однородность группы R^+ теперь очевидна. ∎

Остается открытым вопрос, какие из однородных групп без кручения идемпотентных типов допускают кольца с ограниченным условием минимальности

Упражнения

1. Привести пример нётерова кольца **R**, аддитивная группа которого свободна и имеет ранг $\aleph_0$. [*Указание*: $Z[x]$.]

2. Пользуясь методом доказательства леммы 122.3, получить нётерово кольцо мощности континуума, аддитивная группа которого является группой без кручения, однородна и имеет тип (0, . . ., 0, . . .).

3. Аддитивная группа аннулятора произвольного нётерова кольца является конечно порожденной.

4. Пусть **R** — нётерово кольцо без кручения. Показать, что оно содержит такой идеал **A**, что $\mathbf{A}^+$ — конечно порожденная группа и **R**/**A** — нётерово кольцо с нулевым аннулятором. [*Указание*: взять аннулятор $\mathbf{A}_1$ кольца **R**, затем аннулятор кольца $\mathbf{R}/\mathbf{A}_1$ и т. д.]

5. Пусть **R** — нётерово кольцо без кручения.

(а) Если P — рациональная группа идемпотентного типа и $1 \in P$, то группа $\mathbf{R}^+ \otimes P$ допускает структуру нётерова кольца **S**, причем естественное отображение $a \mapsto a \otimes 1$ превращает **R** в подкольцо кольца **S**.

(б) **Q**-алгебра на делимой оболочке группы $\mathbf{R}^+$, индуцирующая на **R** его обычную кольцевую структуру, также является нётеровой.

6. (а) Всякое нётерово кольцо может быть вложено в качестве идеала в некоторое нётерово кольцо с единицей.

(б) Существует вложение указанного рода, при котором сохраняется отсутствие элементов конечного порядка и однородность.

7. Группа без кручения ранга 1 является аддитивной группой некоторого кольца с ограниченным условием минимальности в том и только в том случае, когда она имеет идемпотентный тип.

8. Привести пример однородной группы без кручения идемпотентного типа, которая не является аддитивной группой никакого кольца с ограниченным условием минимальности. [*Указание*: показать, что группа из примера 8 в § 88 является нильгруппой.]

9. Пусть **R** — кольцо с ограниченным условием минимальности, имеющее элементы конечного порядка. Произвольный левый идеал кольца **R** обладает аддитивной группой вида (2) из § 122.

Замечания

Проблема определения кольцевых структур на аддитивной группе была поставлена Бьюмонтом [2], который рассматривал кольца на прямых суммах циклических групп. Приблизительно в то же время Селе [3] исследовал кольца с нулевым умножением, Редей и Селе [1], а также Бьюмонт и Цукерман [1] описали кольца на подгруппах группы рациональных чисел. Более систематическое изучение построения колец на группе впервые было проведено в работе Фукса [6], здесь была выявлена фундаментальная роль базисных подгрупп. Бьюмонт и Пирс [3], [5] получили более удовлетворительные результаты для групп без кручения конечного ранга. В их работах был установлен интересный аналог основной теоремы Веддербёрна о конечномерных алгебрах.

Лишь двадцать лет назад стало ясно, что аддитивная группа кольца может дать некоторую интересную информацию о самом кольце. Программа система-

тического исследования аддитивных структур колец была сформулирована Селе, который начал рассмотрение с нильпотентных колец [15]. Преждевременная смерть помешала ему закончить изучение аддитивных групп артиновых колец, его работа по этому вопросу была завершена автором; см. Селе и Фукс [1]. Теорема 122.4 дает хорошее описание аддитивных групп артиновых колец [о другом подходе см. Kertész A., Vorlesungen über Artinsche Ringe, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968]. Результаты о регулярных и π-регулярных кольцах уже не так хороши [Фукс [16], Фукс и Рангасвами [1]].

Было бы серьезной ошибкой ожидать слишком многого от изучения аддитивных структур колец постольку, поскольку речь идет о теории колец. Во многих важных случаях аддитивные структуры слишком тривиальны [например, делимые группы без кручения или элементарные p-группы], чтобы дать какую-нибудь содержательную информацию о кольцевой структуре. Это особенно относится к группам без кручения. В этом случае тесная связь между аддитивной и мультипликативной структурами может существовать, только если строение аддитивной группы достаточно сложно. Следует помнить, однако, что, даже если аддитивная группа легко описывается, возникает ряд весьма интересных вопросов. Например, не известно никакого несчетного нётерова кольца, аддитивная группа которого свободна.

Проблема 93. Какие группы допускают кольцевую структуру, единственные идеалы в которой — это идеалы, описанные в теореме 117.2?

Проблема 94. Исследовать «абсолютные» аннуляторы, «абсолютные» радикалы Джекобсона и т. д. для группы A. [Под абсолютным аннулятором мы подразумеваем множество элементов из A, лежащих в аннуляторе всякого кольца на группе A.]

Проблема 95. Дать обзор колец на сильно неразложимых группах без кручения конечного ранга.

Проблема 96. Охарактеризовать аддитивные группы регулярных колец, локальных колец, и т. д.

Проблема 97. Существуют ли нётеровы кольца со свободными аддитивными группами больших мощностей?

Глава XVIII

ГРУППЫ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОЛЬЦАХ

Важной областью применения абелевых групп является теория мультипликативных групп полей или, более общо, групп обратимых элементов в коммутативных и ассоциативных кольцах с единицей. [В этой главе все встречающиеся кольца мы будем предполагать ассоциативными и коммутативными.]

До последнего времени этой области уделялось довольно мало внимания. В наших исследованиях мы в основном займемся двумя аспектами теории: получением информации о мультипликативных группах специальных полей и группах обратимых элементов в некоторых кольцах и нахождением условий на группу, при которых она является группой обратимых элементов подходящего кольца.

Мы собираемся охарактеризовать мультипликативные группы простых полей и их конечных алгебраических расширений, алгебраически и вещественно замкнутых полей и полей p-адических чисел. Что касается групп обратимых элементов, то мы здесь в общем случае можем сделать только некоторые замечания. Будет сравнительно легко проверить, что для любой группы A группа $Z(2) \times A$ является группой обратимых элементов некоторого кольца.

§ 127. Мультипликативные группы полей

Изучение мультипликативных групп обратимых элементов мы начнем с важного частного случая, когда кольцо является полем. Естественно было бы ожидать, что основную роль в строении мультипликативной группы поля будет играть характеристика этого поля. Однако, как мы узнаем, здесь до сих пор были обнаружены лишь незначительные различия, за исключением случая абсолютных алгебраических расширений.

С этого момента мы будем рассматривать только поля. Мультипликативную группу поля K будем обозначать через $\mathsf{K}^\times$; как множество $\mathsf{K}^\times = \mathsf{K} \setminus 0$. По понятным причинам в группе $\mathsf{K}^\times$ мы будем придерживаться мультипликативной записи. Таким образом, 1 будет нейтральным элементом этой группы, а символ $\times$ будет обозначать ограниченные прямые произведения [1]).

Нетрудно описать периодическую часть группы $\mathsf{K}^\times$.

Теорема 127.1. *Периодическая группа изоморфна периодической части группы $\mathsf{K}^\times$ для некоторого поля K характеристики 0 тогда и только тогда, когда она изоморфна подгруппе группы Q/Z, имеющей нетривиальную 2-компоненту.*

---

[1]) Это соответствует прямым суммам при аддитивной записи.— *Прим. перев.*

Пусть $u \in \mathsf{K}^\times$ — такой элемент, что $u^p = 1$ при некотором простом числе p. Уравнение $x^p - 1 = 0$ не может иметь больше p различных корней ни в каком поле. Поэтому порядок цоколя p-компоненты группы $\mathsf{K}^\times$ не превосходит p. Из теоремы 25.1 следует, что p-компонента группы $\mathsf{K}^\times$ — коциклическая группа. Таким образом, изоморфизм периодической части T группы $\mathsf{K}^\times$ с некоторой подгруппой группы Q/Z очевиден. Так как $-1 \in \mathsf{K}^\times$, группа T содержит элемент порядка 2.

Пусть T — подгруппа группы Q/Z, имеющая нетривиальную 2-компоненту. Представим группу T как мультипликативную группу комплексных корней из единицы и выберем конечную или бесконечную возрастающую цепочку циклических групп $\langle \zeta_k \rangle$ четных порядков m_k, объединение которой совпадает с T. Возьмем в качестве K объединение башни $\mathsf{Q}(\zeta_1) \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{Q}(\zeta_k) \subseteq \ldots$, где $\mathsf{Q}(\zeta_k)$ — подполе поля комплексных чисел, порожденное полем Q и элементом ζ_k. По построению периодическая часть группы $\mathsf{K}^\times$ содержит T. Так как периодическая часть группы $\mathsf{K}^\times$ равна объединению периодических частей групп $\mathsf{Q}(\zeta_k)^\times$, то мы получим обратное включение, если сможем показать, что периодическая часть группы $\mathsf{Q}(\zeta_k)^\times$ совпадает с $\langle \zeta_k \rangle$. Но это простое следствие того, что степень поля $\mathsf{Q}(\zeta_k)$ над Q задается функцией Эйлера $\varphi(m_k)$, а при четном m_k степень относительно Q первообразного корня n-й степени из единицы, где m_k делит n, не превосходит $\varphi(m_k)$ только при $n = m_k$. ∎

Если периодическая часть имеет тривиальную 2-компоненту, положение сложнее. Прежде всего заметим, что если K — поле характеристики p, то 1 — единственный корень уравнения $x^p - 1 = (x-1)^p = 0$, т. е. группа $\mathsf{K}^\times$ имеет единичную p-компоненту. В результате периодическая группа с тривиальной 2-компонентой может быть периодической частью мультипликативной группы поля только в случае поля характеристики 2. Подробнее см. в упр. 4.

Обратимся теперь к наиболее важным классам полей и попытаемся определить их мультипликативную структуру.

1. *Простые поля.* Это поля Q и $\mathsf{F}_p = \mathsf{Z}/(p)$ для каждого простого числа p.

Основная теорема арифметики утверждает, что всякое отличное от нуля рациональное число может быть однозначно представлено в виде $\pm p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$, где p_i — различные простые числа, а $k_i \neq 0$ — целые числа. Отсюда получаем

$$\mathsf{Q}^\times = \langle -1 \rangle \times \mathop{\mathsf{X}}_{p} \langle p \rangle \cong Z(2) \times \mathop{\mathsf{X}}_{\aleph_0} Z,$$

где p пробегает все простые числа [следует помнить, что теперь $\langle p \rangle$ — мультипликативная группа, порожденная числом p, т. е. группа, состоящая из всех чисел вида p^k ($k \in \mathsf{Z}$)].

Если p — простое число, то из существования первообразных корней по модулю p следует, что $\mathbf{F}_p^{\times}$ — циклическая группа:

$$\mathbf{F}_p^{\times} \cong Z(p-1).$$

2. *Конечные алгебраические расширения простых полей.* Описывая строение группы $\mathbf{K}^{\times}$ для конечного алгебраического расширения $\mathbf{K}$ поля $\mathbf{Q}$, мы будем использовать два стандартных результата из теории алгебраических чисел.

Во-первых, *основная теорема теории идеалов* утверждает, что если $\mathbf{R}$ — кольцо целых алгебраических чисел из $\mathbf{K}$, то всякий целый и всякий дробный идеал $\mathbf{A} \neq 0$ кольца $\mathbf{R}$ совпадает с однозначно определенным произведением простых идеалов $\mathbf{P}_i$, т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1^{k_1} \ldots \mathbf{P}_r^{k_r}$, где $k_i \neq 0$ — целые числа. Следовательно, ненулевые идеалы образуют свободную группу относительно умножения.

Второй результат — это *теорема Дирихле об обратимых элементах*: мультипликативная группа обратимых элементов в кольце $\mathbf{R}$ является прямым произведением конечной циклической группы и $r_1 + r_2 - 1$ бесконечных циклических групп. Здесь r_1 — число действительных корней, а r_2 — число пар комплексно сопряженных корней определяющего поле $\mathbf{K}$ уравнения над $\mathbf{Q}$.

Ясно, что два элемента a, b из $\mathbf{K}^{\times}$ порождают один и тот же (может быть, дробный) идеал тогда и только тогда, когда их частное ab^{-1} — обратимый элемент в кольце $\mathbf{R}$ целых алгебраических чисел из $\mathbf{K}$. Следовательно, отображение φ: $a \mapsto \mathbf{R}a$ — гомоморфизм мультипликативной группы $\mathbf{K}^{\times}$ в группу идеалов, причем $\operatorname{Ker} \varphi$ — это группа U обратимых элементов кольца $\mathbf{R}$. Отсюда следует, что группа $\mathbf{K}^{\times}/U$ изоморфна подгруппе мультипликативной группы ненулевых идеалов кольца $\mathbf{R}$, т. е. является свободной группой. Легко проверить [например, посмотрев на рациональные числа], что $\mathbf{K}^{\times}/U$ имеет счетный ранг. В силу теоремы 14.4 группа $\mathbf{K}^{\times}$ изоморфна прямому произведению группы U и счетного числа групп Z, т. е. $\mathbf{K}^{\times} \cong Z(m) \times \mathop{\mathsf{X}}\limits_{\aleph_0} Z$. Здесь m — четное число, так как $-1 \in \mathbf{K}^{\times}$.

Положение коренным образом меняется в случае, когда характеристика — простое число. Конечное алгебраическое расширение $\mathbf{K}$ поля $\mathbf{F}_p$, имеющее степень n, является полем Галуа, состоящим из p^n элементов. Следовательно, $\mathbf{K}^{\times}$ — циклическая группа порядка $p^n - 1$. Этим мы доказали первую часть следующей теоремы:

Теорема 127.2 (Сколем [1]). *Мультипликативная группа конечного алгебраического расширения $\mathbf{K}$ простого поля имеет вид*

$$\mathbf{K}^{\times} \cong Z(m) \times \mathop{\mathsf{X}}\limits_{\aleph_0} Z \quad (m \text{ — четное число}) \tag{1}$$

или

$$\mathbf{K}^{\times} \cong Z(p^n - 1) \tag{2}$$

в зависимости от того, равна характеристика поля $\mathbf{K}$ нулю или простому числу p.

Обратно, всякая группа вида (1) *или* (2) *изоморфна мультипликативной группе некоторого конечного алгебраического расширения $\mathbf{K}$ простого поля.*

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что в силу существования поля Галуа любого порядка, равного степени простого числа, в случае групп вида (2) нужное утверждение получается сразу. Для его доказательства в случае групп вида (1) достаточно заметить, что при доказательстве теоремы 127.1 было показано, что если ζ — комплексный первообразный корень m-й степени из 1, где m — четное число, то периодическая часть группы $\mathbf{Q}(\zeta)^\times$ изоморфна $Z(m)$. ∎

3. *Алгебраически замкнутые поля.* В алгебраически замкнутом поле $\mathbf{A}$ уравнение $x^p - a = 0$ имеет решение при любом $a \in \mathbf{A}$ и любом простом числе p. Следовательно, $\mathbf{A}^\times$ — делимая группа, т. е. прямое произведение групп, изоморфных Q или $Z(p^\infty)$. В силу теоремы 127.1 для любого простого числа p слагаемых вида $Z(p^\infty)$ может быть не больше одного.

Если поле $\mathbf{A}$ имеет нулевую характеристику, то всякий круговой многочлен распадается над $\mathbf{A}$ на линейные множители. Поэтому при всяком n поле $\mathbf{A}$ содержит в точности n корней n-й степени из единицы. Это означает, что $\mathbf{A}^\times$ содержит подгруппу, изоморфную Q/Z. Если поле $\mathbf{A}$ имеет простую характеристику p, то, как было замечено раньше, p-компонента группы $\mathbf{A}^\times$ тривиальна, но для остальных компонент имеет место то же, что выше. Так как алгебраическое замыкание любого поля бесконечной мощности $\mathfrak{n}$ имеет также мощность $\mathfrak{n}$, то справедлива

Теорема 127.3. *Группа изоморфна мультипликативной группе алгебраически замкнутого поля тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$Q/Z \times \mathop{\mathsf{X}}_{\mathfrak{n}} Q \quad \text{или} \quad \mathop{\mathsf{X}}_{p_i \neq p} Z(p_i^\infty) \times \mathop{\mathsf{X}}_{\mathfrak{n}} Q$$

в зависимости от того, равна характеристика нулю или простому числу p. Здесь $\mathfrak{n}$ — любое бесконечное кардинальное число или (но только во втором случае) $\mathfrak{n} = 0$. ∎

4. *Вещественно замкнутые поля.* Вещественно замкнутое поле $\mathbf{B}$ [т. е. поле, которое может быть линейно упорядочено, но никакое собственное алгебраическое расширение которого не допускает линейного упорядочивания] имеет характеристику 0. Если ζ — первообразный корень n-й степени из единицы в алгебраическом замыкании $\mathbf{A}$ поля $\mathbf{B}$, то при $n \neq 2$

$$1 + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{2(n-1)} = \frac{\zeta^{2n} - 1}{\zeta^2 - 1} = 0, \quad \zeta^2 + \ldots + \zeta^{2(n-1)} = -1,$$

и, так как в линейно упорядоченном поле -1 не может быть суммой квадратов, $\zeta \notin \mathbf{B}$. Следовательно, ± 1 — это все корни из единицы, лежащие в $\mathbf{B}$. Из теории вещественно замкнутых полей хорошо известно, что $\mathbf{A} = \mathbf{B}(\sqrt{-1})$ — квадратичное расширение поля $\mathbf{B}$. Следовательно, все многочлены $x^p - a$ $(a \in \mathbf{B})$, где p — нечетное простое

число, приводимы и должны иметь неприводимые множители первой степени. Другими словами, для нечетных простых чисел p в поле $\mathbf{B}$ возможно извлечение корня p-й степени. Что касается квадратных корней, то известно, что $\mathbf{B}$ допускает линейный порядок, при котором положительные элементы являются полными квадратами, т. е. для любого элемента $a \in \mathbf{B}$ или из a, или из $-a$ можно извлечь квадратный корень, оставаясь в поле $\mathbf{B}$. Полученные факты собраны в следующей теореме:

Теорема 127.4 (Фукс [16]). *Группа изоморфна мультипликативной группе вещественно замкнутого поля тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$Z(2) \times \underset{\mathfrak{n}}{\mathsf{X}} Q,$$

где $\mathfrak{n}$ — бесконечное кардинальное число. ∎

5. *Поля p-адических чисел.* Теперь найдем мультипликативные группы полей p-адических чисел. Так как каждое отличное от нуля p-адическое число однозначно можно записать в виде $p^k\pi$, где k — целое число, а π — некоторая p-адическая единица, то ясно, что нужная нам группа — прямое произведение $Z \times U_p$, где U_p — группа обратимых элементов в кольце $\mathbf{Q}_p^*$.

Рассмотрим полную приведенную систему ненулевых вычетов $t_1, \ldots, t_{p-1} \in \mathbf{Z}$ по модулю p. В силу сравнения Ферма $t_j^{p^k - p^{k-1}} \equiv 1$, т. е. $t_j^{p^k} \equiv t_j^{p^{k-1}} \bmod p^k$ для любого $k \geqslant 1$. Поэтому последовательность $t_j^{p^k}$ $(k=0, 1, \ldots)$ сходится к p-адической единице ε_j. Из $\varepsilon_j \equiv$ $\equiv t_j^{p^k} \bmod p^{k+1}$ получаем $\varepsilon_j^{p-1} \equiv (t_j^{p^k})^{p-1} \equiv 1 \bmod p^{k+1}$. Таким образом, $\varepsilon_j^{p-1} = 1$ при $j = 1, \ldots, p-1$, и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ — различные корни $(p-1)$-й степени из единицы. Они образуют подгруппу E_p группы U_p, которая должна быть циклической в силу существования первообразного корня по модулю p. Очевидно, что каждый элемент $\pi \in U_p$ может быть однозначно представлен в виде $\pi = \varepsilon_j \rho$ при некотором $\varepsilon_j \in E_p$ и некотором $\rho \in U_p$, где $\rho \equiv 1 \bmod p$. Элементы из U_p, сравнимые с единицей по модулю p, образуют в U_p подгруппу V_p. Из сказанного выше следует, что $U_p = E_p \times V_p$.

Чтобы определить строение группы V_p, рассмотрим сначала нечетные простые числа p. В этом случае существует первообразный корень t по модулю p, являющийся первообразным корнем по модулю p^k при любом целом $k \geqslant 1$. Если положить $l = t^{p-1}$, то $l^m \equiv 1 \bmod p^k$ будет эквивалентно тому, что p^{k-1} делит m. Это показывает, что при всяком $\pi \in V_p$ и любом p^k $(k \geqslant 1)$ существует такое однозначно определенное число s_{k-1}, что $0 \leqslant s_{k-1} < p^{k-1}$ и $l^{s_{k-1}} \equiv \pi \bmod p^k$. В силу того что $s_{k-1} \equiv s_k \bmod p^{k-1}$, последовательность чисел s_k сходится к такому целому p-адическому числу σ, что $\sigma \equiv s_k \bmod p^k$. Формально мы можем написать $\pi = l^\sigma$. Непосредственно проверяется, что равенства

$\pi_1 = l^{\sigma_1}$ и $\pi_2 = l^{\sigma_2}$ влекут за собой $\pi_1\pi_2 = l^{\sigma_1+\sigma_2}$. Обратно, если дано произвольное целое p-адическое число $\sigma = r_0 + r_1p + r_2p^2 + \ldots$ ($r_i \in \mathbf{Z}$), то последовательность $l^{r_0}, l^{r_0+r_1p}, l^{r_0+r_1p+r_2p^2}, \ldots$ сходится к такому целому p-адическому числу π, что $\pi \equiv 1 \bmod p$ и $\pi = l^{\sigma}$. Теперь мы можем утверждать, что группа V_p изоморфна аддитивной группе J_p, откуда $U_p \cong Z(p-1) \times J_p$.

Если $p = 2$, то число $l = 5$ обладает тем свойством, что сравнение $l^m \equiv 1 \bmod 2^k$ эквивалентно тому, что 2^{k-2} делит m. Между элементами подгруппы V_2' группы V_2, состоящей из всех $\pi \in V_2$, сравнимых с 1 по модулю 4, и целыми 2-адическими числами можно установить такое же «логарифмическое» соответствие, как и выше. Так как $V_2 = V_2' \times \langle -1 \rangle$, то окончательно имеем

Теорема 127.5 (Гензель). *Мультипликативная группа поля p-адических чисел изоморфна прямому произведению*

$$Z \times Z(p-1) \times J_p$$

при $p \neq 2$ *и*

$$Z \times Z(2) \times J_2$$

при $p = 2$. ∎

Упражнения

1. Показать, что аддитивная группа поля не может быть изоморфной его мультипликативной группе.

2. Конечная группа изоморфна мультипликативной группе поля тогда и только тогда, когда она — циклическая группа порядка $p^n - 1$ для некоторого простого числа p и целого числа $n \geqslant 1$.

3. Конечная группа служит периодической частью группы $\mathbf{K}^{\times}$ для некоторого поля $\mathbf{K}$ тогда и только тогда, когда она циклическая, а ее порядок — или четное число, или число вида $2^n - 1$, где n — некоторое натуральное число.

4. (а) Если подгруппа группы Q/Z, имеющая тривиальную 2-компоненту, является периодической частью группы $\mathbf{L}^{\times}$ для некоторого поля $\mathbf{L}$, то она изоморфна группе $\mathbf{K}^{\times}$ для некоторого подполя $\mathbf{K}$ поля $\mathbf{L}$.

(б) Подгруппа T группы Q/Z, имеющая тривиальную 2-компоненту, служит мультипликативной группой некоторого поля тогда и только тогда, когда T — объединение возрастающей последовательности циклических групп, порядки которых имеют вид $2^n - 1$.

5 (Чарин [1]). Мультипликативная группа алгебраических чисел степени не больше n, где n фиксировано, является прямым произведением циклических групп. [*Указание*: подгруппы с фиксированным числом образующих удовлетворяют условию максимальности.]

6* (Шенкман [1]). Пусть $\mathbf{M}$ — алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$, порожденное всеми алгебраическими числами степени не больше n, где n фиксировано. Тогда $\mathbf{M}^{\times}$ — прямое произведение циклических

групп. [*Указание*: M не содержит корней m-й степени из 1 при $m > 4n!$; использовать теорему 19.1.]

7. Если K — поле, замкнутое относительно извлечения корней, то его мультипликативная группа $\mathsf{K}^{\times}$ изоморфна одной из групп, о которых говорится в теореме 127.3.

8. (а) Чтобы поле K простой характеристики p было совершенным [т. е. чтобы неприводимые многочлены над K имели простые корни], необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathsf{K}^{\times}$ была p-делимой.

(б) Доказать с помощью этого утверждения, что алгебраические расширения поля F_p совершенны. [*Указание*: см. теорему 127.2.]

9. Если элемент x трансцендентен над полем K, то мультипликативная группа поля $\mathsf{K}(x)$ является прямым произведением группы $\mathsf{K}^{\times}$ и $\max(|\mathsf{K}|, \aleph_0)$ групп, изоморфных группе Z. [*Указание*: использовать однозначную разложимость на множители в $\mathsf{K}[x]$.]

§ 128. Обратимые элементы в коммутативных кольцах

В любом ассоциативном кольце R с единицей 1 элементы, для которых существуют (двусторонние) обратные по умножению относительно 1, образуют группу по умножению. Мы будем называть ее *группой обратимых элементов* кольца R и обозначать через $U(\mathsf{R})$. Мы собираемся исследовать группы $U(\mathsf{R})$ в коммутативном случае. Заметим, что если группа $U(\mathsf{R})$ коммутативна, то подкольцо R' кольца R, порожденное множеством $U(\mathsf{R})$, также коммутативно, а $U(\mathsf{R}') = U(\mathsf{R})$. По этой причине, изучая коммутативные группы обратимых элементов, мы ограничимся рассмотрением ассоциативных и коммутативных колец с единицей. [Но такая редукция невозможна, если рассматривать только кольца с определенным кольцевым свойством.]

Пример 1. Обратимыми элементами в кольце $\mathsf{R} = \mathsf{Z}/(p^k)$, где p — простое, а k — натуральное числа, очевидно, являются смежные классы, определяемые числами, взаимно простыми с p. Следовательно, $U(\mathsf{R}) \cong Z(p^k - p^{k-1})$. Любой первообразный корень по модулю p^k можно взять в качестве образующего.

Пример 2. Обратимые элементы в кольце Q_p^* целых p-адических чисел были описаны при доказательстве теоремы 127.5. Мы получили:

$$U(\mathsf{Q}_p^*) \cong Z(p-1) \times J_p$$

при $p \neq 2$ и

$$U(\mathsf{Q}_2^*) \cong Z(2) \times J_2.$$

Пример 3. Если R — кольцо целых алгебраических чисел из конечного алгебраического расширения поля Q, то по теореме Дирихле об обратимых элементах $U(\mathsf{R})$ является прямым произведением конечной циклической группы и конечного числа бесконечных циклических групп.

Прежде чем перечислить некоторые полезные факты, касающиеся групп обратимых элементов, мы еще раз напомним: все встречающиеся кольца ассоциативны, коммутативны и имеют единицу 1, даже если это особо не оговорено.

А) Если S — такое подкольцо кольца R, что $1 \in \mathsf{S}$, то $U(\mathsf{S})$ — подгруппа группы $U(\mathsf{R})$. Всякий кольцевой гомоморфизм $\mathsf{R} \to \mathsf{T}$, сохраняющий единицу, индуцирует гомоморфизм групп $U(\mathsf{R}) \to \to U(\mathsf{T})$.

Б) Группа обратимых элементов декартова произведения $\prod \mathsf{R}_i$ колец является декартовым произведением групп обратимых элементов $U(\mathsf{R}_i)$. В самом деле, элемент $(\ldots, u_i, \ldots) \in \prod \mathsf{R}_i$ обратим в том и только в том случае, когда каждый элемент u_i обратим в R_i. В частности, для конечных прямых сумм имеем

$$U(\mathsf{R}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{R}_n) = U(\mathsf{R}_1) \times \ldots \times U(\mathsf{R}_n).$$

В) Для кольца многочленов $\mathsf{R}[\ldots, x_i, \ldots]$ над коммутативной областью целостности R с коммутирующими переменными x_i $(i \in I)$ выполняется равенство

$$U(\mathsf{R}[\ldots, x_i, \ldots]) \cong U(\mathsf{R}).$$

В самом деле, в кольце многочленов только константа может быть обратимым элементом.

Г) В кольце формальных степенных рядов $\mathsf{R}[[x]]$ степенные ряды вида $1 + c_1x + \ldots + c_nx^n + \ldots$ $(c_n \in \mathsf{R})$ являются обратимыми элементами. Они образуют подгруппу E группы $U(\mathsf{R}[[x]])$. Нетрудно проверить, что элементы из $U(\mathsf{R}[[x]])$, где R — коммутативная область целостности,— это в точности элементы вида $u\rho$, где $u \in U(\mathsf{R})$, $\rho \in E$. Следовательно,

$$U(\mathsf{R}[[x]]) \cong U(\mathsf{R}) \times E.$$

Д) Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, а S — мультипликативная подполугруппа в R, состоящая лишь из неделителей нуля. Пусть G — группа частных полугруппы S. Для кольца R_S частных кольца R относительно S имеем

$$U(\mathsf{R}_S) \cong (U(\mathsf{R}) \times G)/H,$$

где H — подгруппа, состоящая из всех элементов (u, u^{-1}), где $u \in \in U(\mathsf{R}) \cap G$.

Е) Пусть A — унитарный R-модуль над коммутативным кольцом R, и пусть $\mathsf{R}(A)$ состоит из всех пар (r, a), где $r \in \mathsf{R}$, $a \in A$, причем заданы следующие правила действий:

$$(r, a) + (s, b) = (r + s, a + b)$$

и

$$(r, a)(s, b) = (rs, rb + sa)$$

для всех $r, s \in \mathsf{R}$ и $a, b \in A$. Тогда $\mathsf{R}(A)$ — кольцо с единицей $(1, 0)$, где условие $r \in U(\mathsf{R})$ необходимо и достаточно для того, чтобы элемент (r, a) был обратимым в $\mathsf{R}(A)$. Из $(r, a) = (r, 0)(1, r^{-1}a)$ следует, что $U(\mathsf{R}(A)) \cong U(\mathsf{R}) \times A$.

Ж) Особенно интересна роль, которую играет радикал Джекобсона J кольца R в вопросе о группе обратимых элементов этого кольца. При любом $a \in \mathsf{J}$ имеем $1 + a \in U(\mathsf{R})$. Если рассматривать J как группу относительно операции $a \circ b = a + b + ab$, то соответствие

$$\delta\colon a \mapsto 1 + a \in U(\mathsf{R}) \quad (a \in \mathsf{J})$$

будет изоморфизмом между группой $(\mathsf{J}, \circ)$ и некоторой подгруппой группы $U(\mathsf{R})$, которую можно обозначить через $1 + \mathsf{J}$. Кроме того, δ индуцирует изоморфизм между группой $(\mathsf{K}, \circ)$ и подгруппой $1 + \mathsf{K}$ для всякого идеала K кольца R, лежащего в J. Используя это замечание, мы можем доказать следующее утверждение:

З) Пусть R — ассоциативное и коммутативное кольцо с 1 и K — идеал кольца R, лежащий в его радикале Джекобсона J. Тогда

а) если смежный класс $a + \mathsf{K}$ содержит элемент, обратимый в кольце R, то каждый элемент из $a + \mathsf{K}$ обратим в R;

б) обратимые элементы в кольце R/K — это смежные классы $u + \mathsf{K}$, где $u \in \mathsf{R}$ — элементы, обратимые в кольце R, причем

$$U(\mathsf{R}/\mathsf{K}) \cong U(\mathsf{R})/(1 + \mathsf{K}).$$

Если u — обратимый элемент в кольце R и $x \in \mathsf{K}$, то $u^{-1}x \in \mathsf{K}$ влечет за собой $(1 + u^{-1}x)(1 + b) = 1$ для некоторого $b \in \mathsf{R}$. Отсюда $(u + x)(u^{-1} + bu^{-1}) = 1$, значит, $u + x \in u + \mathsf{K}$ — обратимый элемент в R, и утверждение а) доказано. Докажем утверждение б). Ясно, что $u \mapsto u + \mathsf{K}$ — гомоморфное отображение группы $U(\mathsf{R})$ в $U(\mathsf{R}/\mathsf{K})$, ядро которого совпадает с $1 + \mathsf{K}$. Это отображение — эпиморфизм, так как если $a + \mathsf{K}$ — обратимый элемент в R/K, т. е. $(a + \mathsf{K}) \times \times (b + \mathsf{K}) = 1 + \mathsf{K}$ при некотором $b \in \mathsf{R}$, то из включения $ab \in 1 + + \mathsf{K}$ в силу а) следует, что ab, а значит, и a — обратимый элемент в R.

В частном случае, когда $\mathsf{K}^2 = 0$, операция $\circ$ в K совпадает со сложением, и мы видим, что $U(\mathsf{R})$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathsf{K}^{\bullet}$.

Упражнения

1. Пусть $\varphi\colon \mathsf{R} \to \mathsf{S}$ — кольцевой гомоморфизм и $\varphi 1 = 1$. Тогда $\varphi \mid U(\mathsf{R})\colon U(\mathsf{R}) \to U(\mathsf{S})$ — групповой гомоморфизм с ядром $U(\mathsf{R}) \cap \cap (1 + \operatorname{Ker} \varphi)$.

2. Если $\{\mathsf{R}_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ — прямой спектр колец R_i, где отображения π_i^j сохраняют единичные элементы, то

$$U(\varinjlim \mathsf{R}_i) = \varinjlim U(\mathsf{R}_i).$$

3. Группа обратимых элементов факторкольца $\prod \mathsf{R}_i/\bigoplus \mathsf{R}_i$ изоморфна факторгруппе декартова произведения групп обратимых эле-

ментов $U(\mathsf{R}_i)$ по (ограниченному) прямому произведению $\underset{i}{\mathsf{X}}\, U(\mathsf{R}_i)$ этих групп.

4. Периодическое кольцо R с единицей имеет лишь конечное число p-компонент $\mathsf{R}_{p_1}, \ldots, \mathsf{R}_{p_n}$ и удовлетворяет условию

$$U(\mathsf{R}) = U(\mathsf{R}_{p_1}) \times \ldots \times U(\mathsf{R}_{p_n}).$$

5. Пусть R — подкольцо поля алгебраических чисел, имеющего конечную степень над Q. Тогда $U(\mathsf{R})$ — прямое произведение циклических групп.

6. Распространить утверждение Д) на случай, когда $0 \notin \mathsf{S}$, но S содержит делители нуля.

7. Для идеала K кольца R утверждение а) из пункта З) справедливо тогда и только тогда, когда K содержится в радикале Джекобсона J кольца R.

8. Пусть J — радикал Джекобсона кольца R и K, L — такие идеалы в R, что $\mathsf{J} \supseteq \mathsf{K} \supseteq \mathsf{L} \supseteq \mathsf{K}^2$. Тогда аддитивная группа кольца K/L изоморфна мультипликативной группе $(1+\mathsf{K})/(1+\mathsf{L})$ [соответствующее отображение: $x + \mathsf{L} \to (1+x)(1+\mathsf{L})$].

§ 129. Группы, служащие группами обратимых элементов

Перейдем к проблеме описания (абелевых) групп, которые могут быть группами обратимых элементов в кольце. Мы дадим обзор основных результатов, которые здесь были получены. Важно заметить, что мы не будем налагать никаких ограничений на кольца, кроме ассоциативности, коммутативности и наличия единицы.

Легко видеть, что всякую группу A [мы продолжаем пользоваться мультипликативной записью] можно по крайней мере вложить в группу обратимых элементов некоторого кольца. В самом деле, в групповом кольце $\mathsf{Z}A$ группы A с целыми коэффициентами базисные элементы $a \in A$, очевидно, обратимы. Примечательно, что каноническое вложение $\varkappa\colon A \to U(\mathsf{Z}A)$, где каждому элементу $a \in A$ соответствует он сам, обладает свойством «универсальности»: если R — любое кольцо с единицей и $\lambda\colon A \to U(\mathsf{R})$ — произвольный гомоморфизм, то существует сохраняющий единицу кольцевой гомоморфизм $\psi\colon \mathsf{Z}A \to \mathsf{R}$, для которого $\psi\varkappa = \lambda$. Приводимая ниже коммутативная диаграмма наглядно показывает, как здесь обстоит дело:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varkappa} & \mathsf{Z}A \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\psi} & \\ \mathsf{R} & & \end{array}$$

Для доказательства достаточно заметить, что существует одна и только одна возможность распространить λ на $\mathsf{Z}A$, именно $\psi(\Sigma\, n_i a_i) = \Sigma\, n_i \lambda(a_i)$. Однако в общем случае группа $U(\mathsf{Z}A)$ больше, чем A. Действительно, существуют группы [например, циклическая группа

порядка 5], которые не могут быть группами обратимых элементов ни в каких кольцах.

Мы докажем, что группы определенных типов обязательно являются группами обратимых элементов некоторых колец.

Следующая теорема крайне проста, но она почти решает всю проблему.

Теорема 129.1. *Для любой группы A существует кольцо, группа обратимых элементов которого изоморфна $Z(2) \times A$.*

Вспомним пункт Е) из § 128 и используем заданную нам группу A и кольцо $\mathbf{R} = \mathbf{Z}$ для построения нужного кольца. ■

Довольно тонкая проблема — освободиться от множителя $Z(2)$. Трудность, естественно, заключается в том, что -1 всегда является элементом порядка 2 в группе $U(\mathbf{R})$, кроме случая, когда $-1 = 1$, т. е. $2\mathbf{R} = 0$.

Для начала нам потребуется следующая лемма, обобщающая один результат Кона [2].

Лемма 129.2. *Пусть U — группа обратимых элементов некоторой коммутативной области целостности, и пусть A — группа, содержащая U и такая, что A/U — группа без кручения. Тогда группа A также является группой обратимых элементов некоторой области целостности.*

Как в § 49, выберем представитель $a_g \in A$ в каждом смежном классе $g, h, \ldots \in A/U$, причем в смежном классе U выберем в качестве представителя 1. Рассмотрим соответствующую систему факторов $\{u_{g,h}\} \subseteq U$, заданную соотношениями

$$a_g a_h = u_{g,h} a_{gh} \quad \text{для всех} \quad g, h \in A/U. \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{R}$ — область целостности и $U(\mathbf{R}) = U$. Обозначим через $\mathbf{S}$ алгебру над $\mathbf{R}$ с базисом $\{a_g\}_{g \in A/U}$, где базисные элементы перемножаются по формулам (1), причем элементы $u_{g,h}$ теперь считаются принадлежащими области коэффициентов $\mathbf{R}$. Так как элементы $u_{g,h}$ взяты из группы A, для них выполнены условия ассоциативности и коммутативности. Это гарантирует нам, что $\mathbf{S}$ действительно является ассоциативной и коммутативной унитарной $\mathbf{R}$-алгеброй с единицей. Кроме того, кратные ua_g базисных элементов a_g (где $u \in U$) образуют подгруппу группы $U(\mathbf{S})$, очевидно, изоморфную группе A (изоморфизм канонический).

Нам нужно только показать, что $\mathbf{S}$ — область целостности и что $U(\mathbf{S})$ не содержит элементов, отличных от элементов ua_g. Напомним, что всякая абелева группа без кручения, в частности наша группа A/U, допускает линейное упорядочивание, при котором $g \leqslant h$, $g' \leqslant h'$ влечет за собой $gg' \leqslant hh'$. Выберем произвольный, но фиксированный линейный порядок на A/U и запишем ненулевые элементы $\sigma \in \mathbf{S}$

в виде $\sigma = \sum_{i=1}^{m} s_i a_{g_i}$, где $s_i \neq 0$ — элементы из R, а a_{g_i} — элементы из выбранной выше системы представителей, причем $g_1 < \ldots < g_m$. Если $\tau = \sum_{j=1}^{n} t_j a_{h_j} \in \mathsf{S}$, где $t_j \neq 0$ — элементы из R и $h_1 < \ldots < h_n$, то, очевидно, базисный элемент $a_{g_1 h_1}$ имеет наименьший, а базисный элемент $a_{g_m h_n}$ — наибольший индекс среди тех, которые встречаются в произведении $\sigma\tau$, причем коэффициентами при этих элементах служат соответственно элементы $s_1 t_1 u_{g_1, h_1}$ и $s_m t_n u_{g_m, h_n}$. Эти коэффициенты отличны от нуля, так как R — область целостности. Отсюда видно, что $\sigma\tau \neq 0$, если $\sigma \neq 0$ и $\tau \neq 0$, и что $\sigma\tau = 1$ только в случае, когда $g_1 h_1 = g_m h_n$, т. е. $m = 1 = n$ и, кроме того, s_1, t_1 — обратимые элементы в R. ∎

Теперь мы можем доказать следующий результат, касающийся групп обратимых элементов.

Теорема 129.3. *Всякая группа без кручения является группой обратимых элементов некоторой области целостности [характеристики 2].*

Тривиальная группа $\langle 1 \rangle$ является группой обратимых элементов поля F_2, и наше утверждение непосредственно следует из леммы 129.2. ∎

Наши предыдущие замечания показывают, что группы обратимых элементов, не содержащие элементов порядка 2, являются в некотором смысле исключительными. Это приводит к такому вопросу: что можно вывести только из предположения, что 2-компонента группы $U(\mathsf{R})$ тривиальна? Некоторую информацию можно получить из следующего результата.

Предложение 129.4. *Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо с 1. Группа обратимых элементов $U(\mathsf{R})$ имеет тривиальную 2-компоненту тогда и только тогда, когда R — подпрямая сумма областей целостности характеристики 2.*

Если 2-компонента группы $U(\mathsf{R})$ тривиальна, то $-1 = 1$ и R — алгебра над полем F_2. Если $a^2 = 0$ для некоторого $a \in \mathsf{R}$, то $(1 + a)^2 = 1$ в R, откуда $1 + a = 1$ и $a = 0$. Следовательно, в кольце R нет нильпотентных элементов. В силу хорошо известного результата теории колец R — подпрямая сумма областей целостности, которые в рассматриваемом случае имеют характеристику 2.

Обратно, в любой области целостности характеристики 2, а значит, и в подпрямой сумме таких областей целостности 1 — единственное значение корня квадратного из 1. ∎

Временно ограничимся случаем, когда R — область целостности (в дополнение к требованию, чтобы $U(\mathsf{R})$ имела тривиальную 2-компоненту). R можно рассматривать как F_2-алгебру, а поле F_2 — как подкольцо в R. Элементы из R, алгебраические над F_2, образуют

в R подкольцо K. Это подкольцо должно быть полем, так как подкольца абсолютных алгебраических полей[1]) простых характеристик сами являются полями. Группа $U(\mathsf{K})=\mathsf{K}^{\times}$ периодическая, а так как содержащиеся в R корни из единицы должны лежать уже в K, то получается, что $\mathsf{K}^{\times}$ совпадает с периодической частью группы $U(\mathsf{R})$.

В действительности именно эта периодическая группа $\mathsf{K}^{\times}$ интересует нас больше всего, так как с помощью леммы 129.2 мы можем представить всякую смешанную группу с периодической частью $\mathsf{K}^{\times}$ как группу $U(\mathsf{R})$ для некоторого обязательно трансцендентного кольцевого расширения R поля K.

Вернемся к общему случаю, т. е. отбросим предположение, что R — область целостности. Мы хотим сосредоточить внимание на периодической части T группы $U(\mathsf{R})$. Прежде всего покажем, что T — группа обратимых элементов некоторого подкольца S кольца R. Представим R в виде подпрямой суммы областей целостности R_i характеристики 2. Ясно, что элемент $u = (\ldots, u_i, \ldots) \in \mathsf{R}$ удовлетворяет условию $u^m = 1$ (где $m \in \mathsf{Z}$) тогда и только тогда, когда $u_i^m = 1$ для всех i. В силу сказанного в предыдущем абзаце элемент u_i содержится в конечном подполе S_i кольца R_i. Кроме того, при некотором n можно выбрать $|\mathsf{S}_i| \leqslant 2^n$ при всех i, так как нечетное число m делит $2^{\varphi(m)} - 1$, где φ — функция Эйлера, и $u^{2^k-1} = 1$ при любом $u \neq 0$ в поле Галуа порядка 2^k. Теперь мы можем потребовать, чтобы каждый элемент x из подкольца, порожденного произвольным элементом $u \in T$, удовлетворял уравнению вида $x^{2^k} = x$ при фиксированном k. Из хорошо известных свойств полей Галуа непосредственно следует, что это же имеет место для подколец, порожденных конечным числом элементов из T. Кроме того,

$$\mathsf{S} = \{x \in \mathsf{R} \mid x^{2^k} = x \quad \text{при некотором} \quad k = k(x)\}$$

— подкольцо в R, причем $T \subset \mathsf{S}$. Легко видеть, что S совпадает с «алгебраическим замыканием» поля F_2 в R, т. е. с множеством всех элементов $x \in \mathsf{R}$, удовлетворяющих алгебраическому уравнению над F_2. Так как всякий обратимый элемент $u \in \mathsf{R}$ со свойством $u^{2^k} = u$ должен лежать в T, то мы заключаем, что $U(\mathsf{S}) = T$.

Для введенного выше кольца S можно получить структурную теорему:

Теорема 129.5. *Пусть R — такое коммутативное и ассоциативное кольцо с 1, что 2-компонента периодической части T группы $U(\mathsf{R})$ тривиальна. Тогда «алгебраические элементы» кольца R образуют подкольцо S, такое, что $U(\mathsf{S}) = T$ и S — подпрямая сумма абсолютных алгебраических полей характеристики 2.*

В силу предыдущих рассмотрений все будет доказано, если мы заметим, что проекция S на R_i должна быть абсолютным алгебраическим полем. ∎

[1]) То есть полей, алгебраических над своими простыми подполями.— *Прим. перев.*

Упражнения

1. Доказать, что каноническое вложение $\varkappa_A$: $A \to \mathbf{Z}A$ является функторным, т. е. всякий групповой гомоморфизм α: $A \to B$ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\bar{\alpha}$: $\mathbf{Z}A \to \mathbf{Z}B$, превращающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varkappa_A} & \mathbf{Z}A \\ \alpha\downarrow & & \bar{\alpha}\downarrow \\ B & \xrightarrow{\varkappa_B} & \mathbf{Z}B \end{array}$$

в коммутативную.

2. Если $\mathbf{R}$ — область целостности и A — группа без кручения, то

$$U(\mathbf{R}A) \cong U(\mathbf{R}) \times A.$$

3. (а) Если $U_1, \ldots, U_n$ — группы обратимых элементов некоторых колец, то их прямое произведение $U_1 \times \ldots \times U_n$ — тоже группа обратимых элементов некоторого кольца.

(б) Прямой сомножитель группы обратимых элементов не обязан быть группой обратимых элементов.

4. Перечислить все циклические группы простых порядков, являющиеся группами обратимых элементов. [*Указание*: 2 и $p = 2^n - 1$.]

5 (Кон [2]). Привести пример поля, мультипликативная группа которого является нерасщепляющейся смешанной группой.

6. Пусть $\mathbf{R}$ — область целостности без кручения, для которой $U(\mathbf{R})$ — периодическая группа. Тогда $T \cong Z(2)$ или $T \cong Z(4)$.

7. Если A — группа, обладающая автоморфизмом порядка 4, то $Z(4) \times A$ — группа обратимых элементов. [*Указание*: использовать целые гауссовы числа и п. Е) из § 128.]

8. Пусть $\mathbf{R}$ — ассоциативное и коммутативное 2-делимое кольцо без кручения, в котором имеется по крайней мере два обратимых элемента порядка 2. Тогда $\mathbf{R}$ — прямая сумма двух собственных идеалов. [*Указание*: взять $\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$, где $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon \neq -1$.]

Замечания

Некоторые из результатов этой главы являются классическими: теорема Дирихле о группах обратимых элементов в полях алгебраических чисел, описание Гензеля группы обратимых элементов кольца целых p-адических чисел и, конечно, строение мультипликативных групп полей Галуа. Удивительно, что теорема Сколема [1] о мультипликативных группах полей алгебраических чисел получена не более четверти века тому назад. Всего лишь простое упражнение по абелевым группам — охарактеризовать мультипликативные группы алгебраически замкнутых и вещественно замкнутых полей [Фукс [16]].

Большой проблемой, естественно, является описание тех групп, которые могут быть мультипликативными группами полей. Проблема была переформулирована Диккером [1] [что не дало никакого действительного проникновения в ее суть] в терминах существования некоторой функции на группе с присоединенным нулем. Печально, что нельзя дать характеризации с помощью чего-нибудь такого, что счел бы подходящим алгебраист, а именно множества выска-

зываний языка теории групп первого порядка. В самом деле, С. Р. Когаловский [*ДАН СССР*, **140** (1961), 1005—1007] показал, что класс мультипликативных групп полей не является арифметически замкнутым в смысле А. И. Мальцева и поэтому не аксиоматизируем; ср. также Саббах [1]. Ввиду этого недавний результат Мэя [3] звучит наиболее удовлетворительно: пусть A — группа, периодическая часть которой является подгруппой группы Q/Z и имеет нетривиальную 2-компоненту; тогда существует такое поле K, что

$$\mathsf{K}^{\times} \cong A \times F,$$

где F — свободная абелева группа. Доказательство этого прекрасного результата выходит за рамки нашей книги, поэтому, к сожалению, оно не могло быть включено в настоящую главу.

Первым систематическое изучение групп обратимых элементов провел Хигман [Higman G., *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1938—39), 231—248]; он исследовал группы обратимых элементов групповых колец над конечными алгебраическими расширениями кольца целых чисел. Кольца с циклическими группами обратимых элементов были описаны Джильмером [Gilmer R. W., *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 247—252] в случае конечных колец и Пирсоном и Шнейдером [Pearson K. R., Schneider J. E., *J. Algebra*, **16** (1970), 243—251] в случае бесконечных колец.

Наблюдается все возрастающий интерес к некоммутативным группам обратимых элементов. Из многочисленных имеющихся здесь результатов упомянем простой, но очень содержательный результат Дитора [Ditor S. Z., *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 722—723]: если G — не обязательно коммутативная группа нечетного порядка, являющаяся группой обратимых элементов некоторого кольца R, то подкольцо кольца R, порожденное группой G, изоморфно конечной прямой сумме полей Галуа характеристики 2 и, следовательно, G — конечное прямое произведение циклических групп, порядки которых имеют вид $2^k - 1$. Недавно Элдридж распространил некоторые из результатов § 129 на некоммутативный случай.

П р о б л е м а 98. Исследовать, как меняются группы обратимых элементов при расширении колец [полей].

П р о б л е м а 99. Описать строение групп обратимых элементов в кольцах степенных рядов.

П р о б л е м а 100. Указать условия на группу, при которых она является группой обратимых элементов в кольце того или иного важного типа [регулярном, нётеровом и т. д.].

Литература

Абиан, Райнхарт (Abian A., Rinehart D.)

[1] Honest subgroups of abelian groups, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **12** (1963), 353—356.

Абхьянкар (Abhyankar S.)

[1] On the finite factor groups of abelian groups of finite rational rank, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 190—192.

Алмейда Коста (Almeida Costa A.)

[1] Об абелевых группах (португ.), *Anais Fac. Ci. Porto*, **27** (1942), 1—40.

Альтман (Altman M.)

[1] Généralisation aux groupes abéliens de la théorie de F. Riesz, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 1135—1138.

Армстронг (Armstrong J. W.)

[1] A note on endomorphism groups, *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 116—119.
[2] On p-pure subgroups of the p-adic integers, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 315—321.
[3] On the indecomposability of torsion-free abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 323—325.

Аршинов М. Н.

[1] О проективной размерности абелевых групп без кручения над кольцом своих эндоморфизмов, *Матем. заметки*, **7** (1970), 117—124.

Аюб Р., Аюб К. (Ayoub R. G., Ayoub C.)

[1] On the group ring of a finite abelian group, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **1** (1969), 245—261.

Бальцежик (Balcerzyk S.)

[1] Remark on a paper of S. Gacsályi, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 357—358.
[2] On algebraically compact groups of I. Kaplansky, *Fund. Math.*, **44** (1957), 91—93.
[3] On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 141—142.
[4] On classes of abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **9** (1961), 327—329; *Fund. Math.*, **51** (1962), 149—178; **56** (1964), 199—202.
[5] On groups of functions defined on Boolean algebras, *Fund. Math.*, **50** (1962), 347—367.
[6] The global dimension of the group rings of abelian groups, *Fund. Math.*, **55** (1964), 293—301; **58** (1966), 67—73; **67** (1970), 24—50.

Бальцежик, Бялиницкий-Бируля, Лось (Balcerzyk S., Białynicki-Birula A., Łós J.)

[1] On direct decompositions of complete direct sums of groups of rank 1, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **9** (1961), 451—454.

Батлер (Butler M. C. R.)

[1] A class of torsion-free abelian groups of finite rank, *Proc. London. Math. Soc.*, **15** (1965), 680—698.
[2] On locally torsion-free rings of finite rank, *J. London Math. Soc.*, **43** (1968), 297—300.

Баумслаг (Baumslag G.)

[1] On abelian hopfian groups, I, *Math. Z.*, **78** (1962), 53—54.
[2] Hopficity and abelian groups, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 331—335.

Баумслаг, Блэкбурн (Baumslag G., Blackburn N.)

[1] Direct summands of unrestricted direct sums of abelian groups, *Arch. Math.*, **10** (1959), 403—408.

Бенабдаллах, Ирвин (Benabdallah K., Irwin J. M.)

[1] On quasi-essential subgroups of primary abelian groups, *Canad. J. Math.*, **22** (1970), 1176—1184.

Бенабдаллах, Эйзенштадт, Ирвин, Полуянов (Benabdallah K. M., Eisenstadt B. J., Irwin J. M., Poluianov E. W.)
[1] The structure of large subgroups of primary abelian groups, *Acta Math. Acad.Sci. Hungar.*, **21** (1970), 421—435.

Берман С. Д.
[1] Групповые алгебры счетных абелевых p-групп, *ДАН СССР*, **175** (1967), 514—516; и *Publ. Math. Debrecen*, **14** (1967), 365—405.

Бертхольф (Bertholf D.)

[1] Isomorphism invariants for quotient categories of abelian groups, *Math. Z.*, **114** (1970), 33—48.

Бицан (Bican L.)

[1] On isomorphism of quasi-isomorphic torsion free abelian groups, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **9** (1968), 109—119.
[2] Some properties of completely decomposable torsion free abelian groups, *Чехослов. матем. ж.*, **19** (1969), 518—533.
[3] On splitting mixed abelian groups, *Чехослов. матем. ж.*, **20** (1970), 74—80.
[4] Mixed abelian groups of torsion free rank one, *Чехослов. матем. ж.*, **20** (1970), 232—242.
[5] Factor-splitting abelian groups of rank two, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **11** (1970), 1—8.

Блок (Block R.)

[1] On torsion-free abelian groups and Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 613—620.

Бойер (Boyer D. L.)
[1] Enumeration theorems in infinite abelian groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 565—570.
[2] A note on a problem of Fuchs, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1147.
[3] On the theory of p-basic subgroups of abelian groups, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 323—330.

Бойер, Мадер (Boyer D., Mader A.)

[1] A representation theorem for abelian groups with no elements of infinite p-height, *Pacific J. Math.*, **20** (1967), 31—33.

Бойер, Уокер Э. (Boyer D. L., Walker E. A.)

[1] Almost locally pure abelian groups, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 409—413.

Боньяр (Bognár M.)

[1] Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 509—511.

Брамере (Brameret M. P.)

[1] Sous-groupes complètement invariants d'un groupe abélien, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **255** (1962), 1369—1370.
[2] Sur les groupes p-réduits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 345—346.

Брандис (Brandis A.)

[1] Über die multiplikative Struktur von Körpererweiterungen, *Math. Z.*, **87** (1965), 71—73.

Бреннер, Батлер (Brenner S., Butler M. C. R.)

[1] Endomorphism rings of vector spaces and torsion free abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 183—187.

Бриан (Bryant S.)

[1] Isomorphism order for abelian groups, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 679—683.

Бурбаки (Bourbaki N.)

[1] «Algèbre», Chap. VII. Modules sur les anneaux principaux, Paris, 1952. [Русский перевод: Бурбаки Н., Алгебра, «Наука», М., 1966.]

Бьюмонт (Beaumont R. A.)

[1] Groups with isomorphic proper subgroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 381—387.
[2] Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 367—369.
[3] A survey of torsion free rings, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 41—49.
[4] Abelian groups G which satisfy $G \cong G \oplus K$ for every direct summand K of G, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 69—74.
[5] A note on products of homogeneous torsion free abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **22** (1969), 434—436.

Бьюмонт, Пирс (Beaumont R. A., Pierce R. S.)

[1] Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91** (1959), 209—219.
[2] Partly invariant submodules of a torsion module, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91** (1959), 220—230.
[3] Torsion-free rings, *Ill. J. Math.*, **5** (1961), 61—98.
[4] Torsion free groups of rank two, Mem. Amer. Math. Soc., № 38 (1961).
[5] Subrings of algebraic number fields, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), 202—216.
[6] Quasi-isomorphism of p-groups, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, p. 13—27.
[7] Isomorphic direct summands of abelian groups, *Math. Ann.*, **153** (1964), 21—37.
[8] Some invariants of p-groups, *Mich. Math. J.*, **11** (1964), 137—149.
[9] Quasi-isomorphism of direct sums of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965), 33—36.

Бьюмонт, Уиснер (Beaumont R. A., Wisner R. J.)

[1] Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two, *Acta Sci. Math. Szeged*, **20** (1959), 105—116.

Бьюмонт, Цукерман (Beaumont R. A., Zuckerman H. S.)

[1] A characterization of the subgroups of the additive rationals, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 169—177.

Бэр (Baer R.)

[1] The decomposition of enumerable, primary, abelian groups into direct summands, *Quart. J. Math. Oxford*, **6** (1935), 217—221.
[2] The decomposition of abelian groups into direct summands, *Quart. J. Math. Oxford*, **6** (1935), 222—232.
[3] Types of elements and characteristic subgroups of abelian groups, *Proc. London Math. Soc.*, **39** (1935), 481—514.
[4] The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Ann. Math.*, **37** (1936), 766—781.
[5] Primary abelian groups and their automorphisms, *Amer. J, Math.*, **59** (1937), 99—117.
[6] Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 68—122.
[7] Dualism in abelian groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 121—124.
[8] Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, Bull. Amer. Math. Soc., **46** (1940), 800—806.
[9] Automorphism rings of primary abelian operator groups, *Ann. Math.*, **44** (1943), 192—227.
[10] Extension types of abelian groups, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 461—490.
[11] Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe, *Math. Ann.*, **135** (1958), 219—234.
[12] Partitionen abelscher Gruppen, *Arch. Math.*, **14** (1963), 73—83.
[13] Irreducible groups of automorphisms of abelian groups, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 385—406.

Ванг (Wang J.S.P.)

[1] On completely decomposable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 184—186.

Вильоен (Viljoen G.)

[1] A contribution to the extensions of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **6** (1963), 125—132.
[2] On quasi-decompositions of torsion-free abelian groups of infinite rank (to appear).

Виноградов А. А.

[1] Квазимногообразия абелевых групп, *Алгебра и логика*, **4** (1965), № 6, 15—19.

Вольфсон (Wolfson K. G.)

[1] Baer rings of endomorphisms, *Math. Ann.*, **143** (1961), 19—28.

е Врие, де Миранда (de Vries H., de Miranda A. B.)

[1] Groups with a small number of automorphisms, *Math. Z.*, **68** (1958), 450—464.

Гарднер (Gardner B. J.)

[1] A note on types, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **2** (1970), 275—276.
[2] Torsion classes and pure subgroups, *Pacific J. Math.*, **33** (1970), 109—116.

Гачайи (Gacsályi S.)

[1] On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 292—296.
[2] On pure subgroups and direct summands of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 89—92.
[3] On limit operations in a certain topology for endomorphism rings of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), 353—358.

Голема, Хуляницкий (Golema K., Hulanicki A.)

[1] The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups. II, *Fund. Math.*, **53** (1963—1964), 177—185.

Гриффит (Griffith P.)

[1] Purely indecomposable torsion-free groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 738—742.
[2] A counterexample to a theorem of Chase, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 923—924.
[3] Decomposition of pure subgroups of torsion free groups, *Ill. J. Math.*, **12** (1968), 433—438.
[4] Transitive and fully transitive primary abelian groups, *Pacific J. Math.*, **25** (1968), 249—254.
[5] Separability of torsion free groups and a problem of J.H.C. Whitehead, *Ill. J. Math.*, **12** (1968), 654—659.
[6] On direct sums of p-mixed groups, *Arch. Math.*, **19** (1968), 359—360.
[7] A solution to the splitting mixed group problem of Baer, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 261—269.
[8] Extensions of free groups by torsion groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 677—679.
[9] On a subfunctor of Ext, *Arch. Math.*, **21** (1970), 17—22.
[10] Infinite abelian groups, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago and London, 1970.

де Гроот (de Groot J.)

[1] An isomorphism criterion for completely decomposable abelian groups, *Math. Ann.*, **132** (1956), 328—332.
[2] Indecomposable abelian groups, *Proc. Ned. Akad. Wetensch.*, **60** (1957), 137—145.
[3] Equivalent abelian groups, *Canad. J. Math.*, **9** (1957), 291—297.

де Гроот, де Врие (de Groot J., de Vries H.)

[1] Indecomposable abelian groups with many automorphisms, *Nieuw Arch. Wisk.*, **6** (1958), 55—57.

Гроссе (Grosse P.)

[1] Periodizität der iterierten Homomorphismengruppen, *Arch. Math.*, **16** (1965), 393—406.
[2] Maximale, periodische Klassen abelscher Gruppen, *Math. Z.*, **94** (1966), 235—255.
[3] Homomorphismen endlicher Ordnung, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **10** (1967), 31—35.

Грэбе (Gräbe P. J.)

[1] Der iterierte Ext-Funktor, seine Periodizität und die dadurch definierten Klassen abelscher Gruppen, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 131—141.

Грэбе, Вильоен (Gräbe P. J., Viljoen G.)

[1] Maximal classes of Ext-reproduced abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **98**, (1970), 165—192.

Грэтцер, Шмидт (Grätzer G., Schmidt E. T.)

[1] A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **3—4** (1961), 85—87.
[2] On a problem of L. Fuchs concerning universal subgroups and universal homomorphic images of abelian groups, *Proc. Ned, Akad. Wetensch.*, **64** (1961), 253—255.

Диккер (Dicker R. M.)

[1] A set of independent axioms for a field and a condition for a group to be the multiplicative group of a field, *Proc. London Math. Soc.*, **18** (1968), 114—124.

Диксон С. (Dickson S. E.)

[1] On torsion classes of abelian groups, *J. Math. Soc. Japan*, **17** (1965), 30—35.

Диксон Т. (Dickson T. J.)

[1] On a covering problem concerning abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **3** (1971), 222—232.

Длаб (Dlab V.)

[1] *D*-ранг абелевой группы (чешск.), *Časopis Pěst. Mat.*, **82** (1957), 314—334.
[2] Die Endomorphismenringe abelscher Gruppen und die Darstellung von Ringen durch Matrizenringe, *Чехосл. матем. ж.*, **7** (1957), 485—523.
[3] Заметка к теории полных абелевых групп, *Чехосл. матем. ж.*, **8** (1958), 54—61.
[4] Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп, *Чехосл. матем. ж.*, **9** (1959), 161—171.
[5] Заметка о проблеме относительно подгрупп Фраттини (чешск.), *Časopis Pěst. Mat.*, **85** (1960), 87—90.
[6] The Frattini subgroups of abelian groups, *Чехосл. матем. ж.*, **10** (1960), 1—16.
[7] On a characterization of primary abelian groups of bounded order, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 139—144.
[8] On the dependence relation over abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 75—80.

Дуглас (Douglas A. J.)

[1] The weak global dimension of the group rings of abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 371—381.
[2] A homological characterization of certain abelian groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57** (1961), 156—164.

Дуглас, Фарахат (Douglas A. J., Farahat H. K.)

[1] The homological dimension of an abelian group as a module over its ring of endomorphisms, *Monatsh. Math.*, **69** (1965), 294—305.

Дьёдонне (Dieudonné J.)

[1] Sur les *p*-groupes abéliens infinis, *Portugaliae Math.*, **11** (1952), 1—5.

Дэрри (Derry D.)

[1] Über eine Klasse von abelschen Gruppen, *Proc. London Math. Soc.*, **43** (1937), 490—506.

Дюбуа Д. (Dubois D. W.)

[1] Cohesive groups and *p*-adic integers, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 51—58.
[2] Applications of analytic number theory to the study of type sets of torsion-free abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 59—63; **13** (1966), 1—8.

Дюбуа П. (Dubois P. F.)

[1] Generally p^{α}-torsion complete abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **159** (1971), 245—255.

Есьманович (Jeśmanowicz L.)

[1] On direct decompositions of torsion-free abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **8** (1960), 505—510.

Журавский В. С.

[1] О расщеплении некоторых смешанных абелевых групп, *Матем. сб.*, **48** (1959), 499—508.
[2] Обобщение некоторых критериев расщепления смешанных абелевых групп, *Матем. сб.*, **51** (1960), 377—382.
[3] К вопросу о группе абелевых расширений абелевых групп, *ДАН СССР*, **134** (1960), 29—32.
[4] О группе абелевых расширений периодической абелевой группы с помощью абелевой группы без кручения, *УМН*, **16** (1961), № 4, 161—166.

Зиман (Zeeman E. C.)

[1] On direct sums of free cycles, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 195—212.

Ирвин (Irwin J.)

[1] High subgroups of abelian torsion groups, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1375—1384.

Ирвин, Бенабдаллах (Irwin J. M., Benabdallah K.)

[1] On N-high subgroups of abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 337—346.

Ирвин, Ито (Irwin J. M., Ito T.)

[1] A quasi-decomposable abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, *Pacific J. Math.*, **29** (1969), 151—160; *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, **20** (1969), 194—203.

Ирвин, Кхаббаз (Irwin J. M., Khabbaz S. A.)

[1] On generating subgroups of abelian groups, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, p. 87—97.

Ирвин, Кхаббаз, Райна (Irwin J. M., Khabbaz S. A., Rayna G.)

[1] The role of the tensor product in the splitting of abelian groups, *J. Algebra*, **14** (1970), 423—442.

[2] On a submodule of Ext, *J. Algebra*, **19** (1971), 486—495.

Ирвин, О'Нейл (Irwin J. M., O'Neill J. D.)

[1] On direct products of abelian groups, *Canad. J. Math.*, 22 (1970), 525—544.

Ирвин, Пирси, Уокер Э. (Irwin J., Peercy C., Walker E.)

[1] Splitting properties of high subgroups, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 185—192.

Ирвин, Ричмен (Irwin J. M., Richman F.)

[1] Direct sums of countable groups and related concepts, *J. Algebra*, **2** (1965), 443—450.

Ирвин, Ричмен, Уокер Э. (Irwin J. M., Richman F., Walker E. A.)

[1] Countable direct sums of torsion complete groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 763—766.

Ирвин, Сванек (Irwin, J., Swanek J.)

[1] On purifiable subsocles of a primary abelian group, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 48—57.

Ирвин, Уокер К., Уокер Э. (Irwin J. M., Walker C., Walker E. A.)

[1] On p^{α}-pure sequences of abelian groups, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 69—119.

Ирвин, Уокер Э. (Irwin J. M., Walker E. A.)

[1] On N-high subgroups of abelian groups, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1363—1374.

[2] On isotype subgroups of abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 451—460.

Йонсон (Jónsson B.)

[1] On direct decompositions of torsion-free abelian groups, *Math. Scand.*, **5**, (1957), 230—235.

[2] On direct decompositions of torsion free abelian groups, *Math. Scand.*, **7** (1959), 361—371.

Калужнин Л. А.

[1] Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn A. Kurosch, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **12** (1938), 247—255.
[2] Sur les groupes abéliens primaires sans éléments de hauteur infinite, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **225** (1947), 713—715.

Капланский (Kaplansky I.)

[1] A note on groups without isomorphic subgroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 529—530.
[2] Some results on abelian groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **38** (1952), 538—540.
[3] Infinite abelian groups, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1954 and 1969.
[4] Projective modules, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 372—377.

Капланский, Макки (Kaplansky I., Mackey G. W.)

[1] A generalization of Ulm's theorem, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1951), 195—202.

Каргаполов М. И.

[1] К элементарной теории абелевых групп, *Алгебра и логика*, **1** (1962—1963), № 6, 26—36.

Касталья (Castagna F.)

[1] Sums of automorphisms of a primary abelian group, *Pacific J. Math.*, **27** (1968), 463—473.

Катлер (Cutler D. O.)

[1] Quasi-isomorphisms for infinite abelian p-groups, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 25—45.
[2] Another summable C_Ω-group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1970), 43—44.
[3] On the structure of primary abelian groups of countable Ulm type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **152** (1970), 503—518.

Катлер, Дюбуа П. (Cutler D. O., Dubois P. F.)

[1] A generalization of final rank of primary abelian groups, *Canad. J. Math.*, **22** (1970), 1118—1122.

Катлер, Стринголл (Cutler D. O., Stringall R. W.)

[1] A topology for primary abelian groups, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 93—100.

Катлер, Уинтроп (Cutler D. O., Winthrop J.)

[1] A note on a paper of Paul Hill and Charles Megibben, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **22** (1969), 428—429.

Като (Katô K.)

[1] On abelian groups every subgroup of which is a neat subgroup, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **15** (1967), 117—118.

Кауп, Кин (Kaup L., Keane M. S.)

[1] Induktive Limiten endlich erzeugter freier Moduln, *Manuscripta Math.*, **1** (1969), 9—21.

Кертес (Kertész A.)

[1] On the decomposability of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 122—126.
[2] On fully decomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 225—232.

[3] On a theorem of Kulikov and Dieudonné, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 61—69.
[4] On subgroups and homomorphic images, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1953), 174—179.
[5] Zur Frage der Spaltbarkeit von Ringen, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **12** (1964), 91—93.

Кертес, Селе (Kertész A., Szele T.)

[1] On abelian groups every multiple of which is a direct summand, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), 157—166.
[2] Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 70—76.
[3] On the existence of non-discrete topologies in infinite abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1953), 187—189.
[4] Об обобщенных p-группах (венг.), *Acta Univ. Debrecen*, **2** (1955), 1—5.

Кёлер (Koehler J.)

[1] Some torsion-free rank two groups, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **25** (1964), 186—190.
[2] The type set of a torsion-free group of finite rank, *Ill. J. Math.*, **9** (1965), 66—86.

Кильп М. А.

[1] Квазиинъективные абелевы группы, *Вестн. Моск. ун-та, мат., мех.*, **22** (1967), № 3, 3—4.

Кишкина З. М.

[1] Эндоморфизмы p-примитивных абелевых групп без кручения, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **9** (1945), 201—232.

Клаборн (Claborn L.)

[1] Every abelian group is a class group, *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 219—222.

Клей (Clay J. R.)

[1] The group of left distributive multiplications on an abelian group, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **19** (1968), 221—227.

Кляцкая Л. М.

[1] Абелеві групи, в яких доповиються всі максимальні підгрупи фіксованого скінченного рангу, *Доповіді АН УРСР*, 1968, 803—806.
[2] Абелеві групи нескінченного рангу з деякою системою доповнюваних підгруп нескінченного рангу, *Доповіді АН УРСР*, 1969, 586—588.

Ковач (Kovács L.)

[1] On subgroups of the basic subgroup, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1958), 261—264.
[2] On a paper of Ladislav Procházka, *Чехосл. матем. ж.*, **13** (1963), 612—618.
[3] Admissible direct decompositions of direct sums of abelian groups of rank one, *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 254—263.

Колеттис (Kolettis G. Jr.)

[1] Direct sums of countable groups, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 111—125.
[2] Semi-complete primary abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 200—205.
[3] Homogeneously decomposable modules, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 223—238.

Кон (Cohn P. M.)

[1] The complement of a finitely generated direct summand of an abelian group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 520—521.

[2] Eine Bemerkung über die multiplikative Gruppe eines Körpers, *Arch. Math.*, **13** (1962), 344—348.

Корнелиус (Cornelius E. F., Jr.)

[1] Note on quasi-decompositions of irreducible groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1970), 33—36.

Корнер (Corner A.L.S.)

[1] A note on rank and direct decompositions of torsion-free abelian groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57** (1961), 230—233; **66** (1969), 239—240.
[2] Wildly embedded subgroups of complete direct sums of abelian groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **59** (1963), 249—251.
[3] Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring, *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1963), 687—710.
[4] On a conjecture of Pierce concerning direct decompositions of abelian groups, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, p. 43—48.
[5] Three examples on hopficity in torsion-free abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965), 303—310.
[6] Endomorphism rings of torsion-free abelian groups, Proc. Internat. Conf. Theory Groups, New York, London, Paris, 1967, p. 59—69.
[7] On endomorphism rings of primary abelian groups, *Quart. J. Math. Oxford*, **20** (1969), 277—296.
[8] Endomorphism algebras of large modules with distinguished submodules, *J. Algebra*, **11** (1969), 155—185.

Корнер, Кроули (Corner A. L. S., Crawley P.)

[1] An abelian p-group without the isomorphic refinement property, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 743—746.

Коэн (Cohen D. E.)

[1] On abelian group algebras, *Math. Z.*, **105** (1968), 267—268.

Кояма (Koyama T.)

[1] On quasi-closed groups and torsion complete groups, *Bull. Soc. Math. France*, **95** (1967), 89—94.

Кояма, Ирвин (Koyama T., Irwin J.)

[1] On topological methods in abelian groups, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 207—222.

Кроули (Crawley P.)

[1] An infinite primary abelian group without proper isomorphic subgroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 463—467.
[2] Solution of Kaplansky's Test Problems for primary abelian groups, *J. Algebra*, **2** (1965), 413—431.
[3] The cancellation of torsion abelian groups in direct sums. *J. Algebra*, 2 (1965), 432—442.
[4] An isomorphic refinement theorem for certain abelian p-groups, *J. Algebra*, **6** (1967), 376—387.
[5] Abelian p-groups determined by their Ulm sequences, *Pacific J. Math.*, 22 (1967), 235—239.

Кроули, Йонсон (Crawley P., Jónsson B.)

[1] Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 797—855.

Кроули, Меджиббен (Crawley P., Megibben C.)

[1] A simple construction of bizarre abelian groups (to appear).

Кроули, Хэйлс (Crawley P., Hales A. W.)

[1] The structure of torsion abelian groups given by presentations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 954—956.
[2] The structure of abelian p-groups given by certain presentations, *J. Algebra*, **12** (1969), 10—23, and **18** (1971), 264—268.

Круддис (Cruddis T. B.)

[1] On a class of torsion-free abelian groups, *Proc. London Math. Soc.*, **21** (1970), 243—276.

Круль (Król M.)

[1] Separable groups. I, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **9** (1961), 337—344.
[2] The automorphism groups and endomorphism rings of torsion-free abelian groups of rank two, *Dissertationes Math.*, **55** (Warsaw, 1967).

Круль, Сонсяда (Król M., Sąsiada E.)

[1] The complete direct sums of torsion-free abelian groups of rank one which are separable, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **8** (1960), 1—2.

Куликов Л. Я.

[1] К теории абелевых групп произвольной мощности, *Матем. сб.*, **9** (1941), 165—182.
[2] К теории абелевых групп произвольной мощности, *Матем. сб.*, **16** (1945), 129—162.
[3] Обобщенные примарные группы, Труды Моск. матем. об-ва, **1** (1952), 247—326; 2 (1953), 85—167.
[4] О прямых разложениях групп, *Укр. матем. ж.*, **4** (1952), 230—275, 347—372.
[5] О прямых разложениях одной смешанной абелевой группы, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 512—516.
[6] Универсально полные абелевы группы, Труды III Всесоюзн. матем. съезда, Москва, 1956, стр. 26—28.

Курош А. Г.

[1] Zur Zerlegung unendliche Gruppen, *Math. Ann.*, **106** (1932), 107—113.
[2] Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 175—203.
[3] Теория групп, Москва, 1953 и 1967.

Кхаббаз (Khabbaz S. A.)

[1] Abelian torsion groups having a minimal system of generators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98** (1961), 527—538.
[2] On a theorem of Charles and Erdélyi, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 103—104.
[3] The subgroups of a divisible group G which can be represented as intersections of divisible subgroups of G, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 267—273.
[4] On the decomposability of abelian groups, *J. London. Math. Soc.*, 38 (1963), 137—147.

Кхаббаз, Уокер Э. (Khabbaz S. A., Walker E. A.)

[1] The number of basic subgroups of primary groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15** (1964), 153—155.

Кэмпбелл (Campbell M. O'N.)

[1] Countable torsion-free abelian groups, *Proc. London. Math. Soc.*, **10** (1960), 1—23.

Лай (Ligh S.)

[1] A note on the splitting problem of mixed abelian groups, *Nieuw Arch. Wisk.*, **16** (1968), 15—18.

Леви (Levi F. W.)

[1] Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen, Habilitationsschrift, Leipzig, 1917.

[2] The ring of endomorphisms for which every subgroup of an abelian group is invariant, *J. Indian Math. Soc.*, **10** (1946), 29—31.

Левис (Lewis P. E.)

[1] Characters of abelian groups, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 81—105.

Лептин (Leptin H.)

[1] Zur Theorie der überabzählbaren abelschen p-Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **24** (1960), 79—90.

[2] Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen, *Math. Z.*, **73** (1960), 235—253.

[3] Eine Charakterisierung gewisser abelscher p-Gruppen, *Arch. Math.*, **13** (1962), 82—85.

[4] Einige Bemerkungen über die Automorphismen abelscher p-Gruppen, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, p. 99 —104.

Либерт (Liebert W.)

[1] Charakterisierung der Endomorphismenringe endlicher abelscher Gruppen, *Arch. Math.*, **18** (1967), 128—135.

[2] Charakterisierung der Endomorphismenringe beschränkter abelscher Gruppen, *Math. Ann.*, **174** (1967), 217—232.

[3] Die minimalen Ideale der Endomorphismenringe abelscher p-Gruppen, *Math. Z.*, **97** (1967), 85—104.

[4] Endomorphism rings of abelian p-groups, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 239—258.

[5] Characterization of the endomorphism rings of divisible torsion modules and reduced complete torsion-free modules over complete discrete valuation rings, *Pacific J. Math.*, **37** (1971), 141—170.

ван Лиувен (van Leeuwen L. C. A.)

[1] A note on a maximal periodic class of abelian groups, *Arch. Math.*, **18** (1967), 571—576.

[2] On torsion-free cotorsion groups, *Indagationes Math.*, **31** (1969), 388—393.

Лоувер, Тубасси (Lawver D. A., Toubassi E. H.)

[1] Tensor products and the splitting of abelian groups, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 764—770.

Лось (Łoś J.)

[1] On the complete direct sum of countable abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1954), 269—272.

[2] On torsion-free abelian groups with hereditarily generating sequences, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **4** (1956), 169—171.

[3] Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **4** (1956), 73; *Fund. Math.*, **44** (1957), 84—90.

[4] Linear equations and pure subgroups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 13—18.

[5] Generalized limits in algebraically compact groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 19—21.

Лось, Сонсяда, Сломинский (Łoś J., Sąsiada E., Słominski Z.)

[1] On abelian groups with hereditarily generating systems, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 351—356.

Лунстра (Loonstra F.)

[1] Ordering of extensions, Proc. Internat. Conf. Theory Groups, New York, London, Paris, 1967, p. 225—231.

Ляпин Е. С.

[1] О разложении абелевых групп без кручения, имеющих конечный ранг, в прямую сумму групп первого ранга, *Матем. сб.*, **3** (1938), 167—177.
[2] О разложении абелевых групп в прямую сумму групп первого ранга, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 1939, 141—148.
[3] Некоторые свойства разложений абелевых групп без кручения в прямые суммы, *ДАН СССР*, **24** (1939), 8—10.
[4] Разложение исчислимых абелевых групп без кручения в прямые суммы групп первого ранга, *ДАН СССР*, **24** (1939), 11—13.
[5] О разложении абелевых групп в прямые суммы рациональных групп, *Матем. сб.*, **8** (1940), 205—237.

Мадер (Mader A.)

[1] On the automorphism group and the endomorphism ring of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **8** (1965), 3—12.
[2] On the normal structure of the automorphism group and the ideal structure of the endomorphism ring of abelian p-groups, *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), 123—137.
[3] A characterization of completions of direct sums of cyclic groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **15** (1967), 231—233.
[4] Extensions of abelian groups, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 259—266.
[5] The group of extensions of a torsion group by a torsion free group, *Arch. Math.*, **20** (1969), 126—131.
[6] The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact group, *Publ. Math. Debrecen*, **17** (1970), 299—306.

Майнс (Mines R.)

[1] Torsion and cotorsion completions, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 301—303.
[2] A family of functors defind on generalized primary groups, *Pacific J. Math.*, **26** (1968), 349—360.

Маклейн (MacLane S.)

[1] Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 485—516.
[2] Quelques théorèmes et problèmes sur le groupe des extensions des groupes abéliens. Sém. P. Dubreil et C. Pisot, 1955—1956, № 23.
[3] Group extensions by primary abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 1—16.

Мальцев А. И.

[1] Абелевы группы конечного ранга без кручения, *Матем. сб.*, **4** (1938), 45—68.

Маранда (Maranda J. M.)

[1] On pure subgroups of abelian groups, *Arch. Math.*, **11** (1960), 1—13.

Маурер (Maurer I. G.)

[1] Über im Endomorphismenringe einer abelschen Gruppe definierte unendliche Reihen und Produkte, *Acta Sci. Math. Szeged*, **23** (1962), 171—175.

Мацуда (Matsuda R.)

[1] On Problem 36 of Fuchs L., Abelian Groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **17** (1969), 83.

Меджиббен (Megibben C.)

[1] A note on a paper of Bernard Charles, *Bull. Soc. Math. France*, **91** (1963), 453—454.
[2] Kernels of purity in abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **11** (1964), 160—164.
[3] On high subgroups, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 1353—1358.

[4] On subgroups of primary abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 293—294.
[5] Large subgroups and small homomorphism, *Michigan Math. J.*, **13** (1966), 153—160.
[6] On mixed groups of torsion-free rank one, *Ill. J. Math.*, **11** (1967), 134—144.
[7] Modules over an incomplete discrete valuation ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 450—452.
[8] On a theorem of Cutler, *Canad. Math. Bull.*, **12** (1969), 225—227.
[9] The generalized Kulikov criterion, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 1192—1208.
[10] A nontransitive, fully transitive primary group, *J. Algebra*, **13** (1969), 571—574.
[11] On certain subsocles of a primary abelian group, *Bull. Soc. Math. France*, **97** (1969), 285—287.
[12] A generalization of the classical theory of primary groups, *Tôhoku Math. J.*, **22** (1970), 347—356.

Митчел А. (Mitchell A. R.)

[1] Some properties of upper basic subgroups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **10** (1967), 3—11.

Митчел А., Митчел Р. (Mitchell A. R., Mitchell R. W.)

[1] Disjoint basic subgroups, *Pacific J. Math.*, **23** (1967), 119—127.
[2] Some structure theorems for infinite abelian p-groups, *J. Algebra*, **5** (1967), 367—372.

Мишина А. П.

[1] О полных прямых суммах абелевых групп без кручения первого ранга, *Укр. матем. ж.*, **2** (1950), № 4, 64—70.
[3] Некоторые условия расщепления смешанных абелевых групп, *Укр. матем. ж.*, **3** (1951), 218—232.
[3] Об изоморфизме полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1, *Матем. сб.*, **31** (1952), 118—127.
[4] О прямых слагаемых полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1, *Сиб. матем. ж.*, **3** (1962), 244—249.
[5] Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1, *ДАН СССР*, **143** (1962), 275—276; *Матем. сб.*, **57** (1962), 375—383.
[6] Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп, *Вестн. Моск. ун-та*, Матем., мех., 1962, № 4, 39—43.

Монк (Monk G. S.)

[1] One-sided ideals in the endomorphism ring of an abelian p-group, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **19** (1968), 171—185.
[2] Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups, *Ill, J. Math.*, **14** (1970), 164—177.
[3] Essentially indecomposable abelian p-groups, *J. London. Math. Soc.*, **3** (1971), 341—345.

Мышкин В. И.

[1] Однородные сепарабельные абелевы группы без кручения, *Матем. сб.*, **64** (1964), 3—9.
[2] Про один клас нерозщеплюваних змішаних абелевих груп. *Доповіді АН УРСР*, 1964, 1572—1574.
[3] Про зчисленні абелеві групи рангу 1, *Доповіді АН УРСР*, 1965, 974—977.
[4] Об одном классе смешанных абелевых групп с примарной периодической частью, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **30** (1966), 789—824.
[5] Счетные абелевы группы ранга 1, *Матем. сб.*, **76** (1968), 435—448.
[6] Мероморфные подпрямые разложения смешанных абелевых групп, *Сиб. матем. ж.*, **12** (1971), 812—818.

Мэй (May W.)

[1] Commutative group algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **136** (1969), 139—149.
[2] Unit groups of infinite abelian extensions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25** (1970), 680—683.
[3] Multiplicative groups of fields, *Proc. London Math. Soc.*, **24** (1972), 295—306.
[4] Isomorphism of group algebras (to appear).

Нейман Б., Нейман X. (Neumann B. H., Neumann H.)

[1] On a class of abelian groups, *Arch. Math.*, **4** (1953), 79—85.

Нёбелинг (Nöbeling G.)

[1] Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn E. Specker, *Invent. Math.*, **6** (1968), 41—55.

Нунке (Nunke R. J.)

[1] Modules of extensions over Dedekind rings, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 222—241.
[2] Slender groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 274—275; *Acta Sci. Math. Szeged.*, **23** (1962), 67—73.
[3] A note on abelian group extensions, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1401—1403.
[4] On direct products of in finite cyclic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 66—71.
[5] Purity and subfunctors of the identity, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 121—171.
[6] On the structure of Tor, Proc. Colloq. Abelian Groups, 115—124 (Budapest, 1964); *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 453—464.
[7] Homology and direct sums of countable abelian groups, *Math. Z.*, **101** (1967), 182—212.
[8] A note on endomorphism rings of abelian p-groups, Studies on Abelian Groups, 305—308 (Paris, 1968).

Оппельт (Oppelt J. A.)

[1] On p-mixed abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 344—346.
[2] A decomposition of mixed abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 341—348.
[3] Mixed abelian groups, *Canad. J. Math.*, **19** (1967), 1259—1262.

Орсатти (Orsatti A.)

[1] Alcuni gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è locale, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **35** (1965), 107—115.
[2] Su di un problema di T. Szele e J. Szendrei, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **35** (1965), 171—175.
[3] Un lemma di immersione per i gruppi abeliani senza elementi di altezza infinita, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **38** (1967), 1—13.
[4] Una caratterizzazione dei gruppi abeliani compatti o localmente compatti nella topologia naturale, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **39** (1967), 219—225.
[5] Una proprieta caratteristica dei gruppi abeliani torsionalmente completi, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **42** (1969), 325—328.
[6] A class of rings which are the endomorphism rings of some torsion-free abelian groups, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **23** (1969), 143—153.
[7] Sui gruppi abeliani ridotti che ammettono una unica topologica compatta, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **43** (1970), 341—347.

Папп (Papp Z.)

[1] On the closure of the basic subgroup, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1958), 256—260.

Паркер, Уокер Э. (Parker L. D., Walker E. A.)

[1] An extension of the Ulm-Kolettis theorems, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 309—325.

Парр (Parr J. T.)

[1] Endomorphism rings of rank two torsion-free abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **22** (1971), 611—632.

Пирс (Pierce R. S.)

[1] Homomorphisms of primary abelian groups, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 215—310.
[2] Centers of purity in abelian groups, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 215—219.
[3] Endomorphism rings of primary abelian groups, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, p. 125—137.

Понтрягин Л. С.

[1] The theory of topological commutative groups, *Ann. of Math.*, **35** (1934), 361—388.

Прохазка (Procházka L.)

[1] Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп, *Чехосл. матем. ж.*, **10** (1960), 479—492.
[2] К проблеме расщепления некоторых абелевых расширений расщепляемых абелевых групп, *Чехосл. матем. ж.*, **11** (1961), 365—380; **13** (1963), 322—323.
[3] О расщепляемости факторгрупп абелевых групп без кручения конечного ранга, *Чехосл. матем. ж.*, **11** (1961), 521—557.
[4] Заметка о факторно-расщепляемых абелевых группах, *Časopis Pěst. Mat.*, **87** (1962), 404—414.
[5] О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, *Чехосл. матем. ж.*, **12** (1962), 3—43.
[6] Заметка о структуре факторгрупп абелевых групп без кручения конечного ранга, *Чехосл. матем. ж.*, **12** (1962), 529—535.
[7] Условия разложимости в прямую сумму некоторых абелевых групп без кручения ранга два, *Mat. Fyz. Časopis Slovak. Akad. Vied*, **12** (1962), 166—202.
[8] Note on quasi-isomorphism of torsion free abelian groups of finite rank, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **3** (1962), 18—19.
[9] Bemerkung über den p-Rang torsionsfreier abelscher Gruppen unendlichen Ranges, *Чехосл. матем. ж.*, **13** (1963), 1—23.
[10] A generalization of a theorem of R. Baer, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **4** (1963), 105—108.
[11] Об однородных абелевых группах без кручения, *Чехосл. матем. ж.*, **14** (1964), 171—202.
[12] A note on quasi-isomorphism of torsion free abelian groups of finite rank, *Чехосл. матем. ж.*, **15** (1965), 1—8.
[13] Заметка о $\mathfrak{m}$-сепарабельных абелевых группах без кручения, *Чехосл. матем. ж.*, **15** (1965), 526—539.
[14] Über eine Klasse torsionsfreier abelscher Gruppen, *Časopis Pěst. Mat.*, **90** (1965), 153—159.
[15] A note on quasi-splitting af abelian groups, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **7** (1966), 227—235.
[16] Расширения расщепляемых групп при помощи полных примарных групп, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **7** (1966), 429—445.
[17] Прямые суммы групп типа P^+, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **8** (1967), 85—114.
[18] Расширения абелевых групп при помощи групп периодических, *Чехосл. матем. ж.*, **17** (1967), 12—27.
[19] Заметка о прямых суммах групп типа P^+, *Чехосл. матем. ж.*, **17** (1967), 28—35.
[20] A note on free abelian groups, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **10** (1969), 567—569.
[21] A note on completely decomposable torsion free abelian groups, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **10** (1969), 141—161.

[22] Concerning almost divisible torsion free abelian groups, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **12** (1971), 23—31.

Прюфер (Prüfer H.)

[1] Unendliche abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung, Dissertation (Berlin, 1921).
[2] Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen, *Math. Z.*, **17** (1923), 35—61.
[3] Theorie der abelschen Gruppen. I.' Grundeigenschaften, *Math. Z.*, **20** (1924), 165—187; II. Ideale Gruppen, ibid., **22** (1925), 222—249.

Пьетрковский (Pietrkowski S.)

[1] Theorie der unendlichen abelschen Gruppen, *Math. Ann.*, **104** (1931), 535—569.
[2] Untergruppen und Quotientengruppen unendlicher abelscher Gruppen, *Math. Ann.*, **105** (1931), 666—671.

Радо (Rado R.)

[1] A proof of the basis theorem for finitely generated abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 74—75, 160.

Рангасвами (Rangaswamy K. M.)

[1] Neat subgroups of abelian groups, *J. Madras Univ.*, **B33** (1963), 129—135.
[2] On Σ-groups, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 259—262.
[3] Extension theory of abelian groups, *Math. Student*, **32** (1964), 11—16.
[4] A note on algebraic compact groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **12** (1964), 369—371.
[5] Full subgroups of abelian groups, *Indian J. Math.*, **6** (1964), 21—27.
[6] Characterisation of intersections of neat subgroups of abelian groups, *J. Indian Math. Soc.*, **29** (1965), 31—36.
[7] Groups with special properties, *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, *A***31** (1965), 513—526.
[8] Abelian groups with endomorphic images of special types, *J. Algebra*, **6** (1967), 271—280.
[9] Representing Baer rings as endomorphism rings, *Math. Ann.*, **190** (1970), 167—176.
[10] Regular and Baer rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **42** (1974), № 2, 354—358.

Редей, Селе (Rédei L., Szele T.)

[1] Die Ringe «ersten Ranges», *Acta Sci. Math. Szeged*, **12A** (1950), 18—29.

Рейд Г. Э. (Reid G. A.)

[1] Almost free abelian groups, Lecture Notes, Tulane University, 1966—1967.

Рейд Дж. Д. (Reid J. D.)

[1] A note on torsion-free abelian groups of infinite rank, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 222—225.
[2] On quasi-decompositions of torsion-free abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 550—554.
[3] On subgroups of an abelian group maximal disjoint from a given subgroup, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 657—663.
[4] On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 51—69.
[5] On subcommutative rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965), 23—26.

Ри, Уиснер (Ree R., Wisner R. J.)

[1] A note on torsion-free nil groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 6—8.

Ричмен (Richman F.)

[1] Thin abelian groups, *Pacific J. Math.*, **27** (1968), 599—606.

[2] A class of rank 2 torsion free groups, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 327—333.
[3] Extensions of p-bounded groups, *Arch. Math.*, **21** (1970), 449—454.

Ричмен, Уокер К. (Richman F., Walker C. P.)

[1] On a certain purification problem for primary abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **94** (1966), 207—210.

Ричмен, Уокер К., Уокер Э. (Richman F., Walker C., Walker E. A.)

[1] Projective classes of abelian groups, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 335—343.

Ричмен, Уокер Э. (Richman F., Walker E. A.)

[1] Primary abelian groups as modules over their endomorphism rings, *Math. Z.*, **89** (1965), 77—81.
[2] Cotorsion free, an example of relative injectivity, *Math. Z.*, **102** (1967), 115—117.
[3] Extending Ulm's theorem without group theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 194—196.

де Робер (de Robert E.)

[1] Généralisation d'un théorème de T. Szele et d'un prohlème de L. Fuchs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), A237—240.

Ротман (Rotman J.)

[1] A note on completions of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 356—360.
[2] Torsion-free and mixed abelian groups, *Ill. J. Math.*, **5** (1961), 131—143.
[3] On a problem of Baer and a problem of Whitehead in abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12** (1961), 245—254.
[4] The Grothendieck group of torsion-free abelian groups of finite rank, *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1963), 724—732.

Ротман, Йен (Rotman J., Yen T.)

[1] Modules over a complete discrete valuation ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98** (1961), 242—254.

Рох (Roch G.)

[1] Konvergenzfreie p-Gruppen, *Publ. Math. Debrecen*, **8** (1961), 315—325.

Рохлина В. С.

[1] Некоторые классы абелевых групп, *Матем. сб.*, **83** (1970), 214—221.

Рудык Б. М.

[1] К теории расщепляемости смешанных абелевых групп, Вестн. Моск. ун-та, матем., механ., 1965, № 3, 20—27.

Саббах (Sabbagh G.)

[1] How not to characterize the multiplicative groups of fields, *J. London Math. Soc.*, **1** (1969), 369—370.

Сандс (Sands A. D.)

[1] The factorisation of abelian groups, *Quart. J. Math. Oxford*, **10** (1959), 81—91; **13** (1962), 45—54.

Сас (Szász F. A.)

[1] Die abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale erfüllen, *Monatsh. Math.*, **65** (1961), 150—153.
[2] Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **11** (1963), 351—354.

Сегал (Sehgal S. K.)

[1] Units in commutative integral group rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **14** (1970), 135—138.

Селе (Szele T.)

[1] Die abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **13** (1949), 54—56.
[2] Sur la décomposition des groupes abéliens *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 1052—1053.
[3] Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Ann.*, **121** (1949), 242—246.
[4] Über die abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), 89—91.
[5] Gruppentheoretische Beziehungen der Primkörper, *Mat. Aineiden Aikakauskirja*, **13** (1949), 80—85.
[6] Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, *J. Reine Angew. Math.*, **188** (1950), 167—192.
[7] Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen, *Math. Z.*, **54** (1951), 168—180.
[8] On direct sums of cyclic groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1951), 76—78.
[9] On a theorem of Pontrjagin, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **2** (1951), 121—123.
[10] On groups with atomic layers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 127—129.
[11] On non-countable abelian p-groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 300—301.
[12] On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 302—307.
[13] On direct decompositions of abelian groups, *J. London. Math. Soc.*, **28** (1953), 247—250.
[14] On the basic subgroups of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5** (1954), 129—141.
[15] Nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 71—78.
[16] On quasi-indecomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 109—114.
[17] On a topology in endomorphism rings of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1957), 1—4.

Селе, Селпал (Szele T., Szélpál I.)

[1] Über drei wichtige Gruppen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1950), 192—194.

Селе, Сендрей (Szele T., Szendrei J.)

[1] On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **2** (1951), 309—324.

Селе, Фукс (Szele T., Fuchs L.)

[1] On Artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **17** (1956), 30—40.

Селпал (Szélpál I.)

[1] Die abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1949), 51—53.
[2] Die unendlichen abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), 63—64.
[3] The abelian groups with torsion-free endomorphism ring, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1953), 106—108.

Симаути (Simauti K.)

[1] On N-high subgroups of abelian p-groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **16** (1967), 1—3.
[2] On abelian groups in which every neat subgroup is a pure subgroup, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **17** (1969), 105—110.

Сколем (Skolem T.)

[1] On the existence of a multiplicative basis, *Norske Vid. Selsk. Forh.*, **2** (1947), 4—7.

Скотт (Scott W. R.)

[1] The number of subgroups of given index in non-denumerable abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 19—22.

Смилев (Szmielew W.)

[1] Elementary properties of abelian groups, *Fund. Math.*, **41** (1955), 203—271.

Сонсяда (Sąsiada E.)

[1] On abelian groups every countable subgroup of which is an endomorphic image, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **2** (1954), 359—362.
[2] An application of Kulikov's basic subgroups in the theory of abelian mixed groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **4** (1956), 411—413.
[3] Construction of a directly indecomposable abelian group of a power higher than that of the continuum, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **5** (1957), 701—703, and **7** (1959), 23—26.
[4] Proof that every countable and reduced torsion-free abelian group is slender, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 143—144.
[5] On the isomorphism of decompositions of torsion free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one, *Bull. Acad. Polon. Sci*, **7** (1959), 145—149.
[6] On two problems concerning endomorphism groups, *Ann. Univ. Sci., Budapest*, **2** (1959), 65—66.
[7] Negative solution of I. Kaplansky's First Test Problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning homology groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **9** (1961), 331—334.

Страттон (Stratton A. E.)

[1] A note on Ext-completions, *J. Algebra*, **17** (1971), 110—115.
[2] On the splitting of rank one abelian groups, *J. Algebra*, **19** (1971), 254—260.

Стринголл (Stringall R. W.)

[1] A problem on endomorphisms of primary abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 742—743.
[2] Endomorphism rings of primary abelian groups, *Pacific J. Math.*, **20** (1967), 535—557.
[3] Endomorphism rings of abelian groups generated by automorphism groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18** (1957), 401—404.
[4] Decompositions of abelian *p*-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **28** (1971), 409—410.

Султанов Р. М.

[1] Разложение абелевых групп без кручения в прямую сумму циклических групп, АН Аз. ССР, Труды Ин-та физ. мат., **3** (1948), 65—72.
[2] Разложение примарных групп в прямую сумму циклических групп, АН Аз. ССР, Труды Ин-та физ., мат., **4—5** (1952), 168—173.

Сян В.-ч. (Hsiang W. C.)

[1] Abelian groups characterized by their independent subsets, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 447—457.

Сян В.-ч., Сян В. (Hsiang W. C., Hsiang W.)

[1] Those abelian groups characterized by their completely decomposable subgroups of finite rank, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 547—558.

Тарватер (Tarwater D.)

[1] Galois theory of abelian groups, *Math. Z.*, **95** (1967), 50—59.
[2] Galois cohomology of abelian groups, *Pacific J. Math.*, **24** (1968), 177—179.
[3] Homogeneous primary abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 154—155.

Тарвотер, Уокер Э. (Tarwater D., Walker E.)

[1] Decompositions of direct sums of cyclic p-groups, *Rocky Mountain J. Math.*, **2** (1972), 275—282.

Теллман (Tellman S. G.)

[1] Images of induced endomorphism in Ext (H, G), *Acta Sci. Math. Szeged*, **23** (1962), 290—291.

Тиллман (Tillman S. J.)

[1] The multiplicative group of absolutely algebraic fields in characteristic p, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1969), 601—604.

Тоски (Toskey B. R.)

[1] Rings on direct sum of cyclic groups, *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 93—95.

Уитни (Whitney H.)

[1] Tensor products of abelian groups, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 495—520.
[2] Topics in the theory of abelian groups. I., Divisibility of homomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944), 129—134.

Ульм (Ulm H.)

[1] Zur Theorie der abzählbar-unendlichen abelschen Gruppen *Math. Ann.*, **107** (1933), 774—803.
[2] Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären abelschen Gruppen, *Math. Z.*, **40** (1935), 205—207.
[3] Elementarteilertheorie unendlicher Matrizen, *Math. Ann.*, **114** (1937), 493—505.

Уокер К. (Walker C. P.)

[1] Properties of Ext and quasi-splitting of abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15** (1964), 157—160.
[2] Relative homological algebra and abelian groups, *Ill. J. Math.*, **10** (1966), 186—209.

Уокер Э. (Walker E. A.)

[1] Cancellation in direct sums of groups. *Proc. Amer. Math., Soc.*, **7** (1956), 898—902.
[2] Subdirect sums and infinite abelian groups, *Pacific J., Math.*, **9** (1959), 287—291.
[3] Direct summands of direct products of abelian groups, *Arch. Math.*, **11** (1960), 241—243.
[4] On the orders of automorphism groups of infinite torsion abelian groups, *J. London. Math. Soc.*, **35** (1960), 385—388.
[5] Quotient groups of reduced abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 91—92.
[6] Torsion endomorphic images of mixed abelian groups, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 375—377.
[7] Quotient categories and quasi-isomorphisms of abelian groups, Proc. Colloq. Abelian Groups, 147—162 (Budapest, 1964).
[8] On n-extensions of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **9** (1965), 71—74.
[9] Divisible quotient groups of reduced abelian groups, *Rocky Mountain J. Math.*, **1** (1971), 353—355.

Уоллер (Waller J. D.)

[1] Generalized torsion complete groups, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 345—356.

Уоллес (Wallace K. D.)

[1] On mixed groups of torsion-free rank one with totally projective primary components, *J. Algebra*, **17** (1971), 482—488.

Уорфилд (Warfield R. B., Jr.)

[1] Homomorphisms and duality for torsion-free groups, *Math. Z.*, **107** (1968), 189—200.
[2] A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **22** (1969), 460—465.
[3] An isomorphic refinement theorem for abelian groups, *Pacific J. Math.*, **34** (1970), 237—255.
[4] Extensions of torsion-free abelian groups of finite rank *Arch. Math.*, **23** (1972), 145.
[5] Classification theorems for p-groups and modules over a discrete valuation ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 88—92.

Фолтингс (Faltings K.)

[1] Automorphismengruppen endlicher abelscher r-Gruppen, Studies on Abelian Groups, 101—119 (Paris, 1968).

Фомин С. В.

[1] Über periodische Untergruppen der unendlichen abelschen Gruppen, *Матем. сб.*, **2** (1937), 1007—1009.

Фрид (Fried E.)

[1] On the subgroups of an abelian group that are ideals in every ring, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, 51—55.

Фридман (Freedman H.)

[1] The automorphisms of countable primary reduced abelian groups, *Proc. London. Math. Soc.*, **12** (1962), 77—99.
[2] On endomorphisms of primary abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **43** (1968), 305—307, and (2) **1** (1969), 630—632.

Фукс (Fuchs L.)

[1] The direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **3** (1952), 177—195.
[2] On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hunger.*, **4** (1953), 267—288.
[3] On a special kind of duality in group theory. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4** (1953), 299—314.
[4] On a property of basic subgroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5** (1954), 143—144.
[5] On abelian torsion groups which cannot be represented as the direct sum of a given cardinal number of components, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 115—124.
[6] Ringe und ihre additive Gruppe, *Publ. Math. Debrecen.*, **4** (1956), 488—508.
[7] On a useful lemma for abelian groups, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **17** (1956), 134—138.
[8] Über universale homomorphe Bilder und universable Untergruppen von abelschen Gruppen, *Publ. Math. Debrecen.*, **5** (1957), 185—196.
[9] On quasi nil groups, *Acta Sci. Math. Szeged.* **18** (1957), 33—43.
[10] Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **18** (1957), 29—32.

[11] On a directly indecomposable abelian group of power greater than continuum, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8 (1957), 453—454.

[12] On generalized pure subgroups of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, 1 (1958), 41—47.

[13] Wann folgt die Maximalbedingung aus der Minimalbedingung? *Arch. Math.*, 8 (1957), 317—319.

[14] Ein kombinatorisches Problem bezüglich abelscher Gruppen, *Math. Nachr.*, 18 (1958), 292—297.

[15] On the possibility of extending Hajós'theorem to infinite abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, 5 (1958), 338—347.

[16] Abelian groups, Publ. House of the Hungar. Acad. Sci., Budapest, 1958.

[17] On character groups of discrete abelian groups, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, **10** (1959), 133—140.

[18] The existence of indecomposable abelian groups of arbitrary power, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **10** (1959), 453—457.

[19] Notes on abelian groups, Ann. Univ. Sci. Budapest, 2 (1959), 5—23; *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 117—125.

[20] On the automorphism group of abelian p-groups, *Publ. Math. Debrecen*, 7 (1960), 122—129.

[21] On algebraically compact abelian groups, *J. Natur. Sci. and Math.*, 3 (1963), 73—82.

[22] Note on factor groups in complete direct sums, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **11** (1963), 39—40.

[23] Recent results and problems on abelian groups, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 9—40.

[24] Some generalizations of the exact sequences concerning Hom and Ext, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, p. 57—76.

[25] Note on linearly compact abelian groups, *J. Austral Math. Soc.*, 9 (1969), 433—440.

[26] Summands of separable abelian groups, *Bull. London. Math. Soc.*, 2 (1970), 205—208.

[27] Note on certain subgroups of products of infinite cyclic groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **19** (1970), 51—54.

[28] Note on direct decompositions of torsion-free abelian groups, *Comment. Math Helv.*, **46** (1971), 87—91.

[29] Some aspects of the theory of torsion-free abelian groups, Texas Tech. Univ. Math. Series, № 9, Lubbock, 1971, p. 32—58.

Фукс, Гальперин (Fuchs L., Halperin I.)

[1] On the imbedding of a regular ring in a regular ring with identity, *Fund. Math.*, 54 (1964), 285—290.

Фукс, Кертес, Селе (Fuchs L., Kertész A., Szele T.)

[1] On a special kind of duality in group theory, I, *Acta Math., Acad. Sci. Hungar.*, 4 (1953), 169—178.

[2] Abelian groups in which every serving subgroup is a direct summand, *Publ. Math. Debrecen*, 3 (1953), 95—105.

[3] On abelian groups whose subroups are endomorphic images, *Acta Sci. Math. Szeged.* **16** (1955), 77—88.

[4] On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 467—475.

Фукс, Лунстра (Fuchs L., Loonstra F.)

[1] On direct decompositions of torsion-free abelian groups of finite rank, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **44** (1970), 75—83.

[2] On the cancellation of modules in direct sums over Dedekind domains, *Indagationes Math.*, **33** (1971), 163—169.

Фукс, Рангасвами (Fuchs L., Rangaswamy K. M.)

[1] On generalized regular rings, *Math. Z.*, **107** (1968), 71—81.
[2] Quasi-projective abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **98** (1970), 5—8.

Фукс, Селе (Fuchs L., Szele T.)

[1] Абелевы группы с единственной максимальной подгруппой (венг.) *Magyar. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **5** (1955), 387—389.

Хаймо (Haimo F.)

[1] Preservation of divisibility in quotient groups, *Duke Math.*, **15** (1948), 347—356.

[2] Image-sharing endomorphisms and linear equations, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 337—347.

[3] Endomorphism radicals which characterize some divisible groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest.*, **10** (1967), 25—29.

[4] The Jacobson radical of some endomorphism rings, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 143—146.

Хамстром (Hamstrom M. E.)

[1] Linear independence in abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 487—489.

Харди (Hardy F. L.)

[1] On groups of ring multiplications, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963), 283—294.

Харрисон (Harrison D. K.)

[1] Infinite abelian groups and homological methods, *Ann. Math.*, **69** (1959), 366—391.
[2] Two of the problems of L. Fuchs, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), 316—319.
[3] A characterization of torsion abelian groups once basic subgroups have been chosen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 335—339.
[4] On the structure of Ext, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963) 195—209.

Харрисон, Ирвин, Пирси, Уокер Э. (Harrison D. K., Irwin J. M., Peercy C. L., Walker E. A.)

[1] High extensions of abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963), 319—330.

Харт (Hart N.)

[1] Ulm's theorem for abelian groups modulo bounded groups, *Pacific J. Math.*, **33** (1970), 635—640.

Хаузен (Hausen J.)

[1] Automorphismengesättigte Klassen abzählbarer abelscher Gruppen, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 147—181.
[2] The hyporesiduum of the automorphism group of an abelian p-group, *Pacific J. Math.*, **35** (1970), 127—139.

[3] Automorphisms of abelian torsion groups with finite *p*-ranks, *Arch. Math.*, **22** (1971), 128—135.

[4] Abelian torsion groups with artinian primary components and their automorphisms, *Fund. Math.*, **71** (1971), № 3, 273—283.

Хауптфлейш (Hauptfleisch G. J.)

[1] On the structure of the group of extensions, *Nieuw Arch. Wisk.*, **13** (1965), 105—109.

Хед (Head T. J.)

[1] Dense submodules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 197—199.

[2] Remarks on a problem in primary abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **91** (1963), 109—112.

[3] A direct limit representation for abelian groups with an application to tensor sequences, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18** (1967), 231—234.

Хёниг (Hönig C.)

[1] Sur les groupes sans torsion, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **258** (1964), 1679—1682.

Хилл (Hill P.)

[1] On the number of pure subgroups, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 203—205.

[2] Certain pure subgroups of primary groups, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 311—314.

[3] Pure subgroups having prescribed socles, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 608—609.

[4] On the automorphism group of an infinite primary abelian group, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 731—732.

[5] A classification of direct sums of closed groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **17** (1966), 263- 266.

[6] Concerning the number of basic subgroups, *Acta Math. Acad., Sci. Hungar.*, **17** (1966), 267—269.

[7] Quasi-isomorphism of primary groups, *Mich. Math. J.*, **13** (1966), 481—484.

[8] Sums of countable primary groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 1469—1470.

[9] On quasi-isomorphic invariants of primary groups, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 257—265.

[10] The isomorphic refinement theorem for direct sums of closed, groups *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 913—919.

[11] Extending automorphisms on primary groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 1123—1124.

[12] On primary groups with uncountably many elements of infinite height, *Arch. Math.*, **19** (1968), 279—283.

[13] Isotype subgroups of direct sums of countable groups, *Ill. J. Math.*, **13** (1969), 281—290.

[14] Endomorphism rings generated by units, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 99—105.

[15] On transitive and fully transitive primary groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **22** (1969), 414—417.

[16] A summable C_Ω-group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1969), 428—430.

[17] A countability condition for primary groups presented by relations of length two, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 780—782.

[18] On the decomposition of groups, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 762—768.

[19] The purification of subgroups of abelian groups, *Duke Math. J.*, **37** (1970), 523—527.

[20] Automorphisms of countable primary abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25** (1970), 135—140.

[21] On the freeness of abelian groups: a generalization of Pontryagin's theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 1118—1120.

[22] A note on extensions of free groups by torsion groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **27**, (1971), 24—28.

[23] The automorphisms of primary abelian groups, *Proc. London Math. Soc.*, **22** (1971), 24—38.

[24] On the classification of abelian groups (to appear).

[25] Sufficient conditions for a group to be a direct sum of cyclic groups, *Rocky Mountain J. Math.*, **1** (1971), 345—351.

[26] Classes of abelian groups closed under taking subgroups and direct limits, *Algebra Univ.*, **1** (1971), 63—70.

[27] Two problems of Fuchs concerning Tor and Hom, *J. Algebra*, **19** (1971), 379—383.

[28] The covering theorem for upper basic subgroups *Michigan Math. J.*, **8** (1971), 187—192.

Хилл, Меджиббен (Hill P., Megibben C.)

[1] Minimal pure subgroups in primary groups, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 251—257.

[2] Quasi-closed primary groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965), 271—274.

[3] On primary groups with countable basic subgroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124** (1966), 49—59.

[4] Extending automorphisms and lifting decompositions in abelian groups, *Math. Ann.* **175** (1968), 159—168.

[5] On direct sums of countable groups and generalizations, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 183—206.

Хилтон, Яхья (Hilton P. J., Yahya S. M.)

[1] Unique divisibility in abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963), 229—239.

Хирш, Цассенхауз (Hirsch K. A., Zassenhaus H.)

[1] Finite automorphism groups of torsion-free groups, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 545—549.

Ховард (Howard E. J.)

[1] First and second category abelian groups with the n-adic topology, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 323—329.

Холлет, Хирш (Hallett J. T., Hirsch K. A.)

[1] Torsion-free groups having finite automorphism groups, *J. Algebra*, 2 (1965), 287—298.

[2] Die Konstruktion von Gruppen mit vorgeschriebenen Automorphismengruppen, *J. Reine Angew, Math.*, **241** (1970), 32—46.

Хонда (Honda K.)

[1] On primary groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 2 (1954), 71—83.

[2] On a decomposition theorem of primary groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **4** (1955), 53—66.
[3] Realism in the theory of abelian groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **5** (1956), 37—59; **9** (1961), 11—28, and **12** (1964), 75—111.
[4] From a theorem of Kulikov to a problem of Kaplansky, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **6** (1957), 43—48.
[5] On direct sums of countable, reduced, abelian p-groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **16** (1968), 157—161.

Хуляницкий (Hulanicki A.)

[1] Algebraic characterization of abelian divisible groups which admit compact topologies, *Fund. Math.*, **44** (1957), 192—197.
[2] Algebraic structure of compact abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **6** (1958), 71—73.
[3] Note on a paper of de Groot, *Proc. Ned. Akad. Wetensch.*, **61** (1958), 114.
[4] On algebraically compact groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **10** (1962), 71—75.
[5] The structure of the factor group of an unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **10** (1962), 77—80.

Цассенхауз (Zassenhaus H.)

[1] Orders as endomorphism rings of modules of the same rank. *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 180—182.

Цыбанев М. В.

[1] Об абелевых вполне M (m)-факторизуемых группах, *Укр. матем. ж.*, **23** (1971), 699—706.

Цыпин (Zippin L.)

[1] Countable torsion groups, *Ann. Math.*, **36** (1935), 86—99.

Чарин В. С.

[1] О группах автоморфизмов нильпотентных групп, *Укр. матем. ж.*, **6** (1954), 295—304.

Чейз (Chase S. U.)

[1] Direct products of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 457—473.
[2] Locally free modules and a problem of Whitehead, *Ill. J. Math.*, **6** (1962), 682—699.
[3] On group extensions and a problem of J.H.C. Whitehead, Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois, 1963, p. 173—193.
[4] Function topologies on abelian groups, *Ill. J. Math.*, **7** (1963), 593—608.

Чекереш (Szekeres G.)

[1] Countable abelian groups without torsion, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 293—306.

Чехата (Chehata C. G.)

[1] Embedding theorems for abelian groups, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 766—770.
[2] Extension of partial endomorphisms of abelian groups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **6** (1963), 45—48.

Чехата, Шавски (Chehata C. G., Shawky A.)

[1] A note on extending partial automorphisms of abelian groups, *J. Austral. Math. Soc.*, **11** (1970), 37—41.

Човла (Chawla L. M.)

[1] A remark on abelian groups imbeddable in their automorphism groups, *J. Natur. Sci. and Math.*, **5** (1965), 111—113.

Шапиро А. П.

[1] Абсолютный центр абелевой группы, Труды Научн. объед. препод. физ.-мат. ф-та Дальневосточ. пед. ин-та, **7** (1966), 88—89.

Шарль (Charles B.)

[1] Le centre de l'anneau des emdomorphismes d'un groupe abélien primaire, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **236** (1953), 1122—1123.

[2] Étude des groupes abéliens primaires de type $\leqslant \omega$, *Ann. Univ. Saraviensis*, **4** (1955), 184—199.

[3] Une caractérisation des intersections de sous-groupes divisibles, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **250** (1960), 256—257.

[4] Étude sur les sous-groupes d'un groupe abélien, *Bull. Soc. Math. France*, **88** (1960), 217—227.

[5] Sous-groupe de base des groupes abéliens primaires, Séminaire P. Dubreil et C. Pisot, 13 (1961), № 17.

[6] Note sur la structure des groupes abéliens primaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 1547—1548.

[7] Méthodes topologiques en théorie des groupes abéliens, Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, p. 29—42.

[8] Sous-groupes fonctoriels et topologies, Studies on Abelian Groups, Paris, 1968, p. 75—92.

Шатле (Châtelet A.)

[1] Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers, Paris-Lille, 1925.

Шафер (Schafer J. A.)

[1] Abelian groups with a vanishing homology group, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 406—409.

Шенкман (Schenkman E.)

[1] On the multiplicative group of a field, *Arch. Math.*, **15** (1964), 282—285.

Шиффман (Shiffman M.)

[1] The ring of automorphisms of an abelian group, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 579—597.

Шмейдлер (Shmeidler W.)

[1] Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren abelschen Gruppen, *Math. Z.*, **6** (1920), 274—280.

Шода (Shoda K.)

[1] Über die Automorphismen einer endlichen abelschen Gruppe, *Math. Ann.*,. **100** (1928), 674—686.

Шпекер (Specker E.)

[1] Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen, *Portugaliae Math.*, **9** (1950), 131—140.

Шперри (Sperry P. L.)

[1] On generating systems for abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 148—153.

Штейн (Stein K.)

[1] Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem, *Math. Ann.*, **123** (1951), 201—222.

Шульц (Schultz P.)

[1] Periodic homomorphism sequences of abelian groups, *Arch. Math.*, **21** (1970), 132—135.

Эйленберг, Маклейн (Eilenberg S., MacLane S.)

[1] On the homology theory of abelian groups, *Canad. J. Math.*, **7** (1955), 43—53.

Энокс (Enochs E.)

[1] Isomorphic refinements of decompositions of a primary group into closed groups, *Bull. Soc. Math. France*, **91** (1963), 63—75.
[2] Extending isomorphisms between basic subgroups, *Arch. Math.*, **15** (1964), 175—178.
[3] On lifting automorphisms in primary abelian groups, *Arch. Math.*, **16** (1965), 342—343.

Энси (Ensey R. J.)

[1] Isomorphism invariants for abelian groups modulo bounded groups, *Pacific J. Math.*, **24** (1968), 71—91.
[2] Primary abelian groups modulo finite groups, *Pacific J. Math.*, **29** (1969), 77—81.

Эрдели (Erdélyi M.)

[1] Прямые слагаемые периодических абелевых групп (венг.), *Acta Univ. Debrecen* **2** (1955), 145—149.

Эрдеш (Erdös J.)

[1] On direct decompositions of torsion free abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1954), 281—288.
[2] Torsion-free factor groups of free abelian groups and a classification of torsion-free abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1957), 172—184.
[3] On the splitting problem of mixed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1958), 364—377.

Эренфойхт (Ehrenfeucht A.)

[1] On a certain problem of K. Kuratowski and A. Mostowski in the theory of groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **2** (1954), 471—473.
[2] On a problem of J. H. C. Whitehead concerning abelian groups *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **3** (1955), 127—128.

Эренфойхт, Лось (Ehrenfeucht A., Łoś J.)

[1] Sur les produits cartésiens des groupes cycliques infinis, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **2** (1954), 261—263.

Ямабе (Yamabe H.)

[1] A condition for an abelian group to be a free abelian group with a finite basis, *Proc. Japan. Acad.*, **77** (1951), 205—207.

Яхья (Yahya S. M.)

[1] P-pure exact sequences and the group of P-pure extensions, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, **5** (1962), 179—191.
[2] On isomorphism Hom (Tor $(A, B), C) \oplus$ Ext $(A \otimes B, C) \cong$ Hom $(A,$ Ext $(B, C) \oplus$ Ext $(A,$ Hom $(B, C))$, *J. Natur. Sci. and. Math.*, **9** (1969), 179—200.

Указатель обозначений [1]

a, b, c, d, ..., x, y, ...	элементы групп
f, g, h, ...	функции
i, j, ...	индексы
$\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ...	векторы
$\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$, ...	типы групп без кручения
R, S, K, L, ...	кольца, идеалы (K — поле)
$\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{M}$, ...	матрицы
Γ, Δ, Ξ, Σ, ...	некоммутативные группы

Теория множеств

ω_σ ($\omega_0 = \omega$)	наименьшее порядковое число мощности $\aleph_\sigma$

Отображения

Δ, ∇	диагональное и кодиагональное отображения

Теория групп

$H(a)$	индикатор (ульмовская последовательность) элемента a
$\chi(a)$	характеристика (высотная последовательность) элемента a
$\mathbf{t}(a)$, $\mathbf{t}(R)$	тип элемента a (подгруппы R группы Q)
$\mathbb{H}(a)$	высотная матрица элемента a
$\succ$	квазисо держится в
$\approx$, $\sim$	квазиравенство, квазиизоморфизм
$p^\sigma A$	определенные подгруппы группы A, полученные путем использования умножения на p и взятия пересечений
$A(\mathbf{u})$	вполне характеристическая подгруппа,

[1] Приведены лишь обозначения, не вошедшие в указатель обозначений к т. **1**.

	связанная с последовательностью $\mathbf{u} = (\sigma_0, \ldots, \sigma_n, \ldots)$
$A(\mathbf{t})$, $A^*(\mathbf{t})$	вполне характеристические подгруппы, связанные с типом $\mathbf{t}$
$f_\sigma(A, G)$	σ-й инвариант Ульма—Капланского группы A относительно подгруппы G
$\overline{A}$	периодическое пополнение группы A
S^-	топологическое замыкание подгруппы S
R^+	аддитивная группа кольца R
$\mathsf{K}^\times$	мультипликативная группа поля K
$U(\mathsf{R})$	группа обратимых элементов кольца R
$\mathfrak{c}\{\ldots\}$, $\mathfrak{z}\{\ldots\}$	централизатор, центр ...

Конкретные группы, кольца

H_σ	группа Прюфера длины σ
K_p	поле p-адических чисел
$\mathsf{E}(A)$, $\widetilde{\mathsf{E}}(A)$	кольцо эндоморфизмов, кольцо квазиэндоморфизмов группы A
$\mathsf{Z}A$	групповое кольцо группы A над Z
Aut	группа автоморфизмов
Mult	группа умножений

Предметный указатель

Оглавление